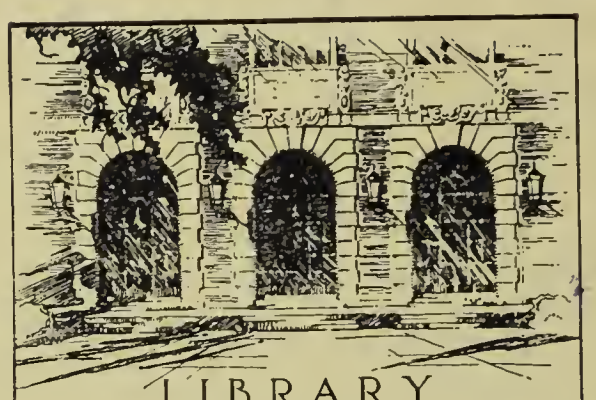
Česká Akademie
císaře Františka Josefa

pro

vědy, slovesnost a umění

v Praze



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

500
C33r
v.1

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

NOV 27 1979
SEP 19 1979

MAR 6 1980
FEB 22 1980

L161—O-1096

Y II 16

ROZPRAVY

ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA

PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

TŘÍDA II.

(MATHEMATICKO-PŘÍRODNICKÁ.)

ROČNÍK I.

(1891—1892.)

V PRAZE.

NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

500
C33r
v.1

Obsah prvního ročníku

Josef Šolín. Příspěvek ku theorii nosníků obloukových 3
Bohumil Eiselt. Splenotyf 19
Fran. Machovec. O přímkových plochách druhého řádu a o systemech paprskových obsažených v komplexu tetraedralném 37
B. Raýman a K. Kruis. Chemicko-biologické studie č. I. 53
Eduard Weyr. Strojení oskulačních kuželoseček k čarám vytvořeným křivými projektivnými řadami a svazky 79
Eduard Weyr. O elliptickém integralu třetího druhu 93
K. Chodounský. Poměr fysiologického účinku k chemické konstituci některých derivatů benzolových 103
M. Lerch. Zobecnění vzorce Frullaniova 125
M. Lerch. Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených 135
M. Lerch. Elementárné stanovení asymptotické hodnoty Legendreových mnohočlenů 151
Jan Kušta. Stanice diluviálního člověka u Lubné v Čechách 169
Julius Stoklasa. Studie o monomagnesiumfosfatu 175
Vlad. Růžička. Pokusy o postmortálném chování se chromogenů mozkových . 181
Jos. Vejnar. Methodický příspěvek ku poznání pohybů buněčných . . . 189
Al. V. Velich. O skladbě chrustavky sepie officinalis 199
F. N. Woldřich. Geologické příspěvky k otázce o posledních kontinentálních změnách evropských 211
E. Počta. O vztazích rudistů k ostatním mlžům 237
E. Albert. Příspěvky k technice amputační 251
A. Spina. Několik pokusů o působení tuberkulinu na morčata tuberkulosními látkami nakažená 261
F. Hlava. O účinku tuberkulinu Kochii 273
F. Schneider. O difenyldimethyldiamidoethanu a některých z něho odvozených barvivech 285
L. F. Čelakovský. Nauka o květenstvích na základě deduktivním . . . 297
Vl. Novák. Studie o voltametru na stříbro 387
Jos. Vejnar. O chování se methylenové modři k leukocytům 435
Fr. Klapálek. Trichopterologický výzkum Čech 443
M. Lerch. Poznámky k theorii funkcí elliptických 465
M. Lerch. Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených 483

J. Schöbl. O vzácných rohových nádorech oka 489
M. Lerch. Základové theorie Malmsténovských řad 525
J. Stoklasa. Studie o monomagnesiumfosfatu 593
J. Klvaňa. O eruptivních horninách tešenitových a pikritových na severovýchodní Moravě 603
Ch. Hermite. O transformaci funkcí elliptických 619
L. Niederle. Žamberské lebky 641
M. Lerch. Poznámky k theorii interpolace 665
M. Lerch. O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících 681
K. Domalíp. Theoretické a experimentálné příspěvky k nauce o strojích elektrických na proudy střídavé 689
Č. Zahálka. Antedon pyropa n. sp. 719
Vl. J. Procházka. Příspěvek ku poznání rázu zvířeny mořského jílu a na něm uloženého pískovce walbersdorfského 729
Frant. Machovec. O normaliích ploch druhého stupně dle jejich křivek rovinných 753
Jos. Velenovský. O biologii a morfologii rodu monesis 801
Jos. Velenovský. O morfologii os cévnatých tajnosnubných 813
L. Jos. Čelakovský. O listech šitých a exkrescenčních 835
J. Velenovský. O phyllokladiích rodu Danaë 863
F. Wald. O směru samočinných lučebných reakcí 873
L. J. Čelakovský. O abnormálních metamorfosách květů tulipánových . 883

REJSTŘÍK.

Albert E. Příspěvky k technice amputační 251
Čelakovský L. J. Nauka o květenstvích na základě deduktivním 297
Čelakovský J. L. O listech šitých a exkrescenčních 835
Čelakovský J. L. O abnormálních metamorfosách květů tulipánových 883
Domalíp K. Theoretické a experimentálné příspěvky k nauce o strojích elektrických na proudy střídavé 689
Eiselt Bohumil. Splenotyf 19
Hermite Ch. O transformaci funkcí elliptických 619
Hlava J. O účinku tuberkulinu Kochii 273
Chodounský K. Poměr fysiologického účinku k chemické konstituci některých derivatů benzolových 103
Klapálek Fr. Trichopterologický výzkum Čech 443
Klvaňa J. O eruptivních horninách tešenitových a pikritových na severovýchodní Moravě 603
Kušta Jan. Stanice diluviálního člověka u Lubné v Čechách 169
Lerch M. Zobecnění vzorce Frullaniova 125
Lerch M. Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených 135
Lerch M. Elementárné stanovení asymptotické hodnoty Legendreových mnohočlenů . 151
Lerch M. Poznámky k theorii funkcí elliptických 465
Lerch M. Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených 483
Lerch M. Základové theorie Malmsténovských řad 525
Lerch M Poznámky k theorii interpolace 665
Lerch M. O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících 681
Machovec Frant. O přímkových plochách druhého řádu a o systemech paprskových obsažených v komplexu tetraedralném 37
Machovec Frant. O normaliích ploch druhého stupně dle jejich křivek rovinných . . . 753
Niederle L. Zamberské lebky 641
Novák Vl. Studie o voltametru na stříbro 387
Počta F. O vztazích rudistů k ostatním mlžům 237
Procházka Vl. J. Příspěvěk ku poznání rázu zvířeny mořského jílu a na něm uloženého pískovce walbersdorfského 729
Raýman B. a Kruis K. Chemicko-biologické studie č. I. 53
Růžička Vlad. Pokusy o postmortálném chování se chromogenů mozkových 181
Schneider J. O difenyldimethyldiamidoethanu a některých z něho odvozených barvivech 285
Schöbl J. O vzácných rohových nádorech oka 489
Spina A Několik pokusů o působení tuberkulinu na morčata tuberkolosními látkami nakažená 261
Stoklasa Julius. Studie o monomagnesiumfosfatu 175
Stoklasa J. Studie o monomagnesiumfosfatu 593
Šolín Josef. Příspěvek ku theorii nosníků obloukových 3
Vejnar Jos. Methodický příspěvek ku poznání pohybů buněčných 189
Vejnar Jos. O chování se methylenové modři k leukocytům 435
Velenovský Jos. O biologii a morfologii rodu monesis 801
Velenovský Jos. O morfologii os cévnatých tajnosnubných 813
Velenovský Jos. O phyllokladiích rodu Danaë 863
Velich Al. V. O skladbě chrustavky sepie officinalis 199
Wald F. O směru samočinných lučebných reakcí 873
Weyr Eduard. Strojení oskulačních kuželoseček k čarám vytvořeným křivými projektivnými řadami a svazky 79
Weyr Eduard. O elliptickém integralu třetího druhu 93
Woldřich J. N. Geologické příspěvky k otázce o posledních kontinentálních změnách evropských 211
Zahálka Č. Antedon pyropa n. sp. 719

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 1.

PŘÍSPĚVEK

KU

THEORII NOSNÍKŮ OBLOUKOVÝCH.

NAPSAL

PROFESSOR JOSEF ŠOLÍN.

(S TABULKOU.)

VĚNOVÁNO 2. PROSINCE 1890
»ZA PŘIJETÍ DO ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ«.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

Předmětem této práce jest *stanovení opěrových reakcí plnostěnného nosníku obloukového o dvou* (opěrových) *kloubech.* Přihlížejíce k *obecnému* řešení úlohy, dejme tomu, že *střednice* nosníku (měřické místo těžišť průřezových) jest *tvaru jakéhokoli;* opěrové body její však mějtež výšku rovnou.

Poněvadž z osamělých břemen složiti lze všelikou soustavu zevnitřních sil prvotných, nutno vyšetřiti v té příčině účinek *jediného břemene osamělého.* Slovu »břímě« přisuzujeme tu však rozum širší, nepřestávajíce na směru svislém, nýbrž připouštějíce vůbec *šikmý směr břemene.* Působiště jeho mysleme si na střednici samé.

Budiž (obr. 1.) *apmb* (rovinná) střednice nosníku; vztahujme ji k osám souřadnicovým X, Z vodorovné a svislé, jichž počátkem budiž levý opěrový bod a; positivná polovice osy $\left\{\begin{matrix} X \\ Z \end{matrix}\right\}$ nechť míří $\left\{\begin{matrix} \text{v pravo} \\ \text{vzhůru} \end{matrix}\right\}$. Libovolný bod m střednice má tedy úsečku $x = \overline{am_o}$ a pořadnici $y = \overline{m_o m}$. Břímě S rozložme ve složku svislou P a vodorovnou Q; ona nechť míří dolů, tato v pravo (v opačném případě bylo by pokládati sílu P, Q za negativnou); působiště p břemene mějž souřadnice $p = \overline{ap_o}$, $q = \overline{p_o p}$. Se břemenem S jsou v rovnováze reakce opěrové $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; klouby při bodech a, b způsobují, že přímka $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \end{matrix}\right\}$ prochází bodem $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$, jsouc ostatně směru vůbec šikmého; rozložme reakci $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \end{matrix}\right\}$ ve složku svislou $\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\}$ a vodorovnou $\left\{\begin{matrix} H \\ K \end{matrix}\right\}$, jichžto směr positivný nechť se srovnává s positivným směrem příslušné osy. Znamenáme-li

$$\overline{ab} = l, \quad \overline{p_o b} = l - p = p',$$

jsou obecné výminky rovnováhy vyjádřeny rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} A + B - P &= 0 \\ H + K + Q &= 0 \\ Al - Pp' + Qq &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

v poslední vztahují se statické momenty patrně ku pravému opěrovému bodu b.

První a třetí rovnice stanoví svislé reakce

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{Pp' - Qq}{l} \\ B &= \frac{Pp + Qq}{l} \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

jež — pokud vyplývají ze svislého břemene P — jsou tytéž, jako by břímě P působilo ve přímý, na obou koncích prostě podepřený nosník ab; ze zbývající

druhé rovnice nelze stanoviti obou neznámých reakcí vodorovných; jestiť nosník obloukový o dvou kloubech v té příčině *staticky neurčitý*. Na vyšetřenou obou neznámých H, K potřebujeme ještě jedné rovnice, tak zvané *výminky přetvárné* neboli *deformační*, jež vyjadřuje účinek opěr ve přetvoření oblouku. V tomto případě jest to rovnice

$$\int_0^l \frac{M\zeta ds}{EJ} + \int_0^l \left(\frac{N - \frac{M}{r}}{EU} + \varepsilon\delta \right) (dx + \zeta d\varphi) = \Delta l \ldots (3),$$

kde znamená r poloměr křivosti, s oblouk střednice, měřený od určitého bodu jejího, na př. a, dále φ úhel, jejž svírá tečna střednice s osou X; E jest modul pružnosti látky nosníkové, U plošný obsah, $\mathcal{J}$ moment setrvačnosti průřezu nosníkového; N jest normálná složka výslednice R sil zevnitřních, působících na levé straně průřezu m, M statický moment této výslednice vzhledem k bodu m (moment ohybový)*; δ znamená změnu (positivnou v případě zvýšení) teploty, ve všech bodech nosníku rovnou, ε součinitele roztažlivosti látky teplem, konečně Δl změnu (positivnou v případě zvětšení) vzdálenosti $\overline{ab} = l$ při deformaci. Tato změna klade se obyčejně rovnou nule; bychom však zároveň vyšetřili účinek popuštění opěr, ponechme Δl v rovnici přetvárné.

Jest pak

$$\left.\begin{aligned} M &= Ax - H\zeta - P(x-p) - Q(\zeta-q) \\ N &= -A\sin\varphi - H\cos\varphi + P\sin\varphi - Q\cos\varphi \end{aligned}\right\} (4);$$

v obou rovnicích mají poslední dva členy platnosť jen potud, jde-li o průřezy m, položené na *pravé* straně působiště p břemene.

Máme tedy

$$N - \frac{M}{r} = -A\frac{x + r\sin\varphi}{r} + H\frac{\zeta - r\cos\varphi}{r} + P\frac{x + r\sin\varphi - p}{r} + Q\frac{\zeta - r\cos\varphi - q}{r}.$$

Jsou-li $\xi = \overline{ae}$, $\zeta = \overline{eo}$ (obr. 1.) souřadnice středu o křivosti střednice pro bod m, můžeme psáti

$$\xi = x + r\sin\varphi,$$
$$\zeta = \zeta - r\cos\varphi,$$

pročež

$$N - \frac{M}{r} = -A\frac{\xi}{r} + H\frac{\zeta}{r} + P\frac{\xi - p}{r} + Q\frac{\zeta - q}{r}.$$

Poněvadž dále

$$dx = ds\cos\varphi,$$
$$d\varphi = -\frac{ds}{r},$$

můžeme položiti

$$dx + \zeta d\varphi = ds\frac{r\cos\varphi - \zeta}{r} = -\frac{\xi}{r}ds.$$

Jde-li o nosník průřezu veskrze stejného, jsou U, $\mathcal{J}$ veličiny stálé; berouce však v úvahu *obecný* případ, kde *průřez* nosníkový jest *proměnný*,

---

* Sílu N pokládáme za $\left\{\begin{matrix}\text{positivnou}\\\text{negativnou}\end{matrix}\right\}$, znamená-li $\left\{\begin{matrix}\text{tah}\\\text{tlak}\end{matrix}\right\}$ — zde jest ovšem vždy negativná; moment M pak budiž positivný, svědčí-li mu točení téhož smyslu, jako mají ručičky hodinové.

vztahujme jej k jakémus pomocnému, neproměnnému průřezu, jehož obsah plošný budiž U_o, moment setrvačnosti $\mathcal{J}_o$ a tedy poloměr setrvačnosti

$$i_o = \sqrt{\frac{J_o}{U_o}},$$

a položme

$$\frac{U}{U_o} = \alpha, \quad \frac{J}{J_o} = \beta.$$

Vše to uveďme v rovnici (3) píšíce zároveň za A hodnotu, jak ji vyjadřuje rovnice (2); tím výminka přetvárná nabude formy

$$\frac{Pp' - Qq}{l} \int_o^l \frac{x\zeta ds}{\beta} - H \int_o^l \frac{\zeta^2 ds}{\beta} - P \int_p^l \frac{(x-p)\,\zeta ds}{\beta} - Q \int_p^l \frac{(\zeta-q)\,\zeta ds}{\beta}$$

$$+ i_o^2 \left[\frac{Pp' - Qq}{l} \int_o^l \frac{\xi\zeta ds}{\alpha r^2} - H \int_o^l \frac{\zeta^2 ds}{\alpha r^2} - P \int_p^l \frac{(\xi-p)\,\zeta ds}{\alpha r^2} - Q \int_p^l \frac{(\zeta-q)\,\zeta ds}{\alpha r^2} \right]$$

$$- EJ_o \varepsilon\delta \int_o^l \frac{\zeta ds}{r} = EJ_o \Delta l \ldots (5),$$

z ní pak plyne neznámá síla

$$H = \frac{\vartheta' P - \vartheta'' Q + EJ_o (\vartheta''' \varepsilon\delta - \Delta l)}{\vartheta} \ldots (6),$$

znamená-li

$$(7) \quad \begin{cases} \vartheta = \int_o^l \frac{\zeta^2 ds}{\beta} + i_o^2 \int_o^l \frac{\xi^2 ds}{\alpha r^2}, \\ \vartheta' = \frac{p'}{l} \int_o^l \frac{x\zeta ds}{\beta} - \int_p^l \frac{(x-p)\,\zeta ds}{\beta} + i_o^2 \left[\frac{p'}{l} \int_o^l \frac{\xi\zeta ds}{\alpha r^2} - \int_p^l \frac{(\xi-p)\,\xi ds}{\alpha r^2} \right], \\ \vartheta'' = \frac{q}{l} \int_o^l \frac{x\zeta ds}{\beta} + \int_p^l \frac{(\zeta-q)\,\zeta ds}{\beta} + i_o^2 \left[\frac{q}{l} \int_o^l \frac{\xi\zeta ds}{\alpha r^2} + \int_p^l \frac{(\zeta-q\ \xi ds}{\alpha r^2} \right], \\ \vartheta''' = -\int_o^l \frac{\zeta ds}{r}. \end{cases}$$

Podrobnější stanovení součinitelů ϑ, ϑ', ϑ'', ϑ''' jest úlohou ryze počtářskou, jež vymáhá, aby střednice jakož i proměna průřezu počtářsky byly dány; jinak nelze vyjádřiti veličin z, ξ, ζ, ds, r, α, β funkcemi proměnné veličiny nezávislé x a vykonati integrování. Jsou-li tyto práce — a to bývá velmi často — příliš komplikované, či neznáme-li ani podrobněji zákona střednice, ježto může býti dána po případě jen obrazem svým, řešíme úlohu přibližně, kladouce místo integralů součty konečné; řešení samo jest pak zase buď počtářské nebo grafické.

K tomu konci rozdělme střednici v malé obloučky σ rovné délky* a přisuďme každému obloučku ty hodnoty veličin proměnných, jež náležejí k těžišti (za které lze pokládati rozpolovací bod) příslušného obloučku. Poněvadž stejný veskrze činitel σ, jenž pak vstupuje na místo činitele ds, ze součtů svrchu položených vytknouti se může, bude přibližně

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sigma} = \sum_o^l \dfrac{\zeta^2}{\beta} + i_o^2 \sum_o^l \dfrac{\zeta^2}{\alpha r^2}, \\ \dfrac{\vartheta'}{\sigma} = \dfrac{p'}{l}\sum_o^l \dfrac{x\zeta}{\beta} - \sum_p^l \dfrac{(x-p)\zeta}{\beta} + i_o^2\left[\dfrac{p'}{l}\sum_o^l \dfrac{\xi\zeta}{\alpha r^2} - \sum_p^l \dfrac{(\xi-p)\zeta}{\alpha r^2}\right], \\ \dfrac{\vartheta''}{\sigma} = \dfrac{q}{l}\sum_o^l \dfrac{x\zeta}{\beta} + \sum_p^l \dfrac{(\zeta-q)\zeta}{\beta} + i_o^2\left[\dfrac{q}{l}\sum_o^l \dfrac{\xi\zeta}{\alpha r^2} + \sum_p^l \dfrac{(\xi-q)\zeta}{\alpha r^2}\right], \\ \dfrac{\vartheta'''}{\sigma} = -\sum_o^l \dfrac{\xi}{r}. \end{cases}$$

Počtářské stanovení těchto výrazů nepotřebuje dále výkladu; přihlédněme k řešení grafickému.

Zaveďme stálého linearného činitele f a položme

$$\beta f = f\frac{J}{J_o} = f',$$
$$\alpha r = r\frac{U}{U_o} = r',$$
$$\xi\frac{f}{r} = \xi';$$

pak lze psáti

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sigma f} = \sum_o^l \dfrac{\zeta^2}{f'} + \dfrac{i_o^2}{f^2}\sum_o^l \dfrac{\xi\xi'}{r'}, \\ \dfrac{\vartheta'}{\sigma f} = \dfrac{p'}{l}\sum_o^l \dfrac{x\zeta}{f'} - \sum_p^l \dfrac{(x-p)\zeta}{f'} + \dfrac{i_o^2}{f^2}\left[\dfrac{p'}{l}\sum_o^l \dfrac{\xi\zeta'}{r'} - \sum_p^l \dfrac{(\xi-p)\zeta'}{r'}\right], \\ \dfrac{\vartheta''}{\sigma f} = \dfrac{q}{l}\sum_o^l \dfrac{x\zeta}{f'} + \sum_p^l \dfrac{(\zeta-q)\zeta}{f'} + \dfrac{i_o^2}{f^2}\left[\dfrac{q}{l}\sum_o^l \dfrac{\xi\zeta'}{r'} + \sum_p^l \dfrac{(\zeta-q)\zeta'}{r'}\right], \\ \dfrac{f\vartheta'''}{\sigma} = -\sum_o^l \zeta'. \end{cases}$$

Přistupme ke konstrukci těchto výrazů V obr. 2. naznačeny všelikė výkony pro *parabolický* nosník obloukový, jehožto střednice jest *apcb* (obr. 2ª.)

---

* Níže bude ukázáno, jak se vyhneme obtížnému dělení střednice v četné díly rovné.

a jehožto průřez (na př. střední stěna, úhelníky a 1 až 3 desky pasové) má tři hodnoty obsahu U a momentu setrvačnosti $\mathcal{J}$, jak to naznačují pořadnice příslušných čar stupňovitých (U), $(\mathcal{J})$ v obr. 2^b. (tato jest plně vytažena, ona čárkována). Za U_o, $\mathcal{J}_o$ zvolme největší hodnoty veličin U, $\mathcal{J}$, poněvadž platí u větším dílu nosníku.

Střednice *apcb* (obr. 2^a.) rozdělena jest v obloučky, jichžto těžiště jsou označena číslicemi 1, 2, 3, ...; pořadnice z těchto těžišť pokládejme za určovací úseky sil svislých, působících ve příslušná těžiště, a sestrojme k této soustavě sil rovnoběžných čáru výslednicovou Γ (obr. 2^d.; 2^c. jest příslušný obrazec složkový, kde však místo pořadnic z, jichžto součet jest poněkud veliký, přeneseny jen polovice jejich, o čemž ještě níže promluvíme, postupujíce zatím tak, jako by se bylo užilo celých pořadnic z), operujíce proměnnou vzdáleností polovou f'*, kterou dostaneme znásobíce zvolenou stálou délku f (v obr. 2. jest $f = \frac{1}{2}l$) proměnným poměrem

$$\beta = \frac{J}{J_o}.$$

V obr. 2. má $\mathcal{J}$ a proto i f' tři hodnoty f'_1, f'_2, f'_3, z nichž $f'_3 = f$; f'_1, f'_2 sestrojeny v obr. 2^b., kde $\overline{af} = f$, $\overline{af'_1} = f'_1$, $\overline{af'_2} = f'_2$. Délky f'_1, f'_2, f'_3 přeneseny pak v obrazec 2^c., t. j. vedeny u vzdálenostech f'_1, f'_2, f'_3 od přímky (z) rovnoběžky označené týmiž písmeny f'_1, f'_2, f'_3; na těchto rovnoběžkách jsou pak poly 1, 2, 3, ... náležející k určovacím úsekům příslušných sil z_1, z_2, z_3, ...

Na svislici každé síly z protínají se dvě strany čáry výslednicové Γ, omezujíce na svislici bodu a jistou pořadnici z'; součinem této pořadnice, pak příslušné vzdálenosti polové f' vyjádřen jest statický moment síly z vzhledem k bodu a, jak to naznačuje rovnice

$$f'\zeta' = \Sigma x,$$

tak že

$$\zeta' = \frac{\Sigma x}{f'}.$$

Krajní strany čáry Γ (za spojité soustavy sil byly by to tečny její v krajních bodech a', b',) omezují na svislici bodu a pořadnici $\overline{a'a_1}$ (obr. 2^d.), kterážto jest součtem veškerých pořadnic z', tak že

$$\overline{a'a_1} = \sum_o^l \frac{\Sigma x}{f'}.$$

Paprsky $b'a'$, $b'a_1$, promítajíce pořadnici $\overline{a'a_1}$ ze středu b', omezují na svislici P pořadnici

$$\overline{p'p_1} = \overline{a'a_1} \cdot \frac{p'}{l} = \frac{p'}{l} \sum_o^l \frac{\Sigma x}{f'}.$$

---

* Viz Šolín, Theorie zevnitřních sil trámů přímých, §. 24.

Přihlížíme-li k čáře Γ jen potud, pokud náleží k silám z působícím na *pravé* straně svislice P, omezují krajní strany její na této svislé přímce pořadnici $\overline{n'p_1}$, o níž platí obdobně

$$\overline{n'p_1} = \sum_{p}^{l} \frac{\zeta\,(x-p)}{f'}.$$

Znamenáme-li tedy pořadnici $\overline{p'n'}$ krátce písmenem y_o', můžeme napsati

$$y_o' = \overline{p'p_1} - \overline{n'p_1} = \frac{p'}{l} \sum_{o}^{l} \frac{\zeta x}{f'} - \sum_{p}^{l} \frac{\zeta\,(x-p)}{f'},$$

čímž sestrojeny jsou první dva členy výrazu

$$\frac{\vartheta'}{\sigma f}$$

a to ku všelikým polohám bodu p; pořadnice y_o' obsažena jest po každé na svislici P mezi tetivou $a'b'$ čáry Γ a touto čarou samou (obr. 2ᵈ.).

Otočme dále svislé paprsky sil z o příslušná těžiště obloučková o 90^0; tím síly stávají se vodorovnými, ale velikosti své nechť nemění. K této soustavě sil vodorovných sestrojme čáru výslednicovou Δ (obr. 2ᵉ.), operujíce zase proměnnou vzdáleností polovou f'; příslušný obrazec složkový dostali bychom, otočíce obrazec 2ᶜ. o 90^0; užijme však přímo obrazce 2ᶜ., vedouce strany čáry Δ *pravoúhelně* ku příslušným paprskům polovým.

Krajní strany čáry Δ omezují na přímce ab úsečku $\overline{a''b''} = y_o$ tak, že

$$y_o = \sum_{o}^{l} \frac{\zeta\zeta}{f'},$$

čímž sestrojen první člen výrazu

$$\frac{\vartheta}{\sigma f}.$$

Přihlížíme-li jen k té části čáry Δ, jež náleží k silám z působícím v díl pb střednice, omezují krajní strany její na přímce Q úsečku

$$\overline{p''n''} = \sum_{p}^{l} \frac{\zeta\,(\zeta-q)}{f'},$$

kterou pokládati jest za positivnou či negativnou, má-li směr úsečky $\overline{a''b''}$ či směr protivný.

Veďme dále v obr. 2ᵉ. přímku $b''d''$ pravoúhelně k tetivě $a'b'$ čáry Γ (obr. 2ᵈ.)*; pak plyne z podobnosti trojúhelníků $q''n''b''$, $a'a_1b'$ úměra

$$\frac{\overline{n''q''}}{\overline{a'a_1}} = \frac{q}{l},$$

---

* V obr. 2ᵈ. jest tetiva $a'b'$ vodorovná, tedy v obr. 2ᵉ. přímka $b''d''$ svislá.

pročež

$$\overline{n''q''} = \frac{q}{l} \sum_{o}^{l} \frac{\zeta x}{f'};$$

znamenáme-li pak úsečku $\overline{p''q''}$ krátce písmenem y_o'', jest

$$y_o'' = \overline{p''n''} + \overline{n''q''} = \sum_{p}^{l} \frac{\zeta(\zeta - q)}{f'} + \frac{q}{l} \sum_{o}^{l} \frac{\zeta x}{f'},$$

čímž sestrojeny první dva členy výrazu

$$\frac{\vartheta''}{\sigma f}$$

a to ke všelikým polohám působiště p břemene; úsečka y_o'' obsažena jest po každé na vodorovné přímce Q mezi tím bodem p'' čáry Δ, jenž odpovídá působišti p břemene, a mezi přímkou $b''d''$ (obr. 2^e.).

Abychom sestrojili ostatní členy žádaných součinitelů, sestrojme ke každému těžišti obloučkovému střed křivosti střednice a tím souřadnice ξ, ζ.* Z pořadnic ζ odvodí se dále hodnoty

$$\zeta' = \zeta \frac{f}{r};$$

násobení poměrem $\frac{f}{r}$ naznačeno v obr. 3., kde na přímku R přeneseny od bodu o poloměry $r_1 = \overline{or_1}$, $r_2 = \overline{or_2}$, ... jakož i délka $f = \overline{of}$; koncovými body přenesených délek vedeny rovnoběžky $r_1 1$, $r_2 2$, ... F, na ně přeneseny délky $\zeta_1 = \overline{r_1 1}$, $\zeta_2 = \overline{r_2 2}$, ... a promítnuty ze středu o na přímku F, tak že $\overline{f1'} = \zeta'_1$, $\overline{f2'} = \zeta_2'$, ... (Veškerá ζ a tím i ζ' jsou negativná.)

Zároveň jest odvoditi z hodnot r hodnoty

$$r' = \alpha r = r \frac{U}{U_o};$$

poněvadž za U_o zvolena tu hodnota U platná pro díly 3. až 7. střednice, jsou poloměry $r_3, \ldots r_7$ zároveň $r_3', \ldots r_7'$; ostatní hodnoty r_1', r_2', r_8', r_9' odvozeny pomocí paprsku S, na nějžto přeneseny délky $\overline{o\mathrm{I}}$, $\overline{o\mathrm{II}}$, $\overline{o\mathrm{III}}$ úměrné k hodnotám U_1, U_2, U_3.

Pokládejme nyní prosté délky — ζ' za určovací úseky sil, jež nechť působí ve svislicích příslušných středů křivosti, a sestrojme k této soustavě sil čáru výslednicovou q (obr. 2^g.), operujíce při tom proměnnou vzdáleností polovou r'. K tomu konci vedena v obrazci složkovém 2^f. přímka (ζ') bodem o

---

* Při parabolickém oblouku jest úsek $\overline{m_1 i}$ (obr. 1.) pro všecky normály stejný rovnaje se polovici parametru, jejž sestrojíme na př. pomocí tečny v bodě a; máme-li normálu mi, dostaneme střed o křivosti, přenesouce $\overline{ii'} = 2\,\overline{cm_1}$ a vedouce přímku $i'o$. Takto sestrojeny v obr. 2^a. středy křivosti střednice v těžištích obloučkových a označeny číslicemi $1'$, $2'$, ... $9'$.

obrazce 3.; jednotlivými body r'_1, r'_2, ... obrazce 3. procházejí pak svislice, v nichž obsaženy jsou poly náležející k určovacím úsekům příslušných sil $-\zeta'$. (Poněvadž součet úseků ζ' jest příliš veliký, přeneseny na přímku (ζ') toliko čtvrtiny*, čehož však zatím nedbejme.)

Krajní strany čáry Φ omezují na svislici bodu a pořadnici

$$\overline{\alpha\alpha_1} = -\sum_o^l \frac{\zeta'\xi}{r'};$$

znamenáme-li pak písmenem β bod, v němžto poslední strana čáry Φ seče svislici bodu b, tu přímky $\beta\alpha$, $\beta\alpha_1$ omezují na svislici P pořadnici

$$\overline{\pi\pi_1} = \overline{\alpha\alpha_1} \cdot \frac{p'}{l} = -\frac{p'}{l}\sum_o^l \frac{\zeta'\xi}{r'}.$$

Přihlížejme dále jen k těm středům křivosti, jež náležejí k bodům střednicovým, položeným na oblouku pb, a k silám $-\zeta'$, jež působí v oněch středech. K těmto silám náleží určitý díl čáry Φ, jehožto krajní strany omezují na přímce P pořadnici

$$\overline{\pi'\pi_1} = -\sum_p^l \frac{\zeta'(\xi - p)}{r'}.$$

Znamenáme-li pak pořadnici $\overline{\pi\pi'}$ kratčeji y'_1, můžeme napsati

$$y'_1 = \overline{\pi\pi_1} - \overline{\pi'\pi_1} = -\frac{p'}{l}\sum_o^l \frac{\zeta'\xi}{r'} + \sum_p^l \frac{\zeta'(\xi - p)}{r'}.$$

Měřickým místem bodu π' jest určitá křivka Φ', jejížto svislými pořadnicemi, měřenými od přímky $\alpha\beta$, vyjádřeny jsou pro všeliké polohy bodu p zbývající členy výrazu

$$\frac{\vartheta'}{\sigma f},$$

nedbáme-li zatím stálých činitelů.

Dejme dále působiti silám $-\zeta'$ v přímkách vodorovných, vedených příslušnými středy křivosti, a sestrojme k této soustavě sil čáru výslednicovou Ψ'

---

* Čtvrtiny tyto stanoveny výhodně tím, že v obr. 3. na přímku F, vedenou bodem f, přenesl se od f jakýs úsek g čtyřikráte za sebou, z koncového bodu čtvrtého úseku pak jakožto středu opsal oblouk kruhový poloměrem g a k němu vedla bodem f tečna G. Kolmé vzdálenosti bodů 1', 2', 3', ... přímky F od přímky G jsou žádané čtvrtiny délek ζ'. (Mohli jsme ovšem násobení pořadnic ζ poměrem $\frac{f}{r}$ i čtvrcení vykonati zároveň, leč v tomto případě na újmu zřetelnosti výkresu.)

(obr. 2^h.), operujíce zase proměnnou vzdáleností polovou r'. Obrazce složkového netřeba tu rejsovati; stačí mysliti si, že obrazec 2^f. otočí se o 90^0, a vésti strany čáry výslednicové $\mathcal{Y}^r$ *pravoúhelně* ku příslušným paprskům polovým obrazce 2^f.

Krajní strany čáry $\mathcal{Y}^r$ omezují na přímce ab úsečku $\overline{\alpha''\beta''}$, kterou znamenejme krátce y_1; jest pak

$$y_1 = \sum_{o}^{l} \frac{(-\zeta')(-\xi)}{r'} = \sum_{o}^{l} \frac{\zeta'\xi}{r'};$$

úsečka ta vyjadřuje tedy druhý člen výrazu

$$\frac{\vartheta}{\sigma f},$$

nedbáme-li zatím stálých činitelů.

Přihlížejme dále jen k těm středům křivosti, jež náležejí k oblouku pb střednice; ku příslušným silám vodorovným $-\zeta'$ náleží určitý díl čáry $\mathcal{Y}^r$, jehožto krajní strany omezují na přímce Q úsečku $\overline{\pi''\pi_o}$ tak, že

$$\overline{\pi''\pi_o} = \sum_{p}^{l} \frac{(-\zeta')(-\xi+q)}{r'} = \sum_{p}^{l} \frac{\zeta'(\xi-q)}{r'}.$$

Měřickým místem bodu π'' jest určitá křivka $\mathcal{Y}^p$.

Vedeme-li v obr. 2^h. přímku $\beta''\gamma'''$ pravoúhelně ku přímce $\alpha\beta$ obrazce 2^g. (v našem výkresu jest $\alpha\beta$ vodorovná, tedy $\beta''\gamma'''$ svislá), jsou trojúhelníky $\beta''\pi'''\pi_o$, $\beta\alpha\alpha_1$ podobny, pročež

$$\frac{\overline{\pi'''\pi_o}}{\overline{\alpha\alpha_1}} = \frac{q}{l}$$

a tedy

$$\overline{\pi'''\pi_o} = -\frac{q}{l} \sum_{o}^{l} \frac{\zeta'\xi}{r'}.$$

Znamenáme-li pak úsečku $\overline{\pi''\pi'''}$ krátce písmenem y''_1, můžeme psáti

$$y''_1 = \overline{\pi''\pi_o} - \overline{\pi'''\pi_o} = \sum_{p}^{l} \frac{\zeta'(\xi-q)}{r'} + \frac{q}{l} \sum_{o}^{l} \frac{\zeta'\xi}{r'},$$

a tím jsme sestrojili, nedbajíce zatím stálých činitelů, zbývající ještě členy výrazu

$$\frac{\vartheta''}{\sigma f}.$$

V obr. 2ᵗ. sečteny jsou na přímce (ζ') úseky ζ'; znamenáme-li prostou délku součtu písmenem y''', máme

$$y''' = \overline{ab} = -\sum_{o}^{l} \zeta' .$$

Na základě veškerých těchto výkonů můžeme napsati rovnice

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sigma f} = y_o + \dfrac{i_o^2}{f^2} y_1 , \\ \dfrac{\vartheta'}{\sigma f} = y_o' - \dfrac{i_o^2}{f^2} y_1' , \\ \dfrac{\vartheta''}{\sigma f} = y_o'' + \dfrac{i_o^2}{f^2} y_1'' , \\ \dfrac{f}{\sigma} \vartheta''' = y''' ; \end{cases}$$

zbývá tedy znásobiti úseky $y_1 = \overline{\alpha''\beta''}$, $y_1' = \overline{\pi\pi'}$, $y_1'' = \overline{\pi''\pi'''}$ stálým poměrem $\dfrac{i_o^2}{f^2}$ a výsledky — hledíc ovšem ke znaménku — připojiti k úsekům $y_o = \overline{a''b''}$, $y_o' = \overline{p'n'}$, $y_o'' = \overline{p''q''}$. Tak vzniknou délky

$$(11)\quad \begin{cases} y_o + y_1 \dfrac{i_o^2}{f^2} = y , \\ y_o' - y_1' \dfrac{i_o^2}{f^2} = y' , \\ y_o'' + y_1'' \dfrac{i_o^2}{f^2} = y'' . \end{cases}$$

Kdybychom v obrazcích čar Γ, Δ přídavky $-y_1' \dfrac{i_o^2}{f^2}$, $y_1'' \dfrac{i_o^2}{f^2}$ připojili náležitě na konci příslušných pořadnic y_o' a úseček y_o'', vznikly by tím z čar Γ, Δ nové čáry Γ', Δ' dávající ke každé poloze břemene příslušnou délku y', y''.

Rovnici (6) lze pak napsati takto:

$$(12)\ldots\quad H = \frac{Py' - Qy'' + \dfrac{EJ_o}{f}\left(\dfrac{y'''}{f}\varepsilon\delta - \dfrac{\Delta l}{\sigma}\right)}{y} ;$$

pravá strana obsahuje známé toliko veličiny.

Připomenutí. Grafické řešení, jak právě bylo vyloženo, zakládá se na tom, že střednici nosníkovou dělíme v obloučky σ veskrze rovné. Dělení křivky na četné díly rovné jest však prací obtížnou, a výsledek bývá nepříliš přesný; výhodněji postupuje se takto. Pojavše v kružidlo délku tak malou, aby se mohla pokládati za $\dfrac{\sigma}{2}$, přenášejme ji na střednici od a k b, čímž obdržíme jednotlivé obloučky i těžiště jejich; na konec zbude dílek $\sigma' < \sigma$. Jest-li oblouk souměrný, kde stačí ostatně vykonati práci jen pro jednu polovici, přenášejme $\dfrac{\sigma}{2}$ zároveň od a i od b, tak že dílek $\sigma' < \sigma$ neb i dva takové

dílky zbudou při vrcholu c. Vytkneme-li pak činitele σ ze všech členů příslušného součtu, objeví se ve členu, který náleží k obloučku σ', činitel $\frac{\sigma'}{\sigma}$, jejžto slučme s příslušnou veličinou z, ζ', tak že určovací úsek příslušné síly nebude z, ζ' jako při ostatních obloučcích, nýbrž $z\,\frac{\sigma'}{\sigma}$, $\zeta'\frac{\sigma'}{\sigma}$.

Jsou-li pořadnice $\left\{\begin{matrix} z \\ \zeta' \end{matrix}\right\}$ příliš veliké, tak že by nákresna nestačila příslušnému obrazci složkovému, zvolme za určovací úseky sil přiměřené díly $\left\{\begin{matrix} \frac{z}{\mu} \\ \frac{\zeta'}{\mu'} \end{matrix}\right\}$; vyloženými svrchu konstrukcemi dostaneme pak místo délek $\left\{\begin{matrix} y_0,\ y_0',\ y_0'' \\ y_1,\ y_1',\ y_1'',\ y''' \end{matrix}\right\}$ délky $\left\{\begin{matrix} \mu \\ \mu' \end{matrix}\right\}$krát menší. Toho ovšem na konec nutno šetřiti. V obrazci 2. zvoleno $\left\{\begin{matrix} \mu = 2 \\ \mu' = 4 \end{matrix}\right\}$, pročež jest

$$y_0 = 2\,\overline{a''b''},\quad y_0' = 2\,\overline{p'n'},\quad y_0'' = 2\,\overline{p''q''},$$
$$y_1 = 4\,\overline{\alpha''\beta''},\quad y_1' = 4\,\overline{\pi\pi'},\quad y_1'' = 4\,\overline{\pi''\pi'''},\quad y''' = 4\,\overline{ab}.$$

Břímě svislé. Jest-li $Q = \mathbb{Q}$ a nedbáme-li zatím ani popuštění opěr ani změn teploty, vyvozují se svislým břemenem P vodorovné reakce

$$(13)\quad \left\{\begin{matrix} H = P\,\frac{y'}{y}, \\ K = -H. \end{matrix}\right.$$

Měníme-li polohu břemene, nemění se úsečka y; proto mění se H úměrně k pořadnici y'; čáru Γ' můžeme tedy pokládati za tak zvanou *příčinkovou* (influenční) *čáru* síly H.*

Sestrojena-li příčinková čára síly H k osamělému břemeni pohyblivému, lze stanoviti sílu H ke všeliké soustavě břemen.

Jde-li o tak zvanou *sečnici tlaků opěrových* (Kämpferdrucklinie), t. j. o měřické místo bodu p^+, v němžto se protínají paprsky P, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, uvažme, že pořadnice $\overline{pp^+} = \mathfrak{z}$ jest vázána úměrou

$$\frac{\mathfrak{z}}{p} = \frac{A}{H};$$

poněvadž pak

$$A = \frac{Pp'}{l},$$

bude

$$\mathfrak{z} = \frac{Ppp'}{Hl} = \frac{pp'y}{ly'} \quad \ldots (14).$$

---

* Často liší se y' jen velmi nepatrně od y_0', a pak jest již čára Γ čarou příčinkovou.

Promítneme-li (obr. 2^{d}.) pořadnici y' čáry Γ' (v obr. 2^{d}. užilo se čáry Γ místo Γ', tedy pořadnice $y_o' = \overline{p'n'}$ místo y') ze středu b' na svislici bodu a, tu projekce

$$\overline{a'd} = y' \frac{l}{p};$$

vedeme-li pak (obr. 2^{e}.) koncem b''' úsečky $y = \overline{a''b'''}$ (v obrazci 2^{e}. vzata úsečka $y_o = \overline{a''b''}$ za y) kolmici ku přímce dp', protíná tato kolmice svislici bodu a'' v bodě e' tak, že (za příčinou podobnosti trojúhelníků $a''e'b'''$, $a'p'd$)

$$\frac{\overline{a''e'}}{p} = \frac{y}{\overline{a'd}},$$

$$\overline{a''e'} = \frac{pp'y}{ly'} = \delta.$$

Anebo promítněme pořadnici y' ze středu a' na svislici bodu b (obr. 2^{d}.); tu průmět

$$\overline{b'e} = y' \frac{l}{p};$$

vedeme-li pak počátkem a'' úsečky $b'''a'' = y$ (obr. 2^{e}.) paprsek $a''e''$ pravoúhelně k $p'e$ (obr. 2^{d}.), vychází z podobnosti trojúhelníků $b'''e''a''$, $b'p'e$ úměra

$$\frac{\overline{b'''e''}}{p'} = \frac{y}{\overline{b'e}},$$

pročež

$$\overline{b'''e''} = \frac{pp'y}{ly'} = \delta.$$

Břimě vodorovné. Jest-li $P = 0$ a nedbáme-li zatím ani popuštění opěr ani změn teploty, vyvozují se břemenem Q síly

$$H = -Q\frac{\eta''}{\eta},$$

$$K = -H - Q = -Q\frac{\eta - \eta''}{\eta}.$$

Měníme-li polohu břemene, nemění se úsečka y; proto mění se H úměrně k úsečce η''; čáru Δ' můžeme tedy pokládati za *příčinkovou čáru* síly H.*

Pomocí příčinkové čáry, jež odpovídá osamělému břemeni pohyblivému, lze stanoviti sílu H ke každé soustavě břemen.

Jde-li o *sečnici tlaků opěrových*, t. j. o měřické místo bodu q^{+}, v němž se protínají paprsky Q, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, uvažme, že úsečka $\xi = \overline{a_o q^{+}}$ (obr. 2^{a}.) bodu q^{+} vázána jest úměrou

$$\frac{\xi}{q} = \frac{H}{A},$$

---

* Často liší se η'' jen velmi nepatrně od y_o'' a pak jest křivka Δ již čarou příčinkovou.

pročež

$$\xi = -\frac{Hl}{Q} = \frac{ly''}{y} \quad \ldots \quad (15).$$

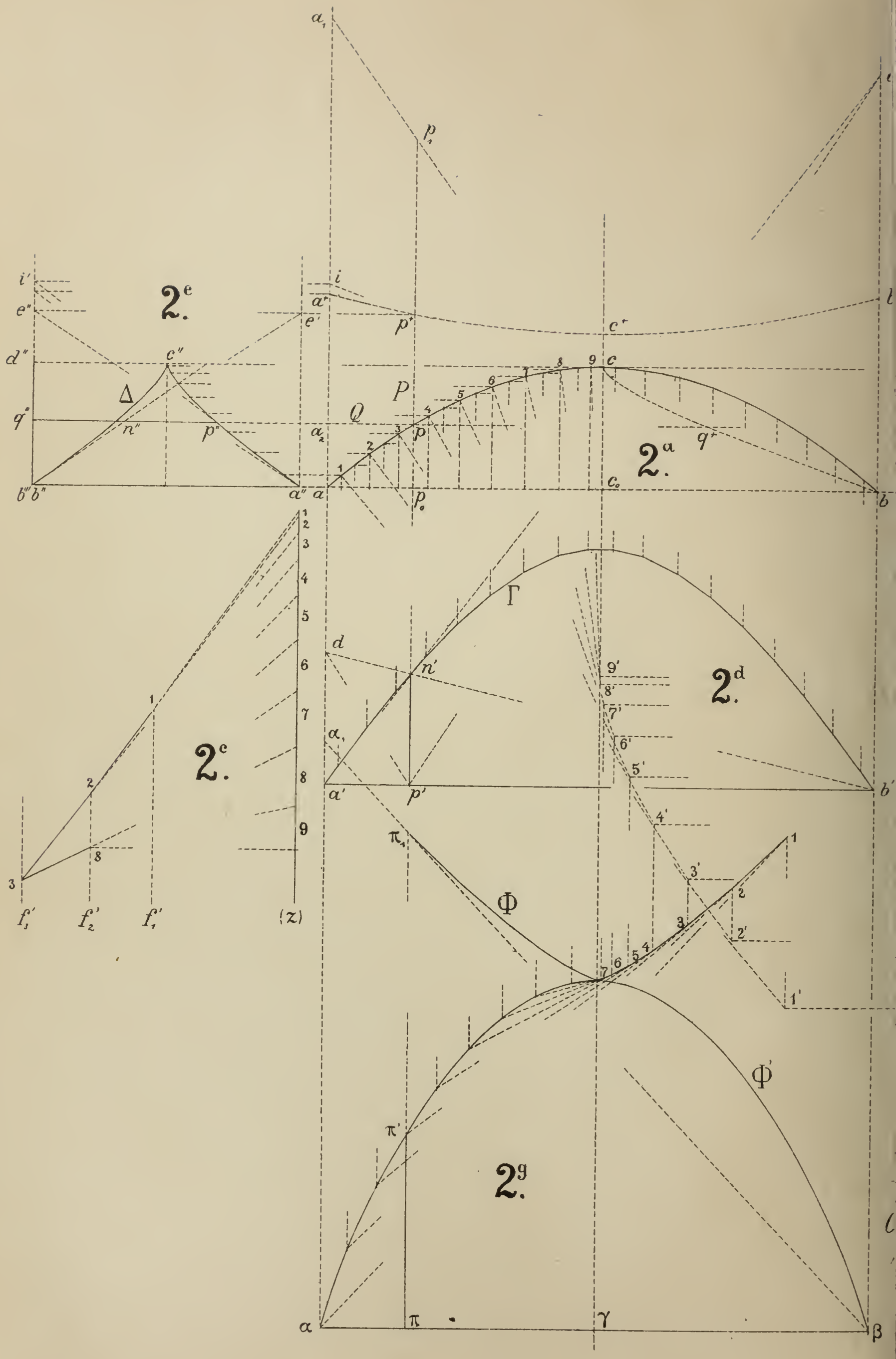
Protneme-li (obr. 2ᵉ.) svislici $b'''d'''$ paprskem $a''p''$ a promítneme-li průsečík i' pravoúhelně na svislici bodu a, čímž obdržíme průmět i, seče paprsek ib přímku Q v bodě q^{+} sečnice žádané.

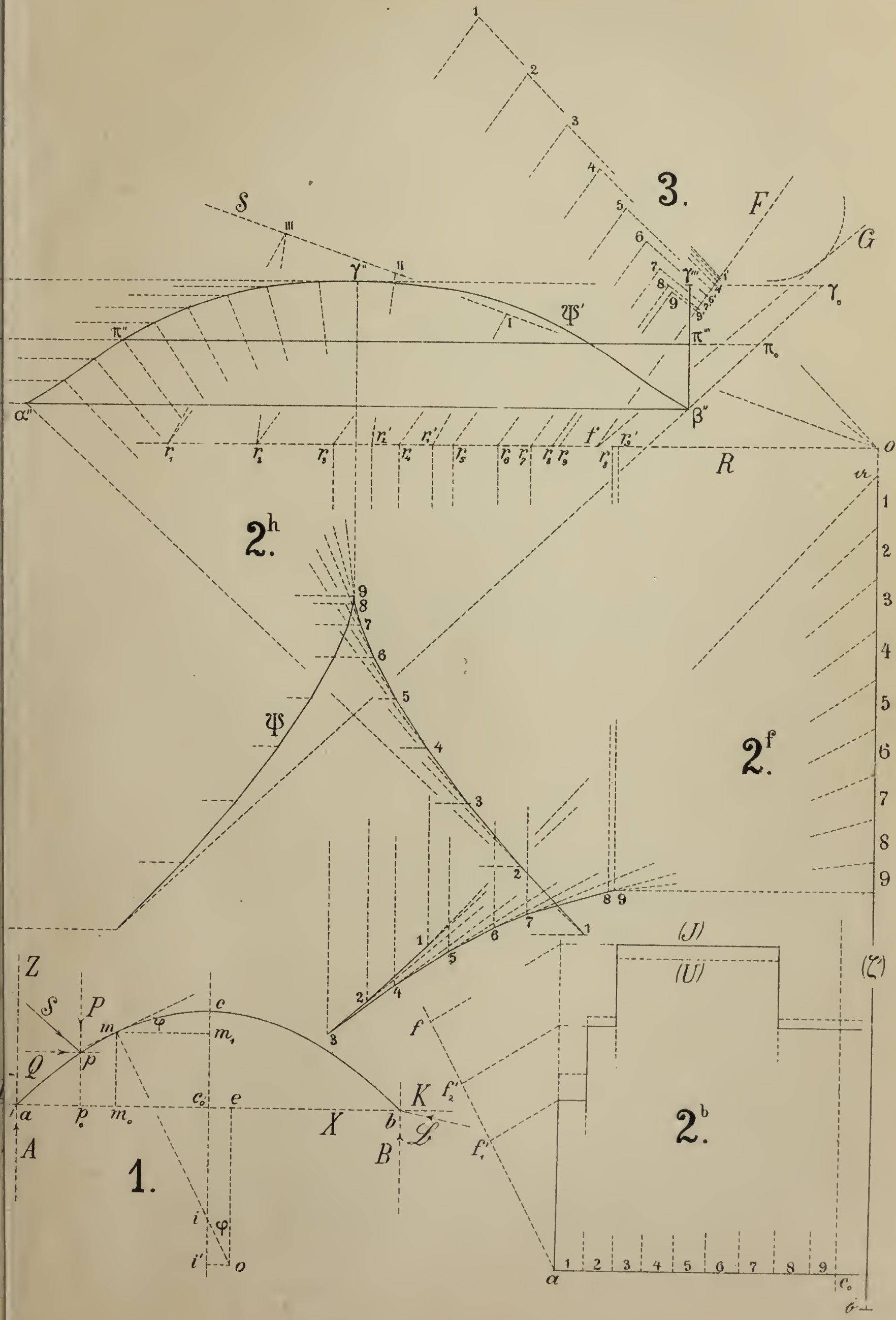
Změnou teploty vyvozuje se vodorovná reakce

$$H = \frac{EJ_o \varepsilon \delta}{f^2} \frac{y'''}{y},$$

popuštěním opěr pak vzniká

$$H = -\frac{EJ_o}{fy} \quad \frac{\Delta l}{\sigma}.$$


2.e
2.a
2.c
2.d
2.g
Δ
P
Q
Γ
Φ
Φ'
(z)


3.
S
F
G
III
II
γ''
γ'''
γ₀
Ψ'
π''
π'''
π₀
α''
β''
r₁ r₂ r₃ r₂' r₄ r₁' r₅ r₆ r₇ r₈ r₉ r₃' f f₂'
R
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
2h.
Ψ
2f.
2b.
(J)
(U)
(ζ)
Z
S
P
Q
p
m
φ
m₁
c
c₀
e
K
f₂'
f
f₁'
a
p₀
m₀
X
b
A
B
L
1.
i
φ
i'
o
α

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 2.

SPLENOTYF.

NAPSAL

PROF. Dr. BOHUMIL EISELT.

VĚNOVANO 5. PROSINCE 1890
ZA PŘIJETI DO »ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ«.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

Splenotyphus.

Lienalní tvar ileotyfu.

Trousseau a *Bretonneau* * v roce 1821 při svých studiích o podstatě horečnatých adynamických nemocí nalezli zvláštní změny ve střevách, zejména v dolejším tračníku, totiž vředy. Určili i dobu, v jaké se vředy utvořují, i jich vznik a hojení se.

Dle jejich výzkumů vyskytuje se asi od polovice prvého týdnu horečnatého stavu ve skupinách žlaz střevních Peyerských mocné naduřování, ve třetím týdnu, a to ku konci jeho, z těchto naduřenin povstávají vředy, které koncem čtvrtého týdnu vyčištěny na spodině se objevují a jizví. Objektivní nález potvrzuje se dosud. Zvláštní běh horečky, ponenáhlé vstoupání teploty tělesní v prvém týdnu, stálá horečka planoucí s nepatrným jen ranním ulevením v druhém a přes polovici třetího týdnu, pak značnější ranní remisse, a konečně i remisse večerní, až k dosažení normalní teploty, 28. den, jak nalezli — ukazuje zřejmě na změny anatomické. Ileotyphus asi ve třetině všech případů mívá tento pravidelný průběh.

Místo nejzřejmější infekce jeví se zde ve žlazách skupených i solitarních, a od toho odvislé naduření a přeměny žlaz mizních okružních.

Během času však vyskytly se ještě jiné lokalisace, a to asi hned od počátku nemoci, protože rozpad bujení a tvoření se vředů ovšem vždy zase do třetího týdnu spadá.

Není nemožno, že by infikované místo nezvrhlo se v dalším průběhu, že by infekce sama zanikla, aniž by k dalším přeměnám vedla.

Čím větší množství jest pozorovaných případů, tím rozmanitější změny se objevují.

Přicházíme k poznání vředů střevních dle podružných katarrhů střevních, vzniklých od sliznice zachvácené, dále dle vyskytování se krvácení ze střeva, a konečně dle možného proniknutí vředu skrze veškeré vrstvy střeva, proděravění střeva. Při rozsáhlých vředech v nejdolejším tračníku a v tlustém střevě možna jest septická infekce od vředů samých.

---

* Archives générales de Médecine, Janvier 1826.

Nejsnadnější jest poznání vředů, umístěných v tračníku. Slyšitelné přelévání tekutin, »krunkání«, jež možno vyvolati tlakem v krajině ileocoecalní, rozdíly poklepu na těchto místech proti jiným místům, a měnící se dle obsahu převládajícího plynovitého nebo tekutého (bolestivosť při doteku), i stolice řídké barvivem žlučním hojně zbarvené, nepříliš hojné, zejména od druhého týdnu se vyskytující. Hojnosť průjmů od rozšíření katarrhu podružného z tyfosních vředů a množství jich asi závislá.

Ve třetím týdnu nemoci při odlupování se příškvarů i části příškvarů ve stolicích nalézti lze, jakož se též dostavují krvotoky. Buď jsou stolice ještě nahnědlé, avšak již rudě přibarvené, aneb odchází krev čistá, tekutá, zsinalé barvy v rozličném množství. Častosť krvácení ze střeva bývá částečně i odvislá od léčení; zejména léčení studenými lázněmi lze obviňovati, že přispívá ku krvácení střevnímu.

Není-li množství krve odešlé přílišné, klesá-li teplota tělesní k normalní, tu znamená často krvácení střevní obrat k lepšímu. Zůstává-li teplota tělesní navzdor ztráty krve značná, aneb vzrůstá-li ještě horečka, pak soudím o zlém významu, neboť připravuje se z rozsáhlých vředů střevních obsahem střeva zavinčná septická infekce.

Krvácení do tračníku lze i poznati, aniž by byla krev řití vystoupila, jednak příznaky o ztrátě krve svědčícími, jednak poklepem, ukazujícím naplnění dotyčného střeva

Proděravění střeva, proniknutím vředů i skrze serosu, ve vyznačených případech, bývá velice osudné a skoro v každém případě smrtné. Je-li nemocný v době katastrofy při dobrém vědomí, udává pocit bolesti, jest náhle vpadlý, úzkostí hroznou sevřen. Možno někdy snad slyšeti vystupování plynův a obsahu střevního do dutiny břišní, jako bublání, vyvolané zejména pohyby dýchacími, pohybem mohutnějším bránice.

Plyny vystoupivšími do dutiny břišní nastává plynatosť dutiny břišní, s mohutným vydmutím stěn břišních, a vytísněním útrob břišních ze své polohy a záhy dostavivším se zánětem pobřišnice hnisavým, diffusním, se smrtným ukončením v několika málo dnech. Nejdelší trvání takové perforativní peritonitidy viděl jsem na 11 dnů.

Záleží na tom, jak veliký jest otvor proděravčný — zejména vředy ve skupině žlaz mívají velké otvory — průběh podle toho jest bouřlivý a rychlý.

Provalení všech vrstev stěny střevní nemívá někdy tak hroznych příznaků. Závisí na tom (mimo velikosť otvoru), nebyla-li přilepena dotyčná část střeva na okolí, než se provalení stalo, dále neprovalí-li se vřed střevní s přilepenou stěnou střevní do jiné útroby.

V prvém případě může být adhaese dosti pevná, tak že žádný obsah střevní nevystoupí do dutiny břišní, a pak lze poznati jen asi místní adhaesivní peritonitidu. Tato z počátku dosti pevná adhaese může se zase odtrhnouti a v pozdější době volnou perforaci zříditi.

Aneb přilepení střeva bylo dosti pevné a rozsáhlé a vřed pronikne dále. Pokud jsem sám pozoroval, stalo se tak do kličky jiné tenkého střeva — aneb do tlustého střeva a jednou do měchýře močového. Diagnosa prvého jest ne-

možna, druhá sotva kdy možna, leda při perforaci tlustého střeva dolejšího, že by odcházely části pokrmu nestrávenčho. Ve třetím případě učiněna za živa diagnosa tím, že trubicí močovou odcházely plyny, a v moči se nacházely části nestrávené pokrmů (mák, kousky kapusty atd.), mimo to barvivo žluční již strávené bez reakce na barvivo žluční obyčejné.

Jest se zmíniti ještě o oněch perforacích, které ve stavu bezvědomém nemocného se dostavují a kde menší jen otvory střevní se nacházejí. Kromě snad nepatrných příznaků poklepem nic zvláštního se nenaskytuje, diagnosticky takové případy nebývají za živa postižené.

Jsouť však případy ještě zvláštní. Tyf probíhá bez značnějších horeček až do třetího týdne, tak že nemocní ani ve svém obyčejném zaměstnání nejsou valně vyrušováni, a tu neočekávanč překvapí jich zánět pobřišnice diffusní, v několika dnech smrtící. Nelze vždy ten zánět co perforativní zánět poznati — a proto radno jest každý náhlý zánět pobřišnice neurčitého vzniku za snad perforací vzniklý považovati. Na mysli utkví vždy onen případ Hamerníkem popsaný. Slečna přijela do Prahy na ples, tančila až do půl noci, v tanci stižena krutými bolestmi břišními, přinesena do nemocnice, zemřela třetího dne zánětem pobřišnice od provaleného vředu tyfosního. Prochodila tudíž tyf střevní do třetího týdnu, v den provalení vředu tak málo nemocnou se cítila, že plesové námahy podstoupila a dosti dlouho je přemáhala.

Na mém oddělení přihodilo se, že nemocní vstoupili do nemocnice s perforací, dosud byvše považováni za zdravé, a vykonávali své úřední neb obchodní povinnosti s hotovou perforací střevní.

Jestli je již s obtíží poznati vůbec přihodilou se perforaci střevní, ještě obtížnějším bude lokalisovati místo perforace.

Perforace může být na jediném místě, neb současně na několika místech, vycházejíc ze vředů tračníku skupených, aneb ze solitarních míšků. Toto poslední se přihodí i v lačníku (*Jejunotyphus*), ovšem jen dle diagnos anatomických. Důležité jest poznání vředů tyfosních v tlustém střevě (*Colotyphus*). Poštěstí se ovšem jen až v třetím týdnu a později, a zajisté ne ve všech případech. Poukázal bych na dvě okolnosti, ze kterých se domnívám na Colotyfus.

Předně stálé průjmy, hojné — a když přijde ku krvácení střevnímu, tuť nalézáme krev hojnou, často promísenou kusy *sražené* krve. Navzdor hojné ztrátě krve neklesá horečka a když přece, tedy jen na krátkou dobu několika hodin. Dále jsou však pozorovati příznaky septické infekce, zajisté vzniklé od vředů střevních v tlustém střevě, znečišťovaných lejnovitým obsahem. Případy colotyfu zlou prognosu mívají.

Avšak nejen ve střevě samém, i v žaludku, a to vycházejíce od lenticularních žlaz (Hlava) tyfosní vředy, i s perforací se objevují.

Nelze upříti, že localisace tyfu střevního nebo břišního, především ve střevě, a to pravidlem vždy i při jinomístních změnách, v dolejším tračníku své sídlo má.

Ohledně dychadel nejčastěji ovšem vidíváme infiltrace a vředy tyfosní v hrtanu na zadní komissuře (*Laryngotyphus*).

Činím pozorna však na ona krvácení z nosu v pozdní době tyfu (ve třetím a po třetím týdnu), která považuji taktéž za závislá od vředů tyfosních, nosních (*Rhinotyphus*).

Zajímavý je též případ z mé školy *Thomayerem* popsaný, vředů tyfosních na sliznici průdušek hrubých se značným naduřením peribronchialních žlaz a mohutnou haemoptoe ve třetím týdnu (*Bronchotyphus.*)

Veliký počet lobularních pneumonií co pravé *Pneumotyfy* pojmenovati lze.

Nephrotyfy francouzských lékařův i u nás se objevují. Jsouť to případy, ve kterých při planoucí horečce hned v prvních dnech diuresa jest valně zmenšena, moč pak tmavá, kalná s hojnou drtí granulovaných epithelů z trubiček močovodných a množstvím bílkoviny, někdy i krvinek volných aneb na válcích z trubiček močovodných uložených. Analogii toho zjevu nacházíme u všech infekčních prudkých nemocí, nejčastěji u spály; v poslední době při epidemii chřipky též byla v jednom případě pozorována. Zavdávají tyto případy v počátku možnosť omylu, jakoby se jednalo o nephritidu (glomerulonephritis ac.). Za několik dní však ztratí se tyto příznaky, aniž by v dalším průběhu se opakovaly, aneb později zase s hrubšími změnami v ledvinách vystupují, ponejvíce závislé od parenchymatosní zvrhlosti ledvin. Sem ovšem nepočítám ony pyelitidy a pyelonephritidy z cystitid pozdějších vzniklé. Katarrhy hrdla měchýře močového s možným rozšířením na sliznici celou měchýře močového a postupující dále do močovodů, do pánve a kalichu ledvin, viděl jsem častěji při léčení studenou vodou v lázních aneb i poléváním vznikati. Zejména časté jsou při retenci moče, a nahodilém kathetrisování, často asi zaviněné nečistými nástroji.

Zajímavé jsou *cerebralní* aneb *meningotyfy*. *Duchek* popsal z Vídně řadu případů rozhodného tvaru: Leptomeningitis exsud. Při horečce planoucí příznaky značného podráždění a posléz ochrnutí nervů některých, od spodiny mozku odcházejících, aneb silného tlaku na kůru mozkovou, tak že nebylo jinak souditi než o zánětu měkkých plen mozku spojeným s výměškem. Nemocní umírají pravidlem v prvém nebo na začátku druhého týdnu onemocnění; dle příznaků jest pravděpodobnosť větší pro meningitidu než pro tyf — lustrace však objeví nepopíratelné známky vyvinujícího se tyfu střevního. Změny anatomické makroskopické nikterak neodpovídají příznakům za živa pozorovaným. Toho druhu případy též u nás se vyskytovaly.

Každým rokem se přihodí, že z venkova bývají dopravováni nemocní, tyfem v prvé době stižení, pod diagnosou akutní manie do blázince, kde se zjistí buď ještě za živa aneb lustrací tyf střevní.

Lze od mikroskopického rozboru očekávati objasnění změn místních.

Dermotyfy vyznačují se buď v prvé době aneb v době celého dalšího horečnatého průběhu zvláštními osutinami.

Nemocný vstoupí do ústavu s planoucí horečkou den nebo dva dni trvající, s naduřením mandlí zanícených, se zánětem měkkého patra, sliznice hltanové, s plamenitou červení na tvrdém patře, s rozsáhlými a živě rudě zbarvenými erythemy na krku, na hrudi, na končetinách hořejších, v okolí kloubů — tak že oprávněni jsme souditi na počátek spály. V několika dnech ztratí se tyto

počáteční příznaky, další průběh zjistí diagnosu tyfu střevního. Jest jen jediná rada, nepřekvapit se v pojmenování nemoci.

V některých případech bývá osutina nejen skvrnitá, nýbrž i pupencovitá, hojná po celém trupu a končetinách, ano i v obličeji. V prvé době, zvláště za současně panující epidemie tyfu exanthematického, bývá určení velice obtížné. Pro další průběh platí za pravidlo trvání horečky: u tyfu exanthematického okolo 2 týdnů, u tyfu střevního asi ještě jednou tak dlouho, u prvého náhlý vstup a odchod horečky, u druhého v prvém týdnu ponenáhlé vystupování horečky, pak po dva týdny stálá horečka a ve čtvrtém týdnu ponenáhlé ubývání horečky; mimo to při tyfu střevním příznaky od střeva Když však při hojné osutině i katarrhy prudké tenkého střeva se vyskytují, které ovšem nemusí býti vždy podružné od tyfosní affekce střeva, tuť ještě rozhoduje provenience nákazy, tak že již v prvé době diagnosa tyfu skvrnitého činěna býti může.

Naduření zánětlivé míšků kožních a okolí s konečným hnisáním, hojnosť nežitů s rozpadem v třetím týdnu též zasluhuje zvláštního povšimnutí.

Některé snětivé decubity snad též od infekce kožní závislé jsou.

Adenotyfy s infekcí žlaz různých povrchních jsou vzácné. Jednou jsme pozorovali mohutné naduření žlaz mizních tříselních a podpažních, s rozpadem hnisavým — tak že připomínal případ podobu s bubony — mimo to byly však vytknuté určité změny střevní.

Ileotyfu přísluší i *haemorrhagický tvar* nemoci. Jeví se, jako při jiných infekčních nemocech prudkých, dvojím způsobem. Buď hned z počátku onemocnění pod vlivem vysoké horečky přichází podlitiny krevní bodovité nebo skvrnité, neb pruhovité nebo rozlezlé v rozličných hloubkách pod pokožkou, ve škáře, ve vazivu podkožním a mezisvalovém, pod sliznicemi, pod serosními blanami, s hojným krvácením ze sliznic aneb i ze seros, neb i do dužnin útrob. Tyto případy zhoubného jsou významu a končí pravidlem v krátké době smrtí. I zde jeví se případy hrozné, kde kůže zejména břicha jako by byla štětcem do barvy rudé omočeným postříkána. V jednom případě pruhovité podlitiny krevní u nemocného v nemocnici venkovské zavdaly příčinu k soudnímu řízení s lékařem a opatrovnicí, jelikož příbuzní zemřelého tyfem se domnívali, že pruhy podlitou krví následkem zlého nakládání s nemocným vznikly.

Aneb ve druhé řadě případů haemorrhagie dostaví se až ve třetím týdnu. Jsou velikou vzácností, ale, jak se někdy přihodí, jediným rokem 5 stejných případů jsme pozorovali, a pak zase za celou řadu let ani jediného jsme v ošetřování neměli. Poskytují tentýž nález podlitin krevních na rozmanitých místech a výlevů krevních dutin, a i výlevy krevní do dužnin. Zde lze lepší upravení očekávati než v případech prvé řady.

Při prohlídce raportu I. oddělení vnitřního od doby zřízení fakulty lékařské české od roku 1882—1889, zejména případů tyfu střevního (celkem 1631 případů), přišel jsem, upozorněn jsa v poslední době zvláštním průběhem některých, na jisté odchylky, jichž jsem si dříve méně všímal. Podal jsem o tom před-

běžnou zprávu do pamětního spisu, vydaného na 100letou památku založení všeobecné c. k. nemocnice v Praze, a měl jsem o tomto předmětu přednášku na X. mezinárodním sjezdu lékařském v Berlíně dne 9. srpna 1890 v 5. oddílu (vnitřního lékařství) v 9. sezení.

Jsou totiž případy tyfu střevního (dle provenience nákazy, a též dle nahodilých anatomických vyšetření zajisté do této skupiny připadající), u kterých příznaky od střeva buď úplně scházejí aneb na nepatrnou míru jen obmezené jsou, tak že nelze nikterak o nějakých změnách střevních za živa souditi, které jsou však vyznačené zejména nálezem na slezině a odtud odvislým rozmanitým chodem horečky.

Naznačil jsem je jménem splenotyfu, abych vytknul, že hlavní sídlo nákazy vězi ve slezině a vše ostatní v pozadí ustupuje. Rozeznávám troji druh průběhu.

1. Náhle vystupující vysoká horečka, rychle vzrůstající nádor sleziny, někdy tak prudkého a ohromného zvětšení, že nelze jinak, než souditi o výlevech krevních do sleziny samé. Bývá i obava pro mocné a během několika hodin objevující se naduření sleziny, že pouzdro příliš napnuté se roztrhne. Nelze pochybovati, že výlevy krevní do sleziny dužninu v rozličném rozsahu zničiti mohou, aneb že i vstřebání schopné zase ponenáhlu se upraví. Délka trvání horečky a její stupeň ovšem odvislé jsou od mohutnosti těchto změn. Navzdor přílišnému napnutí pouzdra sleziny nemusí to přijíti k zánětlivým podružným změnám pouzdra samého: jsouť i tyto případy ještě úplně vyhojitelny.
2. Náhle vystupující horečka, s velikým nádorem sleziny; hned od počátku zánět pouzdra sleziny buď adhaesivní neb exsudativní, obmezený nebo přecházející na celou pobřišnici buď od počátku samého onemocnění nebo častěji ve třetím týdnu a později se vyskytující. Zánět pobřišnice v pozdních dobách i bez nové horečky dostaviti se může, a bývá pravidlem hnisavý.
3. Případy řady třetí jsou ovšem nejhojnější a pravidlem méně nebezpečného průběhu, tak že je pravdě podobno, že hlavní sídlo infekce na slezinu zůstává obmezeno, aniž by to dostoupilo k rozhodnějším změnám jiným.

Časté jsou případy *atypické*; horečka několika dní trvání, následovní apyrexie, na novo horečka z vnitřních příčin, opětně apyrexie; a tak několikráte po sobě se opakujíc. Mívají tyto případy někdy podobu zvratné horečky, nelze však nikdy dostihnout spirill v krvi. Provenience těchto případů nutně vede k náhledu, že se jedná o tyf střevní. Že příznaky od střeva (jako jsou podružné katarrhy, místné nadmutí tračníku dolejšího, bolestivosť toho místa při hrubším dotknutí) úplně scházejí, není nikterak rozhodné pro to, že by žádných nebylo změn střevních; mohou býti, jak se při lustracích jeví, aniž by za živa zjevnými se okázaly.

V jiných případech jedním attaquem horečky několika dní trvajícím věc odbyta jest, aniž by horečka více se dostavila, jen nádor sleziny, zase rychle

mizející, ukazuje na přihodivší se infekci. Možno, že sem patří i případy nepatrné horečky bez značnějších teplot, několik dní trvajících, jako *febricula* popsaných, a snad taktéž případy jedno- nebo dvoudenní horečky bez jiných přidruženin, co *ephemera* pojmenovaných. Ovšem jest odlišiti ony případy krátce trvající horečky s herpetickou osutinou, co *febris herpetica* popsaných a jiné zvrhlé infekční nemoci.

Ony případy *apyretického* a *afebrilního* tyfu bez příznaků střevních sem též počítány býti mohou, neboť neschází u nich nikdy hlavní příznak; nádor náhlý sleziny — přijde-li v těchto případech nahodile k perforaci střevní z osamělého míšku střevního aneb i z jednotlivé skupiny Peyerské zvředovatělé, pak ovšem za tyfy střevní bez příznaků zřejmých prohlašovány bývají.

Vždyť u malarie též podobně zjevy máme, kde mimo provenience určité a nádor sleziny žádných jiných příznaků, zejména žádných horečnatých zjevů, někdy nebývá.

Vyjmu z každé řady splenotyfu jeden případ charakteristický.

Případ řady prvé:

V jistém zámku polabském v západních Čechách jevily se případy ileotyfu. Zámek byl od obce úplně isolován, domácí lékař dr. W. z Ú. n. L. hleděl vypátrati příčinu onemocnění. Vodovod zaopatřoval zámek troubami dřevěnými dosti chatrnými z lučních pramenů. Louka byla hnojena hnojůvkou z obydlí, kde dříve nemocní tyfem bydleli. Po uzavření tohoto vodovodu přestal tyf. V době, kdy ještě bylo lučního pramene používáno, byla doma návštěvou dcera, která se vrátila později do svého sídla ve vých. Čechách, zdánlivě úplně zdravá. Po čtyrech nedělích rozstonala se příznaky tyfu, ačkoliv v jejím domově žádné tyfy se nevyskytovaly. Horečka, hned z počátku valná, byla provázena velkým rozčilením a značnými bolestmi hlavy, tak že lékař jeden domníval se, jakoby onemocnění klonilo se ku zánětu plen mozkových. Avšak nádor sleziny, sporá roseola a provenience nemoci rozhodně pro tyf střevní mluvily. Inkubační doba tyfu střevního dle mé zkušenosti na 4 neděle počítána býti musí. Inkubační dobu nejlépe zjistíme při cestujících po svatbě aneb touristech. Zavlečení případů častěji dříve z Mnichova a z Berlína se přihodilo, i Basilej pověstná byla. Znám případ přijmutí nákazy tyfem střevním v Berlíně z hotelu blíže Charité položeného u mladé paní, která několik dnů v Berlíně se zdržela na své cestě do Švédska. Po čtyřnedělním tam pobytu vrátila se přes Berlín a v témž hotelu na několik dnů se usídlila. Při návratu do Prahy již horečkou stižená přišla, horečkou od tyfu střevního vycházející. Tyf probíhal úplně pravidelně za dobu čtyř neděl, avšak sotva že nastala apyrexie, nový tyf, zase čtyřnedělního průběhu se dostavil. Soudím, že se zde jednalo o dvoudobou infekci a o dva tyfy, které sebe následovaly po čtyřnedělní inkubační době.

V přítomném případě doba inkubační též 4 neděle trvala. Z průběhu možno vytknouti: příkré vystupování horečky hned od počátku, velký nádor náhlý hned z prvu. Když byla diagnosa zjištěna, bylo vše vykonáno, jak se radilo. Pokoj pro nemocnou prostranný, světlý, sluneční; bez každého jiného nářadí než pro pohodlí nemocné potřeba, totiž dvojí postel upravená, stolek

pro léky a několik židlí. Opatření spolehlivé opatrovnice, která se střídala s matkou nemocné, z nichž jedna do půl, druhá od půlnoci střežila.

Stran životosprávy jen tekutá potrava, polévka čistá, mléko zvařené a osolené, něco čaje a něco červeného vína do vody. Léků jen dle potřeby při hyperpyrexii. Ve druhém týdnu nemoci přihodil se ohromný nádor sleziny během několika hodin, tak že slezina deset centimetrů široká přesahovala čáru podpažní levou a dosahovala čáry střední až k pupku. Nemocná úplně při vědomí udávala pouze pocit tlaku v krajině slezinné. Bylo se právem obávati roztržení pouzdra sleziny, při dalším pokračování zvětšování se sleziny. Roseola velice sporá, stolice jen po irrigaci do střeva obyčejnou vodou, a to stolice sbalená. Nadmutí břicha jen velice nepatrné, žádná bolestivosť ani samovolná ani při doteku v krajině ileocoecalní, jakož i žádných rozdílů poklepu.

Horečka stále planoucí trvala 46 dní, měřením zjištěn ustavičný směr ku 40° C. (pod paždí), nebylo-li použito antipyretik. První pokus zabalení do mokrých prostěradel chladných skončil povážlivým kollapsem, tak že nutno bylo použiti rozhodných excitancií (aetherové injekce). Ze všech protihorečnatých prostředků osvědčil se nejlépe antipyrin, z počátku v dávkách půlgrammových per os, později per rectum podávaných. Vždy následovalo klesnutí teploty ponenáhlé o 2° C., trvání asi 5 hodin, po čemž teplota na novo vstoupati počínala. Ošetřující matka sama již dle vzezření nemocné pozorovala přestoupení teploty přes 39·5°. Tato začala pak býti velmi živou, hovornou, měla omamy sluchové a zrakové při úplném vědomí. Za celou dobu nemoci bylo vypotřebováno 80 grammů antipyrinu a 5 velikých láhví cognacu, který byl vždy podáván, jakmile se stal puls měkkým a malým. Dávky antipyrinu ku konci stupňovány býti musily, chtěl-li účinek dosažen býti, tak že v poslední dny až 4 grammy za 24 hodin použito bylo. Žádný exanthem, jaký při podávání antipyrinu častým bývá, za celý průběh se neobjevil.

Bylo i použito na zkoušku jiných antipyretik, avšak vždy po jediném pokuse vráceno se k antipyrinu. Chinin. muriatic. měl totiž v dávkách $^1/_4$—$^1/_2$ grammových v zápětí značnou zaujatosť hlavy a nepříjemné hučení v uších. Phenacetin v dávkách $^1/_4$ grammových vyvolal hrozné poty a nepříjemné svědění kůže.

Jest zde zodpověděti námitku od mnohých lékařův činěnou. Nezaviňuje-li podávání antipyretik prodloužení nemoci a přetvoření jí v těžší průběh!

Vliv vysokých teplot na útroby je nepopíratelný; zvrhlosti parenchymatosní se určitě vyskytují při stálých horečkách delšího trvání blíže 40° C. Vysoké stupně horečky nestále trvající s oblevami na 38° a i 39° C. mnohem lépe se snášívají.

Jedná-li se o nemoc, u které předvídáme dlouhý běh horečnatý, není nikdy lhostejno, vysokou teplotu nějaký čas delší nechati státi, a proto jest nám pravidlem při vyskytování se teplot 40° použit rozhodně antipyretických léků. Nejen že celý stav nemocnému lze učiniti snesitelnějším, ale i odvrácení přeměn parenchymatosních, nutně následujících, rozhoduje v našem počínání. Jest ovšem co litovati, že navzdor všem možným antipyretikám často se nepodaří teplotu snížiti. Jakému prostředku se má dáti přednosť, toť závisí především na vý-

sledku; nejsme nikdy zaujati pro jistý prostředek. Začínáme vždy u zrostlých lidí menšími dávkami, a za tyto považujeme u chininum muriatic. jednu čtvrtinu, u antipyrinu jednu polovinu, u phenacetinu jednu čtvrtinu grammu. Antifebrin v poloviční dávkách (osminu grammu) podáván býti má, a není stejně spolehlivý. Lékař má dbáti vždy možnosti collapsu, a hned při prvých známkách použiti rozhodně lihovitých léků.

Před dosažením teploty blíže 40° není nutno používati antipyretik.

Horečnatý stav bývá podmíněn změnami anatomickými a intensitou infekce, těchto ovšem antipyretickými prostředky nelze vyvolat.

V našem případě tuším zabránili jsme navzdor přílišné a dlouhotrvající horečce zvrhlosti útrobní, mimo výživné změny podmíněné přísnou dietou. Po celý stav nemoci nedostavilo se žádné choroby jiné podružné.

Poslední týden horečky odpovídal křivce upadující horečky s rozhodným ranním a později i večerním klesáním.

V plné apyrexii nastal hlad a rychlé se zotavování od inanice pokročilé.

Teprve 13. den apyrexie bylo povoleno první masité jídlo, navzdor tomu 19. den apyrexie nastala nanovo horečka deset dnů trvající bez průjmů a pak teprv při rychlém zmenšování se sleziny úplné upravení po dalších 25 dnech.

Případ byl léčen p. dr. Frant. Albertem v Kostelci nad Orlicí, jenž mně laskavě každým dnem o stavu zprávu podával, já sám jsem během nemoci sedmkráte povolán byl.

Pan bar. D. laskavě zaznamenání horečky bedlivě vedené mně propůjčil.

Počátek nemoci dne 22. listopadu 1889.

	7 h.	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h.
1889							
$^{3}/_{12}$	38·4	39·0	39·4	39·3	39·4	39·4	39·4
$^{4}/_{12}$	39·3	39·4	39·5	39·7	39·7	39·6	39·6
$^{5}/_{12}$	39·6	39·7	39·8	39·9	40·0	39·9	39·8
$^{6}/_{12}$	39·8	40·0	40·2	40·6	40·8	40·4	39·9
$^{7}/_{12}$	39·6	39·8	39·9	40·1	40·2	39·8	39·2
$^{8}/_{12}$	39·2	39·3	39·6	40·0	39·8	38·8	38·4
$^{9}/_{12}$	39.7	39·0	39·8	40·1	39·1	39·2	40·3
$^{10}/_{12}$	40·2	40·0	39·8	40·5	39·0	40·0	39·8
$^{11}/_{12}$	39·3	40·4	39·8	40·4	40·0	39·8	40·4
$^{12}/_{12}$	39·8	40·4	39·1	40·5	40·1	40·2	40·4
$^{13}/_{12}$	39·4	38·9	40·2	39·1	40·3	39·2	38·6
$^{14}/_{12}$	40·0	39·4	40·6	39·8	40·4	39·4	38·2
$^{15}/_{12}$	40·0	39·0	40·4	39·2	39·0	40·2	38·8
$^{16}/_{12}$	40·0	39·8	38·8	38·8	40·6	39·6	38·8
$^{17}/_{12}$	40·7	39·4	40·4	40·0	39·2	40·8	39·4
$^{18}/_{12}$	39·4	39·2	40·8	39·3	40·4	39·2	38·9
$^{19}/_{12}$	40·5	39·0	40·4	39·0	40·0	38·8	39·2

	7 h.	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h.
1889							
20/12	40·2	39·2	40·0	39·6	40·1	39·2	39·4
21/12	40·0	39·0	39·4	40·0	39·8	39·9	40·0
22/12	38·8	39·4	40·1	39·8	40·0	39·9	40·0
23/12	40·4	39·0	39·8	39·4	39·5	40·6	38·4
24/12	38·6	39·8	39·4	40·4	38·9	39·2	40·0
25/12	39·4	40·4	39·0	39·4	38·2	37·8	39·4
26/12	39·4	37·8	39·2	39·7	38·8	38·8	38·8
27/12	39·3	38·8	39·4	38·9	38·2	39·0	39·4
28/12	37·8	38·8	39·0	38·8	39·2	38·0	37·6
29/12	39·2	38·4	38·8	39·6	38·8	38·0	38·1
30/12	38·7	38·8	39·6	38·4	39·4	38·2	38·0
31/12	38·4	38·9	38·9	39·6	39·7	38·8	38·8
1890							
1/1	39·2	38·2	39·2	39·2	38·8	40·0	39·2
2/1	39·2	39·0	39·2	38·8	39·0	39·8	39·8
3/1	38·8	38·5	39·8	38·0	40·0	41·0	39·8
4/1	39·4	38·4	39 6	39·4	38·3	38·8	39·0
5/1	39 0	40·2	39·8	38·4	39·2	39·2	38·8
6/1	38·2	39·1	38·8	39·2	39·2	38·6	38·0
7/1	37‘2	38·0	38·6	39·0	39·2	38·6	38·0
8/1	37·7	38·1	38·6	39·1	39·1	38·0	37·6
9/1	37·6	37·8	38·4	38·4	38·6	37·8	37·4
10/1	37·4	37·5	37·9	38·8	38·2	37·6	37·0
11/1	37·4	37·6	38·0	38·2	38·4	38·2	37·6
12/1	37·4	37·5	37·7	37·7	37·6	37·6	37·6

Teplota recidivy horečky.

	11 h. v noci	1 h. ráno	3 h. ráno	5 h.	7 h. ráno	9 h	11 h. dopol.	1 h odpol.	3 h.	5 h.	7 h.	9 h. večer
1890												
31/1									39·4	39·4 *	39·3 *	
1/2					39·0	39·2 *	39·4 *	39·1	39·4	39·5	40·5 **	39 0
2/2				38·9	37·9	39·5	40 2 **	39·2	38·8	39·7	39·9	39·5
3/2			39·4	39·6 ****	38·0	37·9	38·9	39·9 ****	39·1	39·6 ****	38·4	39·2
4/2			39·4	38·7	39·9 ****	38·5	38·8	39·7 ****	40·3 ****	39·5	39·2	40·0 ****
5/2		40·1 ****	37·7	38·0	38·6	40·0 ****	39·5	38·6	39·8 ****	38·6	39·7 ****	38·4
6/2		39·2	38·2	39·9 ****	38·6	38·3	37·7	39·9 ****	38·8	38·8	40·1 ****	37·5

	11 h. v noci	1 h. ráno	3 h. ráno	5 h.	7 h. ráno	9 h.	11 h. dopol.	1 h. odpol.	3 h.	5 h.	7 h.	9 h. večer
1890												
7/2	37·2		39·9 ****	38·6	38·4	39·6 ****	37·5	39·6 ****	39·2	38·3	38·6	39·6 ****
8/2			38·7	38·5	38·2	38·6	38·8	39·8 ****	38·7	37·9	37·9	38·4
9/2					36·8	37·8	37·1	38·3	37·9	38·9	38·3	
10/2					36·2	36·0	37·0	36·5	37·3	37·5	37·2	
11/2					36·0	36·2	36·1	36·3	37·2	37·5	36·5	
12/2					36·0	36·4	36·5	36·3	36·5	36·9	36·9	
13/2					36·1	36·5	36·6	36·4	36·8	36·9	36·8	36·3
14/2					36·5	36·3	36·8	36·5	36·7	36·7	36 9	
15/2					36·4	36·2	36·6	36·7	36·5	36·5	37·1	
16/2					36·6	36·6	36·7	36·8	36·9	37·0	36·6	36·3
17/2					36·4	36·3	37·2	37·1	37·0	37·0	37·2	36·7
18/2					36·5	36·9	37·1	37·0	36·9	37·1	36·8	36·3
19/2					36·7	36·9	37·0	37·3	37·3	37·3	37·3	
20/2					36·6	37·2	37·3	37·2	37·0	37·0		
21/2					37·1	37·0	37·1	37·1	37·3	37·1	37·0	
22/2					37·2	37·3	37·2	37·5	37·3			
23/2					37·1	37·0	37·4	37·6	37·3			
24/2						37·0	37 5	37·5	37·4	37·4		
25/2						37·2	37·7	37·5	38·2	38·0	37·9	
26/2					36·7	37·6	38·2	37·9	37·5	37·6	37·5	
27/2					37·2	37·7	38·1	38·2	38 1	37·8	37·0	
28/2					37·2	37·6	37·2	37·7	37·8	37·5	37·0	
1/3					37·0				38·3	37·5	38·3	37·4
2/3					37·4	37·6	37·7	37·9	38·0	37·8	37·6	
3/3	36·8				37·4	37·1	38·0	37·6	37·8	37·5		
4/3					37·0	37 2	37·0	37·8	38·0	37·8		
5/3					37·3	37·5	38·0	38·1	37·8	37·8		
6/3								38·2	38·3	37·3		
7/3					37·2	37·5	37·0	38·1	38·4	38·5	37·9	
8/3								38·0	38·4	38·7	37·9	
9/3					36·6	37·4	37·7	37·5	37·8	38·0	37·8	
10/3					37·3	37·0	37.0	37·6	37·4	37 0	37·4	
11/3					36·9				37·6			
12/3					37·5				37·4	37·5	37·2	37·5
13/3					37·5			37·2				

* znamená, kdy bylo podáno čtvrť grammu antipyrinu, ** půl grammu antipyrinu, **** jeden gramm antipyrinu.

Případ řady druhé.

Farmaceut výkonný stonal tyfem střevním, doma jsa léčen a vstoupil 22. den své nemoci do nemocnice. Příznaků od střev nebylo, stolice přicházela pevná jen po irrigacích. Slezina značně zvětšena za čáru podpažní sahající, a překročující oblouk žeberní o 5 centimetrů, v šířce 8—10 centimetrů, bolestivá, nepohyblivá. Stav horečnatý trval v nemocnici po vstoupení ještě 10 dnů, od počátku nemoci 31. den, 32. a 35. den apyrexie od 36. do 46. dne mírný horečnatý stav, od 47. dne do 58. dne apyrexie, od 59. dne do 79. dne mírná horečka. V průběhu přihodila se thrombosa žíly růžové levé postupující až ku stehenní žíle pod vaz Poupartský, několik dní na to thrombosa pravé růžové žíly s týmž pokračováním. Vznik thrombosy byl vyznačen objevením se horečky a bolestivosti, za oba dny již byla končetina dotyčná zsinalá, oedematosní. Thrombosa nepřekročila vaz Poupartský, jelikož jiné části než končetiny nebyly oedematosní. Ponenáhlu zřizoval se pobočni oběh, žíly povrchní se rozšiřovaly a oedem se tratil. Nápadný byl stejně stálý nádor sleziny a bolestivosť samovolná, zvýšená při dotyku. V době poslední horečky od 59. dne přistupovaly příznaky exsudativního diffusního zánětu pobřišnice, a levostranný zánět výměškový pohrudnice pod úhel lopatky sahající, a jak se později ukázalo, hnisavý.

Číslo prot. 11.999.

		7 h.	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h.	9 h.
	říjen								
* ½ gr. Phenacetin .	9.						39·4	40·1 *	39·2
* ½ gr. Calomel, * ¼ gr. Phenacetin, Stolice	10.	38·5	38·4	39·4	39·5	40·1	39·8 *	39·7 *	38·3
	11.	39·2	39·5	39·3	39·9	39·8	39·6	39·3	40·0
	12.	39·2	39·3	39·0	39·2	39·8	39·8	39·8	39·2
	13.	39·3	39·0	38·6	39·3	39·8	39·3	39·6	39·3
* ½ gr. Calomel . .	14.	37·6	37·7	38·3	38·9	39·2	39·2 *	39·1	38·4
	15.	37·5	37·8	38·0	39·0	39·0	38·9	38·8	38·6
	16.	38·8	38·3	37·9	38·2	39·3	38·7	38·2	38·8
** ½ gr. Phenacetin .	17.	39·9	40·6	40·6	38·7	39·0	40·7 *	39·5	37·0
	18.	37·7	37·6	37·6	37·7	37·9	38·0	38·4	38·0
Stolice	19.	37·0	37·0	37·0	37·0	36·9	36·9	37·5	37·4
Stolice	20.	36·8	36·9	37·6	37·0	36·7	37·0	37·2	37·0
Stolice	21.	36·8	36·7	37·2	37·6	37·3	37·0	37·0	37·2
	22.	36·7	37·0	37·2	37·2	37·6	37·8	38·5	38·6

Číslo prot. 11.999.

		7 h.	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h.	9 h.
	říjen								
* Bolesti v kyčli a v lýtku v pravo . .	23.	38·3 *	38·7	39·5	39·4	39·5	39·3	39·7	39·0
Stolice	24.	38·4	38·4	38·3	38·4	39·3	39·3	38·8	38·5
	25.	37·7	37·9	38·0	37·8	38·0	38·2	37·3	37·0
	26.	37·5	37·5	37·1	37·4	38·1	38·1	37·9	37·6
	27.	37·5	37·3	37·4	38·4	38·4	38·4	37·6	37·5
Stolice	28.	38·5	38·7	39·4	39·2	39·9	40·1	39·7	39·6
Thrombosa v. crur. dextr. s oedemem končetiny * ½ gr. Phenacetinu	29.	38·4	39·1	39·4	39·3	40·3	39·2	39·5	39·0
	30.	38·8	38·1	38·3	39·5	39·3	39·3	39·2	
Stolice	31.	38·4	38·2	38·2	38·8	38·7	38·9	38·4	
	listop.								
	1.	38·1	37·8	37·8	38·5	38·6	38·8	38·2	
	2.	37·6	37·5	37·7	37·6	37·5	38·7	39·2	
Stolice	3.	37·9	38·0	38·1	39·0	39·2	39·2	39·2	
	4.	38·7	38·4	39·0	39·3	39·2	39·5	39·2	
	5.	37·5	37·7	37·5	37·7	38·4	39·1	38·8	
	6.	37·4	37·5	37·8	38·0	38·2	38·7	38·5	
Stolice	7.	37·1	37·2	37·2	37·3	36·3	38·0	38·3	
Stolice	8.	37·3	37·4	37·6	38·0	38·0	38·1	38·6	
Stolice	9.	37·1	37·2	37·0	37·6	37·7	37·9	38·3	
	10.	36·8	37·3	36·7	37·3	37·4	37·3	37·0	
Průjem	11.	37·3	37·0	36·8	38·2	38·9	39·9	39·0	
Průjem	12.	39·5	39·0	39·0	39·5	39·6	38·1	38·3	
	13.	36·6	36·7	36·8	37·0	36·8	37 6	37·3	
	14.	37·0	37·3	37·4	37·1	38·0	38·0	38·6	
Stolice	15.	37·5	37·6	37·5	37·8	38·1	38·2	38·0	
	16.	37·4	36·5	36·1	37·1	37·5	38·5	39 2	
	17.	36·7	36·7	37·0	37·6	37·7	38·4	37·0	
Stolice	18.	36·7	36·8	36·7	36·6	37·1	37·0	37·5	
	19.	37·1	37·2	37·4	37·0	37·0	37·9	37·4	
Stolice	20.	36·6	36·8	36·8	37·4	37·0	37·2	37·5	
	21.	36·4	36·4	36·3	36·4	37·0	37·4	37·3	
Stolice	22.	36·8	36·8	36·1	36·8	37·4	37·8	38 0	

Číslo prot. 11.999.

		7 h	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h.
	listop. 23.	36·6	36·4	36·6	36·7	37·0	37·2	37·6
Stolice	24.	36·6	36·5	36·7	36·5	36·6	36·7	37·5
	25.	37·0	37·0	37·0	37·6	37·5	37·8	38·0
	26	37·4	37·2	36·7	37·2	37·6	38·0	37·6
Stolice	27.	37·3	37·1	37·4	37·7	37·7	37·4	37·9
Stolice	28.	36·5	36·8	36·8	37·8	37·4	37·4	37·9
	29.	36·9	37·0	37·1	37·4	38·2	38·0	38·1
Stolice	30.	36·7	36·9	37·2	37·6	38·2	37·6	38·0
Stolice	prosinec	36·6	37·3	37·5	37·9	38·0	38·1	31·0
	1.							
	2.	37·0	36·8	37·2	38·0	38·3	38·0	38·2
	3.	36·6	37·1	37·5	37·6	37·7	38·3	38·5
Stolice	4.	37·0	37·0	38·0	38·1	38·0	38·0	38·2
	5.	36·6	37·0	37·6	37·7	37·7	38·1	38·1
Stolice	6.	37·8	38·9	38·3	38·4	38·1	38·2	38·1
Stolice	7.	37·0	37·7	38·2	38·6	38·5	38·5	37·8
	8.	36·8	37·2	38·0	38·0	38·0	38·0	38·4
Stolice	9.	36·9	36·8	37·6	38·0	38·3	37·9	37·8
Stolice	10.	36·5	37·3	37·6	38·2	38·1	38·2	37·8
Stolice	11.	36·4	37·3	37·5	38·2	38·4	37·6	37·7
Stolice	12.	36·7	37·5	38·1	38·0	38·3	38·0	37·3
Stolice	13.	36·8	37·6	38·1	38·1	38·1	38·0	37·8
Stolice	14.	36·7	36·8	38·0	37·9	37·7	37·7	37·5
Stolice	15.	36·6	37·3	37·7	38·1	38·1	37·8	37·5
Stolice	16.	36·5	37·5	38·3	38·2	37·2	37·9	37·7
Stolice	17.	36·3	37·3	37·7	38·4	38·4	38·4	37·8
	18.	37·0	37·3	37·8	38·3	38·4	38·2	37·3

s m r ť.

Před vstoupením do nemocnice tři neděle stonal, v nemocnici 72 dní.

Případ řady třetí.

19letá služka vstoupila do služby po dívce, která do nemocnice přinesena byla tyfem střevním pravidelného průběhu a na mém oddělení nemoc přestála. Čtyry neděle po nastoupení této služby onemocněla a naší klinice přikázána byla. — Za celou dobu nemoci nebylo žádných příznaků od střeva. Nádor sleziny velmi značný, teprve v osmém týdnu nemoci (onemocnění 3. března, uzdravení 26. dubna) rozhodně ubývající. Kromě horečnatého stavu, zvláštního průběhu, žádných příznaků, útroby v dobrém, neporušeném stavu. Též v krvi, několikráte vyšetřované, ničehož nalezeno nebylo.

Začátek nemoci 3. března.

		7 h. r.	9 h.	11 h.	1 h.	3 h.	5 h.	7 h. v.
	března							
	6.	39·0	39·4	40·2 *	39·7	39·2	40·8	40·6
	7.	39·2	39·5	40·3	40·1	41·0 *	40·5	38·3
	8.	38·0	38·0	37·4	39·4	39·7	39·7	39·3
Pevná stolice	9.	38·2	37·7	39·2	41 0 *	40·2	39·7	39·0
	10.	39·2	38·7	38·7	40·2 *	39·1	37·5	37·5
	11.	37·2	36·5	36·7	37·9	36·8	36·5	37·0
	12.	36·4	36.5	36·2	36·2	36·5	37·0	36·7
Stolice po klystéru .	13.	37·0	36·2	36·3	36·7	36·7	36·2	36·3
	14.	36·6	36·9	36 3	36·0	36·8	36·5	36·4
	15.	36·5	36·1	36·0	36·3	36·4	36·4	36·3
	16.	36·5	36·7	35·6	37·1	37·0	37·0	36·6
Stolice po klystéru .	*17.	38·5	38·6	39·0	39·1	40·3	40·5	39·0
	18.	38·2	37·6	38·2	39·2	38·8	39·0	38·8
	19.	36·7	36·7	36·6	37·0	37·1	37·0	37·0
	20.	36·3	36·0	36·3	36·4	36·2	36·5	36·0
Stolice po klystéru .	21.	36·6	36·2	36·4	36·8	36·6	36·8	36·5
	*22.	36·0	36·5	37·4	37·8	40·5	39·8	40·3
Klystér bez výsledku	23.	39·3	38·7	39·7	40·0	39·7	39·4	39·3
Pevná stolice	24.	37·3	37·0	36·9	37·5	38·1	37·8	37·5
	25.	36·0	36·3	36·3	36·3	36·7	36·2	36·2
Klystér bez výsledku	26.	35·6	35·9	35·9	36·2	37·6	38·1	39·0
Pevná stolice	27.	37·1	37·0	37·1	37·6	38·2	39·0	39·1
	28.	36·4	36·2	37·2	37·0	36·9	37·2	37·2
	29.	36·4	35·7	37·1	37·9	38·6	38·5	38·2
	30.	36·4	36·1	36·8	37·2	37·0	38·3	37·7
	31.	36·8	36·0	36·8	37·7	38·2	38·4	38·1
	dubna							
	1.	36·7	36·6	36·9	37·5	37·8	38·1	38·0
Od 2.—13. dubna úplně bez horečky								
	13.							39·6
	*14.	36·8	36·8	36·3	37·1	39·0	40·3	40·7
	15.	38·7	38·2	39·7	40·0	39·6	39·8	39·5
	16.	37·7	37·2	37·0	37·4	38·2	38·6	39·0
Od 17. dubna do 26. dubna úplně bez horečky — a uzdravení.								

* na dny znamenané byla krev vyšetřována bez výsledku na spirilly.
* na hodiny znamenané bylo nemocné 0·25 grammu phenacetinu podáno.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 3.

O PŘÍMKOVÝCH PLOCHÁCH DRUHÉHO ŘÁDU A O SYSTEMECH PAPRSKOVÝCH OBSAŽENÝCH V KOMPLEXU TETRAEDRÁLNÉM.

SEPSAL

FRANT. MACHOVEC,

PROFESSOR PŘI C. K. ČESKÉ VYŠŠÍ REALNÍ ŠKOLE V KARLÍNĚ.

VĚNOVÁNO 15. KVĚTNA 1891
»ZA PŘIJETÍ DO ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ«.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J.Otty v Praze

ÚVOD.

1. Buďtež φ_2 a φ'_2 dvě plochy 2. stupně, které určují tetraedrálný komplex paprskový; jejich společný polárný čtyrstěn budiž označen Δ, jeho vrcholy obecně $a^{(k)}$, stěny jim protilehlé $\pi^{(k)}$ a hrana spojující body $a^{(i)}$ a $a^{(k)}$ budiž A_{ik}. Tetraedrálný komplex složen jest z přímek, jejichž poláry vzhledem ku plochám φ_2 a φ_2' se protínají. Myslíme-li si tedy libovolnou rovinu ϱ a jsou-li r a r' její poly ve plochách φ_2 a φ_2', jest přímka $Q \equiv rr'$ paprskem komplexu. Bod r, resp. r', jmenujeme *polem* tohoto paprsku vzhledem ku ploše φ_2, resp. φ_2' a rovinu ϱ jeho rovinou *polárnou*.*

2. O přímkové ploše druhého stupně λ_2 pravíme, že jest v komplexu, jestli její povrchové přímky jedné soustavy jsou paprsky komplexu. Poznáme, že existuje též komplex tetraedrálný obsahující plochy, jejichž přímky povrchové *obou* soustav jsou v komplexu; o těchto plochách pravíme, že leží v komplexu *dvojnásobně*.

Povrchové přímky jedné soustavy plochy λ_2 budeme označovati obecně $R^{(x)}$, jejich souhrn R_2, povrchové přímky druhé soustavy $Q^{(x)}$ a jejich souhrn Q_2.

3. Aby bylo zřejmo, že v tetraedrálném komplexu jsou plochy druhého řádu různých druhů, poukážeme hned na dva druhy.

a) Budiž A libovolná přímka. Zkoumejme, jakou plochu tvoří paprsky komplexu mající své poly vzhledem ku ploše φ_2 na přímce A. Polárné roviny všech bodů přímky A vzhledem ku ploše φ_2 tvoří svazek rovin s touto řadou projektivný a poly rovin tohoto svazku vzhledem ku ploše φ_2' tvoří přímou řadu A' projektivnou s řadou A, při čemž jsou spolu sdruženy každé dva poly téže roviny vzhledem k oběma plochám φ_2 a φ_2'. Spojnice bodů spolu sdružených jsou dle odst. 1. paprsky komplexu a tvoří plochu 2. řádu, která dotýká se všech stěn čtyrstěnu Δ a neprochází v obecném případě jeho vrcholy.

Je-li přímka A paprskem komplexu, protíná přímka A' přímku A a spojnice bodů sdružených tvoří komplexový svazek paprsků 2. řádu.

---

* *Reye* »Geometrie der Lage« 2. Abth., 18. Vortrag. *Machovec* »Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen 2. Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes«. Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1886. V tomto pojednání obsaženy jsou vlastnosti polů, jichž v přítomné práci jest užito.

b) Vyšetřujme dále geometrické místo polů všech paprsků komplexu, které nějakou přímku P protínají. Poznáme snadno, že jest to přímková, v komplexu obsažená plocha 2. řádu, obepsaná čtyrstěnu A.* Myslíme-li si totiž libovolnou přímku A a paprsky mající na ní své poly, tvoří tyto paprsky dle *a)* plochu 2. řádu, která protíná přímku P ve dvou bodech a těmito body procházejí jediné dva paprsky, které protínajíce přímku P mají na A své poly. Plocha ψ obsahující všecky tyto poly jest tedy druhého řádu a poněvadž každá přímka spojující některý bod přímky P s kterýmkoliv bodem $a^{(k)}$ jest paprskem komplexu majícím tento bod za pol, prochází vytčená plocha všemi body $a^{(k)}$.

Myslíme-li si přímkou P libovolnou rovinu, jsou poly všech paprsků komplexu této roviny na jednom z nich, z čehož jde, že plocha ψ_2 složena jest z paprsků komplexu a že prochází, jak i jinak jest patrno, přímkou P.

Je-li přímka P paprskem komplexu, procházejí všecky tyto paprsky *polem této přímky* a plocha ψ_2 přejde v komplexovou plochu kuželovou.

Existence ploch druhu *b)* v komplexu jest patrna též z toho, že polára každého paprsku komplexu vzhledem na př. ku ploše φ_2 jest zase paprskem komplexu. Plochy druhu *b)* jeví se tím jakožto poláry ploch druhu *a)* vzhledem ku ploše φ_2 nebo φ_2'.

Je-li α_2 plocha druhu *a)* a α_2' její polára na př. ve ploše φ_2 — tedy plocha druhu *b)* — jsou poly paprsků obsažených ve ploše α_2' *reciprokými poly*** paprsků plochy α_2 a jich souhrn tvoří křivku 3. řádu obepsanou čtyrstěnu A. Křivka tato jest s přímkou obsahující poly paprsků plochy α_2 *v jisté příbuznosti 3. st.****. Je-li α_2 komplexovým svazkem paprsků, jest α_2' komplexovou plochou kuželovou a vytčená křivka 3. řádu náleží k základním křivkám komplexu.

4. Jestliže soustava R_2 nějaké plochy λ_2 neskládá se ze samých paprsků komplexu, obsahuje jen *čtyři* takové paprsky. Neboť myslíme-li si na ploše λ_2 libovolnou přímku Q druhé soustavy, jsou poly všech paprsků komplexu, které tuto přímku protínají, na ploše 2. stupně ψ_2 obsahující přímku Q. K jiné přímce Q' plochy λ_2 náleží týmž způsobem plocha ψ_2'. Každá z těchto dvou ploch protíná plochu λ_2 kromě ve přímkách Q, resp. Q' ještě ve křivce 3. řádu C_3, resp. C_3', které mají tyto přímky za tětivy. Z toho jde, že křivky C_3 a C_3' mají čtyři společné body a paprsky mající poly v těchto bodech jsou jedinými paprsky komplexu v soustavě R_2.

5. Z odstavce 4. vychází na jevo, že soustava R_2 obsahující *5 paprsků* komplexu, jest *celá* v komplexu. V tomto případě musily by totiž míti křivky C_3 a C_3' (odst. 4.) pět společných bodů a poněvadž mají mimo to společnou tětivu (Q i Q'), sjednocovaly by se.

---

* Viz mé pojednání dříve vytčené (str. 17.).

** Tamtéž str. 3.

*** Příbuznosť tato určena jest následovně. Z povrchových přímek plochy φ_2 dotýká se jich osm plochy φ_2'. Poly rovin tečných plochy φ_2', které těmito přímkami procházejí, vzhledem k φ_2 jsou základními body tlumu (Bündel) ploch 2. řádu a každé dva body spolu sdružené vzhledem k tomuto tlumu příslušejí k sobě ve vytčené kubické příbuznosti (str. 31. téhož pojednání).

Z toho soudíme na př., že přímková plocha 2. řádu, která obepsána jsouc čtyrstěnu Δ obsahuje nějaký *obecný* paprsek komplexu, jest celá v komplexu a podobně i plocha, která obsahujíc takový paprsek dotýká se všech stěn čtyrstěnu Δ.

6. Buďtež Q a Q' dvě mimoběžné přímky. Poly všech paprsků protínajících přímku Q, resp. Q' jsou na ploše ψ_2, resp. ψ_2'. Z toho jde, že poly paprsků obě tyto přímky protínajících jsou na křivce 4. řádu C_4 společné plochám ψ_2 a ψ_2'. Tato křivka prochází všemi body $a^{(k)}$ (3 *b*).

Abychom vyšetřili, jakou plochu tvoří tyto paprsky, mysleme si libovolnou přímku L a plochu λ_2 obsahující poly paprsků, které protínají přímku L (3 *b*). Tato plocha má s křivkou C_4 osm společných bodů, z nichž čtyři pro všecky přímky L jsou v bodech $a^{(k)}$. Zbývající čtyři průsečníky jsou tedy poly paprsků, které protínají přímky Q, Q' a L. Z toho jde, že plocha tvořená paprsky komplexu, které dvě mimoběžky protínají, jest 4. řádu. Budeme ji označovati φ_4.

7. Je-li soustava R_2 částí plochy φ_4 a tudíž útvar obsahující poly všech paprsků R_2 částí křivky C_4, musí býti zbývající část plochy φ_4 též druhého řádu — označíme ji R_2' — a poly její musí býti na zbývající části křivky C_4. Části R_2 a R_2', jakož i k nim příslušné části křivky C_4 budeme jmenovati *doplňkovými* vzhledem ku přímkám Q a Q'.

8. Každá rovina procházející některou z přímek Q nebo Q', na př. Q, a libovolným bodem x' přímky Q' obsahuje dva bodem x' procházející paprsky komplexu, které náležejí ploše φ_4. Tyto dva paprsky protínají přímku Q ve dvou bodech x a y odpovídajících bodu x' přímky Q'. Podobně jsou s každým bodem přímky Q sdruženy dva body přímky Q', z čehož jde, že mezi body obou přímek jest jistý dvoj-dvojznačný vztah. Tím poznáváme opětně, že plocha φ_4 jest 4. řádu a mimo to že přímky Q a Q' jsou jejími přímkami dvojnásobnými. Plocha φ_4 má v každé rovině $\pi^{(k)}$ po přímce, která jest spojnicí bodů $Q\cdot\pi$ a $Q'\cdot\pi$ a prochází, jakož i křivka C_4, každým z bodů $a^{(k)}$, poněvadž každá přímka takovým bodem procházející jest paprskem komplexu, jehož polem jest tento bod.

O druzích přímkových ploch 2. řádu obsažených v komplexu.

9. Předpokládejme, že soustava R_2 plochy λ_2 jest v komplexu. Budiž R libovolný paprsek této soustavy, r jeho pol a Q přímka, která náležejíc druhé soustavě přímek plochy λ_2 prochází bodem r. Všecky paprsky, které přímku Q protínají, mají poly své na přímkové ploše ψ_2 (3*b*), která prochází přímkou Q a jejíž přímky druhé soustavy jsou paprsky komplexu. Tuto soustavu přímek označíme P_2 a zvláště pak písmenem P přímku této soustavy, která prochází bodem r.

Všecky paprsky komplexu, které leží v rovině (RQ), mají své poly na jednom z těchto paprsků a poněvadž bod r jest jedním z těchto polů, musí

tento paprsek procházeti bodem r. Avšak týž paprsek náleží dle 3 *b)* ploše ψ_2, je to tedy paprsek P. Z toho jde, že plocha ψ_2 dotýká se plochy λ_2 v bodě r, při čemž ale mohou nastati dva případy, totiž

A) paprsek P jest různý od paprsku R,

B) paprsky tyto se sjednocují.

10. Přihlédněme ku případu *A*.

Mysleme si přímkou Q položenou libovolnou rovinu $\omega^{(n)}$. Tato rovina má se soustavami R_2 a P_2 společné přímky $R^{(n)}$ a $P^{(n)}$ protínající Q v bodech $d^{(n)}$ a $e^{(n)}$. Poněvadž řady bodů $d^{(n)}\ldots$ a $e^{(n)}\ldots$ jsou projektivné se svazkem rovin $\omega^{(n)}$, jsou i spolu projektivné a poněvadž mají jeden reálný dvojný bod, totiž r, musí míti ještě jeden reálný bod dvojný, který nazveme s, anebo jsou obě řady totožné.

V tomto druhém případě procházejí každým bodem $d^{(n)} \equiv e^{(n)} \equiv r^{(n)}$ dvě obecně různé přímky $R^{(n)}$ a $P^{(n)}$ ležící v rovině $\omega^{(n)}$ svazku Q. Z toho jde, že poly všech přímek soustavy R_2 jsou na přímce Q a že tedy soustava tato náleží k druhu 3*a*). Obě plochy λ_2 a ψ_2 dotýkají se v tomto případě dle přímky Q a mají kromě této přímky ještě dvě společné přímky soustavy R_2.

Z přímek soustavy Q_2 náležejí v tomto případě čtyři komplexu; jsou to přímky v rovinách $\pi^{(k)}$. Kdyby ještě některá z přímek Q_2 byla paprskem komplexu, byla by celá tato soustava, tedy i vytčená přímka Q v komplexu (5) a soustava R_2 přešla by v komplexový svazek 2. řádu.

11. Větší rozmanitosť poskytuje případ, ve kterém řady $d^{(n)}\ldots$ a $e^{(n)}$ se nesjednocují. Jest tu rozeznávati následující dvě možnosti:

a) Přímky P' a R' procházející bodem s jsou různé,

b) přímky tyto se sjednocují.

Ve případě *a)* obě plochy ψ_2 a ψ_2 dotýkají se v bodech r a s a mají tedy kromě přímky Q ještě společnou křivku třetího řádu C_3, která prochází body r a s. O této křivce obsahující poly všech přímek R_2 tvrdíme, že prochází všemi body $a^{(k)}$. Abychom to dokázali, myslíme si libovolnou jinou přímku Q' plochy λ_2 a plochu ψ_2' obsahující poly všech paprsků tuto přímku protínajících. Tato plocha musí procházeti křivkou C_3 a protíná tedy plochu ψ_2 ještě v přímce, již nazveme U. Přímka tato jest doplňkem křivky C_3 na C_4. Paprsky mající poly na přímce U protínají mimoběžné přímky Q a Q' a nemůže tudíž přímka U procházeti některým z bodů $a^{(k)}$, neboť by potom paprsky mající na ní své poly tvořily rovinný svazek 1. řádu. Neprochází-li ale přímka U žádným z bodů $a^{(k)}$, musí křivka C_3 procházeti všemi (6), jak jsme tvrdili. Plocha λ_2 náleží v tomto případě ke druhu 3*b)* a má plochu druhu 3 *a)* za plochu doplňkovou.

Čtyři přímky Q_2 procházející body $a^{(k)}$ jsou v tomto případě v komplexu. Kdyby ještě pátá přímka této soustavy byla v komplexu, náležela by mu soustava Q_2 celá (5); křivka C_3, majíc paprsky Q_2 za tětivy, byla by křivkou základní* a plocha λ_2 přešla by v komplexovou plochu kuželovou.

* Tamtéž str. 35.

12. Budeme se nyní zabývati případem 11*b)*.

Uvážíme-li, že přímka P' obsahuje poly všech přímek ležících v rovině $(R'Q)$ a že přímky P' a R' se sjednotí, musíme rozeznávati tyto případy:

α) Určitý od bodu s rozdílný bod r' přímky $R' \equiv P'$ jest jejím polem,

β) každý bod této přímky lze pokládati za její pol,

γ) bod s jest jejím polem.

Ve případě *α)* plochy φ_2 a ψ_2 mají kromě přímky Q ještě společnou přímku R'. Z toho jde, že musí se protínati ještě ve křivce 2. řádu C_2, která obsahujíc poly všech přímek soustavy R_2, prochází body r a r'. Křivka tato nemůže se rozděliti ve dvě přímky, neboť jedna z těch přímek, obsahující poly všech přímek soustavy R_2, musila by procházeti body r a r', tak že by bodem r procházely tři přímky plochy λ_2, t. j. kromě r r' ještě přímky R a Q.

Myslíme-li si kromě přímky Q plochy λ_2 ještě přímku Q' této plochy a plochu ψ_2' k ní příslušnou, musí ψ_2' procházeti křivkou C_2 a protíná tedy plochu ψ_2 ještě ve křivce 2. řádu C_2', která jest doplňkem křivky C_2 na C_4 vzhledem ku přímkám Q a Q'. Soustava R_2' tvořená paprsky, které mají na C_2' své poly, jest doplňkem soustavy R_2.

Každá z křivek C_2 a C_2', tudíž i každá ze soustav R_2 a R_2' prochází dvěma body $a^{(k)}$ a protíná každou z rovin $\pi^{(k)}$ těmto vrcholům protilehlým ještě v jednom bodě, který jest polem přímky náležející soustavě R_2 nebo R_2' a ležící v této rovině $\pi^{(k)}$. Z toho jde, že plocha λ_2 prochází dvěma z vrcholů $a^{(k)}$ a dotýká se stěn čtyrstěnu Δ, které jsou těmto vrcholům protilehlé.

13. Ve případě *β)* musila by býti přímka R' hranou čtyrstěnu Δ, na př. A_{12} Plochy φ_2 a ψ_2 měly by potom kromě přímek Q a R' ještě společnou křivku druhého řádu C_2, která by hranu A_{12} protínala a bodem r procházela. Plochy ψ_2 a ψ'_2 protínají se v tomto případě ve křivce C_2, dále ve přímce A_{12} a tedy mimo to ještě v jisté přímce C_1 soustavy Q_2, která protíná hranu A_{12}. Tato přímka jest doplňkem křivky C_2 a přímky A_{12} na C_4 vzhledem ku přímkám Q a Q'. Poněvadž přímka C_1 z téhož důvodu jako v 11*a*) nemůže procházeti žádným z bodů $a^{(k)}$ a poněvadž hrana A_{12} prochází vrcholy a' a a'', prochází křivka C_2 body a''' a a^{IV}.

Plocha λ_2 prochází v tomto případě vrcholy a''' a a^{IV} a mimo to hranou A_{12}, tedy i body a' a a''.

Ve zvláštním případě křivka C_2 může se rozděliti ve dvě přímky, totiž ve hranu A_{34} a ve přímku Q. Přímka C_1 by v tomto případě protínala i hranu A_{34} a plocha λ_2 procházela by hranami A_{12} a A_{34}.

Doplňková plocha plochy λ_2 dotýká se ve případě *β)* všech rovin $\pi^{(k)}$ a obsahuje jednu, ve zvláštním případě dvě protilehlé hrany čtyrstěnu Δ.

14. Ve případě *γ)* plochy φ_2 a ψ_2 mají společné přímky Q a R', tak že zbývající část jejich průseku musí býti zase 2. řádu. Na této části jsou poly všech přímek soustavy R_2 a musí tedy procházeti body r a r'. Poněvadž ale oba tyto body jsou na přímce Q, musí tato část rozděliti se ve přímku Q a v nějakou přímku $R^{(k)}$ soustavy R_2.

Z toho jde, že plochy λ_2 a ψ_2 dotýkají se v tomto případě dle přímky Q a že řady $a^{(n)} \ldots$ a $e^{(n)} \ldots$ jsou totožné. Přímka $R^{(k)}$ může býti ve zvláštním

případě hranou čtyrstěnu Δ. V tomto případě má doplňková část plochy λ_2 poly své na křivce 2. řádu, která tuto hranu protíná a prochází protilehlými vrcholy čtyrstěnu Δ, kdežto v obecném případě γ) jsou poly doplňkové části plochy λ_2 na křivce 3. řádu obepsané čtyrstěnu Δ.

15. Zbývalo by pojednati nyní o případě, kdy přímky R a P, procházející bodem r, se sjednocují (9 B). Kombinujeme-li však tento případ se všemi případy, které mohou nastati při bodu s, nepřijdeme k novým druhům ploch. Podotýkáme pouze, že případ 12b α) tu nastati nemůže.

Připomínáme také, že jest snadno v každém z vytčených případů dokázati, že plochy tvořené paprsky majícími poly své na uvedených křivkách C_3 a C_2 nebo na přímkách, jsou 2. řádu.

Postavíme-li vždy dva doplňkové druhy ploch λ_2 vedle sebe, máme následující výsledek:

Každá v tetraedrálném komplexu obsažená plocha 2. řádu náleží k některému z následujících druhů:

a) Prochází všemi vrcholy základního čtyrstěnu Δ. — Poly jejich komplexových přímek jsou na křivce 3. řádu obepsané čtyrstěnu Δ.

Zvláštním případem těchto ploch jsou komplexové plochy kuželové.

a') Dotýká se všech stěn čtyrstěnu Δ. Poly jejich komplexových přímek jsou na přímce.

Zvláštním případem těchto ploch jsou komplexové svazky paprsků 2. řádu.

b) Prochází dvěma vrcholy čtyrstěnu Δ a dotýká se stěn těmto vrcholům protilehlých. Poly jejich komplexových paprsků jsou na křivce 2. řádu, která prochází těmito vrcholy.

b') Případ doplňkový poskytne plochy téhož druhu (b).

c) Prochází všemi vrcholy čtyrstěnu Δ a obsahuje jednu z jeho hran, na př. A_{34}. Poly jejich komplexových přímek jsou na křivce 2. řádu procházející vrcholy a' a a'' a protínající hranu A_{34}.

c') Dotýká se všech stěn čtyrstěnu Δ a obsahuje hranu na př. A_{12}. Její komplexové přímky mají poly na přímce tuto hranu protínající.

d) Obsahuje dvě protilehlé hrany. Její komplexové přímky mají poly na přímce tyto hrany protínající.

d') Případ doplňkový vede na plochy téhož druhu.

Každé dva druhy ploch vedle sebe napsaných souvisí spolu též způsobem vytčeným na konci odstavce 3.*

---

* O plochách 2. řádu obsažených v *obecném* komplexu kvadratickém pojednal jiným způsobem Friedrich *Schur* ve své dissertační práci »Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades«. V této své práci užívám k vyšetření ploch 2. řádu v komplexu tetraedrálném jedině vlastností *polů* komplexových paprsků. Pojem »*pol paprsku*« zavedl jsem do theorie komplexu tetraedrálného maje za vzor podobný pojem užitý Reyem pro komplex osový.

O plochách obsažených v komplexu dvojnásobně a o komplexu harmonickém.

16. Vnucuje se otázka, mohou-li se v komplexu tetraedrálném vyskytovati přímkové plochy λ_2, jejichž přímky povrchové obou soustav R_2 i Q_2 náležejí komplexu. Prozkoumáme, ve kterém druhu ploch a ve kterých komplexech tetraedrálných jsou tyto plochy možny.

Z toho, co bylo řečeno na konci odst. 10. a 11., jest zřejmo, že mezi plochami druhu *a*) nebo *a'*) nelze takových ploch hledati, leč bychom za ně pokládali komplexové plochy kuželové nebo komplexové svazky paprsků druhého řádu, v něž by plochy ty přejíti musily. Ve případech *c*) *c'*) a *d*) přímky Q musily by protínati jednu nebo dvě hrany čtyrstěnu A, z čehož jde, že by ležely buď v rovinách $\pi^{(k)}$ touto hranou procházejících nebo procházely vrcholy na této hraně ležícími. V obou případech plocha λ_2 rozdělila by se ve dvě z rovin $\pi^{(k)}$.

17. Zbývá pojednati o případě *b*).

V tomto případě jsou poly všech přímek soustavy R_2 na křivce druhého řádu C_2, která prochází dvěma vrcholy čtyrstěnu A, na př. a''' a a^{IV}. Předpokládejme, že i soustava Q_2 plochy λ_2 jest v komplexu a rozhodněme, na jaké křivce byly by poly této soustavy.

K tomu cíli mysleme si libovolnou přímku R ze soustavy R_2. Všecky paprsky, které R protínají, mají poly na komplexové ploše kuželové, jejíž střed jest v polu r přímky R. Tato plocha obsahovala by tedy i paprsek Q procházející bodem R a protínala by plochu λ_2 kromě ve přímkách R a Q ještě ve křivce 2. řádu C'_2 procházející body a''' a a^{IV} a tato křivka byla by místem polů přímek soustavy Q_2.

Libovolný bod r křivky C_2 byl by potom polem jisté přímky R soustavy R_2 a libovolný bod q křivky C'_2 polem jisté přímky Q soustavy Q_2 a poněvadž každé dvě přímky R a Q jsou v rovině, byla by přímka qr, t. j. každá přímka spojující kterýkoli bod na C_2 s kterýmkoli bodem na C'_2, paprskem komplexu. Z toho následuje, že by každá plocha kuželová mající za střed libovolný bod křivky C_2 nebo C'_2 a druhou z těchto křivek za křivku řídicí, musila býti komplexovou plochou kuželovou. Poněvadž ale každá taková plocha prochází všemi body $a^{(k)}$, musily by křivky C_2 a C'_2 míti takovou polohu, že dvě plochy kuželové, kterými se kterákoli z těchto křivek promítá z bodů a' a a'', procházely by i křivkou druhou. Obě křivky C_2 a C'_2 dotýkaly by se tedy v tomto případě v bodech a''' a a^{IV} rovin π^{IV} a π''' a roviny jejich byly by rovinami π' a π'' harmonicky odděleny.

Rovina π''' protínala by potom plochu λ_2 ve dvou přímkách R''' a Q''' procházejících bodem a^{IV} a rovina π^{IV} ve přímkách R^{IV} a Q^{IV} jdoucích bodem a'''. Přímky R''' a Q^{IV} protínaly by se v jistém bodě l_{12} přímky A_{12} a přímky R^{IV} a Q''' v bodě l'_{12} téže přímky.

Libovolný paprsek R soustavy R_2 protíná roviny $\pi^{(k)}$ v bodech $m^{(k)}$, z nichž body m''' a m^{IV} jsou na Q''' resp. Q^{IV}. Promítneme-li tedy tyto průsečníky na hranu A_{12} rovinami procházejícími hranou A_{34}, obdržíme body a', a, l_{12}, l'_{12}, pro něž platí rovnice

$$(m' m'' m''' m^{IV}) = (a'' a' l_{12} l'_{12}).$$

Je-li Q libovolný paprsek ze soustavy Q_2 a $n^{(k)}$ jeho průsečník s rovinou $\pi^{(k)}$, jest

$$(n' n'' n''' n^{IV}) = (a'' a' l'_{12} l_{12}),$$

poněvadž body n''' a n^{IV} jsou na přímkách R''' a R^{IV}.

Aby přímka Q byla paprskem komplexu, musí býti $(m' m'' m''' m^{IV}) = (n' n'' n''' n^{IV}) =$ charakteristickému dvojpoměru tetraedrálného komplexu,* a tudíž i $(a'' a' l_{12} l_{12}') = (a'' a' l'_{12} l_{12})$, z čehož následuje, že vytčený charakteristický dvojpoměr musil by býti *harmonický*.

18. Komplex tetraedrálný s harmonickým dvojpoměrem budeme jmenovati *harmonickým*. Dle toho, jak tento dvojpoměr jest tvořen, obdržíme při témž základním čtyrstěnu A tři od sebe různé komplexy harmonické.

Označíme-li zase $m^{(k)}$ průsečníky libovolného paprsku R s rovinami $\pi^{(k)}$, obdržíme tyto tři komplexy, je-li buď

$$(m' m'' m''' m^{IV}) = -1, \text{ nebo } (m'' m''' m' m^{IV}) = -1 \text{ anebo konečně}$$
$$(m''' m' m'' m^{IV}) = -1.$$

O prvním z těchto komplexů pravíme, že jest *harmonický pro hranu* A_{12} *nebo* A_{34}, *druhý pro* A_{23} *nebo* A_{41} *a třetí pro* A_{13} *nebo* A_{24}.

Myslíme-li si totiž na př. ve případě prvním body $m^{(k)}$ promítnuty rovinami procházejícími hranou A_{34} nebo A_{12} na hranu A_{12}, resp. A_{34}, obdržíme na této hraně kromě dvou bodů $a^{(k)}$ dva body l a l', které ony vrcholy harmonicky oddělují. Jest totiž

$$(m' m'' m''' m^{IV}) = A_{34}\,(m' m'' m''' m^{IV}) = (a'' a' l_{12} l'_{12}) = -1$$
$$(m' m'' m''' m^{IV}) = A_{12}\,(m' m'' m''' m^{IV}) = (l_{34} l'_{34} a^{IV} a''') = -1$$

a podobně ve druhém případě

$$(m'' m''' m' m^{IV}) = A_{12}\,(m'' m''' m' m^{IV}) = (a''' a^{IV} l_{23} l'_{23}) = -1$$
$$= A_{23}\,(m'' m''' m' m^{IV}) = (l_{14} l'_{14} a^{IV} a''') = -1 \text{ atd.}$$

19. Ačkoliv z odstavce 17. jest zřejmo, že v komplexu harmonickém, na př. pro hranu A_{12} (tedy i A_{34}), jest nekonečné množství ploch 2. řádu, dotýkajících se buď rovin π'' a π' v bodech a' resp. a'', nebo rovin π^{IV} a π''' v bodech a''' a a^{IV}, jejichž přímky obou soustav jsou v komplexu, dokážeme to ještě jiným způsobem.

Budiž C_2 křivka 2. řádu, která prochází body a''' a a^{IV} a dotýká se v nich rovin π^{IV} a π'''. Určeme plochu tvořenou paprsky, jejichž poly vzhledem ku ploše φ_2 (odst. 1.) jsou na C_2. Polárné roviny γ všech bodů křivky C_2 vzhledem ke ploše φ_2 obalují plochu kuželovou 2. řádu, jejíž střed s jest na hraně A_{12} a která se dotýká rovin π''' a π^{IV} ve přímkách sa^{IV} a sa'''. Řada bodů na C_2 jest se svazkem tečných rovin této plochy projektivná, při čemž bodům a''' a a^{IV}

* *Reye* »Geom. der Lage« II. Abth., S 138. (2. Aufl.)

odpovídají roviny π''' a π^{IV}. Poly rovin γ vzhledem ku ploše φ'_2 jsou na křivce 2. řádu C'_2, která prochází body a''' a a^{IV} a dotýká se v nich rovin π^{IV} a π'''. Tato křivka jest skrze onu plochu kuželovou s křivkou C_2 v souvislosti projektivné, při čemž body a''' a a^{IV} oběma křivkám společné jsou samodružné. Z toho jde, že přímky R spojující body spolu sdružené, t. j. paprsky komplexu mající na C_2 své poly, jsou na ploše druhého řádu, která se v bodech a^{IV} a a''' dotýká rovin π''' a π^{IV}. Tyto roviny mají tedy s touto plochou společné přímky R''', Q''' a R^{IV}, Q^{IV} určující na hraně A_{12} body l_{12} a l_{12}'. Předpokládáme-li, že komplex jest harmonický pro hranu A_{12}, jest

$$(a' a'' l_{12} l'_{12}) = -1$$

a každý paprsek protínající R''' a R^{IV}, tedy všecky přímky Q_2 budou v komplexu.*

20. Z odstavce 17. jest též zřejmo, *že harmonický komplex tetraedrálný jest dokonale určen dvěma křivkami druhého řádu C_2 a C'_2, které mají dva společné body a''' a a^{IV} a jsou v různých rovinách.* Čtyrstěn Δ jest při tom tvořen body a''' a a^{IV} a vrcholy a' a a'' ploch kuželových 2. řádu, které křivkami C_2 a C_2' procházejí. Týž komplex určen jest jakoukoli křivkou 2. řádu ${}^{n}C_2$ procházející body a''' a a^{IV} a dotýkající se v nich rovin $a''' a' a''$ a $a^{IV} a' a''$ a křivkou ${}^{n}C'_2$, v níž protínají se dvě plochy kuželové mající body a' a a'' za středy a křivku ${}^{n}C_2$ za křivku řidící. Konečně by byl týž komplex určen každou křivkou 2. řádu K_2 procházející body a' a a'' a dotýkající se v nich rovin $a'' a''' a^{IV}$ a $a' a''' a^{IV}$ a zbývající částí průseku ploch kuželových o řídicí křivce K_2 a středech a''' a a^{IV}.

Z toho vycházejí na jevo věty:

Jsou-li C_2 a C'_2 dvě křivky druhého řádu v různých rovinách o společných bodech a' a a'', dále a''' a a^{IV} středy ploch kuželových 2. řádu těmito křivkami procházejících, jsou

a) spojnice libovolného bodu s v prostoru se čtyřmi body $a^{(k)}$ a dvě přímky, které tímto bodem procházejí a obě dané křivky protínají, na ploše kuželové 2. řádu,

b) průsečnice libovolné roviny σ se čtyřmi rovinami body $a^{(k)}$ určenými a čtyři přímky spojující body $\sigma \cdot C_2$ s body $\sigma \cdot C'_2$ tečnami křivky 2. řádu.

Kdybychom na každou svrchu vytčenou dvojinu křivek ${}^{n}C_2$ a ${}^{n}C'_2$ užili věty *a)*, obdrželi bychom nekonečné množství přímek procházejících bodem s, které by tvořily plochu kuželovou 2. řádu, t. j. komplexovou plochu kuželovou k bodu s příslušnou.

Podobně bychom obdrželi užitím věty *b)* na každou tuto dvojinu v rovině σ nekonečné množství přímek dotýkajících se kuželosečky, t. j. komplexové křivky 2. řádu v této rovině ležící.

---

* Plochy φ_2 a φ_2' určující harmonický komplex snadno se sestrojí; dostačí tu míti na mysli na př., že každá tečna křivky oběma plochám společné jest paprskem komplexu oběma plochami určeného. Lze též snadno dokázati, že, je-li dána plocha φ_2, čtyrstěn Δ a průsek plochy φ_2' s některou z rovin $\pi^{(k)}$, možno jest plochu φ_2' tak určiti, aby s φ_2 stanovila komplex harmonický.

O harmonickém komplexu osovém.

21. Jsou-li plochy q_2 a q'_2 konfokálné, jest čtyrstěn A základním čtyrstěnem každé z těchto ploch; tři jeho vrcholy, na př. a'', a''' a a^{IV} jsou v nekonečné vzdálenosti a čtvrtý vrchol a' jest společným středem obou ploch, hrany A_{12}, A_{13} a A_{14} jsou jejich hlavními osami. Komplex tetraedrálný jest potom tak zvaným komplexem *osovým*.

K určení tohoto komplexu dostačí též jediná z daných ploch, na př. q_2. Je-li totiž ϱ libovolná rovina, r její pol vzhledem k q_2 a R kolmice z něho na rovinu ϱ spuštěná, jest tato kolmice paprskem komplexu. Paprsky tyto vyznačují se tedy tím, že jejich poláry vzhledem k q_2, které jsou jak patrno zase paprsky komplexu, jsou na nich kolmy. Osy rovinných průseků plochy q_2 jsou paprsky tohoto komplexu.

Výsledky, jichž nabyli jsme pro obecný komplex tetraedrálný, platí i o komplexu tomto. Zbývá jen pojednati o tom, jak určiti plochu q_2, aby poskytla *harmonický* osový komplex pro některou z hran A_{ik}. Ukážeme, že lze jeden z hlavních průseků plochy q_2 voliti libovolně.

22. Budiž průsek žádané plochy q_2 na př. s rovinou π''' dán; označme jej H'''. Hleďme sestrojiti plochu q_2 tak, aby osový komplex jí určený byl harmonický

a) pro hranu $A_{13} \perp \pi'''$.

K tomu cíli veďme kterýmkoliv bodem h''' křivky H''' přímku M v rovině π''' tak, aby její úsek obsažený mezi osami A_{12} a A_{14} byl bodem h''' rozpůlen. Každá přímka R vedená bodem h''' v rovině (Ma''') jest paprskem komplexu. Ustanovme poláru R_1 této přímky vzhledem k neznámé dosud ploše q_2.

Tato polára musí býti 1) paprskem našeho komplexu a 2) musí býti v rovině tečné τ plochy q_2 v bodě h'''. Tato rovina tečná jest určena bodem a''' (v nek. vzdál. na A_{13}) a tečnou T křivky H''' v bodě h'''.

Z 1. podmínky vyplývá, že úsek přímky R_1 obsažený mezi rovinami π'' a π^{IV} musí býti rovinou π''' rozpůlen a jelikož tato přímka musí býti v rovině τ, prochází bodem t, který rozpoluje úsek tečny T obsažený mezi přímkami A_{12} a A_{14}. Poněvadž dále komplex, o nějž jde, jest osový, musí býti $R_1 \perp R$, čímž jest přímka R_1 určena.

Jmenujme i a i_1 průsečníky přímek R a R_1 na př. s rovinou π''. Tyto body musí býti spolu sdruženy vzhledem k neznámému dosud průseku H'' plochy q_2 s rovinou π''. Tím však jest tento průsek dokonale určen, neboť prochází průsečníky přímky A_{14} s H''', má přímky A_{13} a A_{14} za osy a body i a i' jsou vzhledem k němu spolu sdružené. Křivkami H''' a H'' jest plocha q_2 určena.

Je-li křivka H''' ellipsou, lze k ní sestrojiti tečnu tak, aby úsek její obsažený mezi přímkami A_{12} a A_{14} byl bodem dotyčným rozpůlen. Vezmeme-li tento bod dotyčný za bod h''', bude každá přímka tímto bodem v rovině τ vedená paprskem osového komplexu, z čehož jde, že tento bod jest pro plochu

φ_2 bodem *kruhovým* a tudíž tato plocha *ellipsoidem*. Je-li H''' hyperbola, nelze k ní sestrojiti tečnu tak, aby její úsek mezi A_{12} a A_{14} byl bodem dotyčným rozpůlen, z čehož jde, že plocha φ_2 nemůže míti v tomto případě v rovině π''' reálných bodů kruhových.

b) Je-li dána zase křivka H''' v rovině π''' a jde-li o to, položiti dle této křivky plochu φ_2 tak, aby osový komplex této plochy byl harmonický pro některou z přímek A_{12} nebo A_{14}, na př. pro A_{14}, vytkněme na H''' libovolný bod h''' a veďme jím v rovině π''' přímku N tak, aby její úsek obsažený mezi h''' a $A_{.4}$ byl průsečníkem s přímkou $A_{.2}$ rozpůlen. Vedeme-li potom bodem h''' v rovině $(a''' N)$ libovolnou přímku R, jest tato přímka vždy paprskem našeho komplexu. K této přímce sestrojíme přímku R_1 způsobem vytčeným v *a*), načež jest křivka H'' a tedy i plocha φ_2 určena způsobem v tomto odstavci popsaným.

Je-li H''' *hyperbola* mající přímku A_{12} za hlavní osu, lze k ní vésti tečnu tak, že úsek tečny obsažený mezi bodem dotyčným a přímkou A_{14} jest osou A_{12} rozpůlen. Bod dotyčný jest potom kruhovým bodem plochy φ_2 a tudíž tato plocha *hyperboloidem dvojdílným.**

23. Z odstavce 20. vychází na jevo, že *harmonický komplex osový určen jest dvěma stejnoramennými, shodnými a stejně položenými hyperbolami, jejichž středy jsou na přímce k rovinám těchto hyperbol kolmé.*

Komplexový kužel k libovolnému bodu s příslušný jest určen rovnoběžkami vedenými tímto bodem s asymptotami daných hyperbol a se spojnicí jejich středů, dále přímkou spojující bod s se středem úsečky obsažené mezi středy obou hyperbol a konečně dvěma přímkami, které bodem s procházejíce obě hyperboly protínají.

Rovněž jest tento *komplex určen dvěma shodnými parabolami o společné ose i vrcholu.* Přímka spojující libovolný bod s v prostoru se společným vrcholem těchto parabol, dále rovnoběžky vedené tímto bodem se společnou osou a s povrchovými přímkami dvou ploch válcových, na nichž tyto paraboly leží, a konečně dvě přímky, které bodem s procházejí a obě paraboly protínají, jsou na komplexové ploše kuželové k bodu s příslušné.

Je-li dán základní čtyrstěn A osového komplexu harmonického na př. pro hranu A_{13}, lze komplexový kužel příslušný k bodu s obdržeti takto:

Sestrojíme bod s' souměrně sdružený s bodem s vzhledem ku ploše π''' a bodem s' stejnoramennou hyperbolu H ležící v rovině $\sigma // \pi'''$ a mající za asymptoty průsečnice této roviny s rovinami π'' a π^{IV}. Hyperbola H jest řídicí křivkou komplexového kužele o středu s.

Nebo sestrojíme bod s'' souměrně sdružený s bodem s vzhledem k rovině π'' (nebo π^{IV}) a v rovině určené tímto bodem a přímkou A_{13} parabolu mající

* Píšeme-li rovnici středové plochy 2. stupně ve tvaru

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = D,$$

jest $2B = A + C$ podmínka, aby osový komplex této plochy byl harmonický pro osu Y.

tuto přímku za osu a bod a' za vrchol. Tato parabola jest řídicí křivkou žádaného kužele.

24. Z odstavce 23. následuje, *jak lze snadno sestrojiti osy průseku plochy* φ_2, *jejíž osový komplex jest harmonický na př. pro hranu* A_{13}, *s libovolnou rovinou* ω. Je-li bod s středem tohoto průseku a přímka P průsečnicí roviny ω s rovinou σ popsanou v odst. 23., jsou žádané osy spojnicemi bodu s s body $\dot{PH}$ (odst. 23.). Uvážíme-li, že obě tyto osy jsou na sobě kolmy a že úsečky přímky P, z nichž jedna obsažena jest mezi asymptotami hyperboly H (čili mezi rovinami π'' a π^{IV}), druhá pak mezi body $\dot{PH}$, mají společný střed m, obdržíme body $\dot{PH}$ takto: Sestrojíme bod m a naneseme od něho v obou směrech na přímku P délku ms. Krajní body těchto délek jsou body $\dot{PH}$.

Touž konstrukcí obdržíme *hlavní tečny* plochy φ_2, je-li bod s bodem této plochy a ω její rovina tečná v tomto bodě.

O systemech paprskových obsažených v komplexu tetraedrálném.

25. Vyšetříme nejprve útvar tvořený paprsky, které mají poly své na ploše n^{ho} řádu φ_n, mající body $a^{(k)}$ za $r_k$násobné.

Mysleme si libovolnou rovinu α. Všecky paprsky v ní ležící mají poly své na jednom z těchto paprsků. Poněvadž paprsek tento má s plochou φ^n n společných bodů, tvoří paprsky mající poly na φ_n *system* $n^{té}$ *třídy*.

Budiž a libovolný bod. Všecky paprsky jím procházející tvoří plochu kuželovou a poly jejich jsou na křivce 3. řádu procházející všemi body $a^{(k)}$. Tato křivka protíná plochu φ_n kromě v bodech $a^{(k)}$ ještě ve $(3n - \Sigma r_k)$ bodech $(k = 1, 2, 3, 4)$, z čehož jde, že vytčený system paprskový jest *řádu* $\mu = 3n - \Sigma r_k$.

O jeho ploše ohniskové. — Mysleme si libovolný paprsek R náležející komplexu. Všecky komplexové paprsky, které jej protínají, mají poly své na komplexové ploše kuželové, která má střed v polu přímky R. Z povrchových přímek této plochy kuželové dotýká se jich plochy φ_n

$$2n\,(n - 1) - \Sigma r_k\,(r_k - 1).$$

Paprsky, mající své poly v nekonečně blízkých bodech plochy φ_n, jež každá z těchto tečen s ní má společné, jsou nekonečně blízké a leží v té rovině tečné plochy ohniskové, která prochází přímkou R. Naopak zase každá rovina tečná plochy ohniskové procházející přímkou R obsahuje dva nekonečně blízké paprsky komplexu, jejichž poly jsou na φ_n a určují tečnu této plochy, která jest paprskem komplexu procházejícím bodem r. Z toho jde, že plocha ohnisková jest *třídy* $2n\,(n - 1) - \Sigma r_k\,(r_k - 1)$.

Abychom ustanovili řád plochy ohniskové, mysleme si k našemu systemu system polárný vzhledem ku ploše φ_2. Poly paprsků tohoto systemu budou na ploše φ_m řádu $m = 3n - \Sigma r_k = \mu$, která transformací vytčenou v odst. 3. odpovídá ploše φ_n; číslo m udává zároveň třídu polárného systemu.

Plocha φ_m bude míti bod a' za $2n - (r_2 + r_3 + r_4) = l_1$ násobný
bod a'' za $2n - (r_3 + r_4 + r_1) = l_2$ » atd.

Mysleme si zase libovolný paprsek R a komplexovou plochu kuželovou mající bod r za střed. Z povrchových přímek této plochy kužclové bude se jich dotýkati plochy φ_m

$$2m(m-1) - \Sigma l_k(l_k - 1),$$

kteréž číslo udává na základě předcházejícího třídu plochy ohniskové systemu polárného a tedy *řád ohniskové plochy* systemu původního.

Z toho jde na př., že *system paprskový, který má poly své na ploše* φ_2 *2. řádu, která neprochází žádným z bodů* $a^{(k)}$, *jest třídy druhé a řádu šestého. Jeho ohnisková plocha jest třídy čtvrté a řádu dvanáctého.*

Je-li daný komplex osovým komplexem plochy φ_2, jest tento system *systemem normál* plochy φ_2 a jeho plocha ohnisková plochou *hlavních středů křivosti plochy* φ_2 čili tak zvanou plochu *desmickou.*

Pro plochu 2. řádu, která prochází každým z bodů $a^{(k)}$ *jednou, jest* $r_1 = r_2 = r_3 = r_2 = 1$, *tudiž třída i řád systemu* $= 2$ *a třída i řád ohniskové plochy* $= 4$.

Plocha tato jest známou plochou *Kummerovou.*

Aby jako v posledním příkladě řád systemu rovnal se třídě jeho, musí býti $3n - \Sigma r_k = n$, tedy $\Sigma r_k = 2n$; potom se také třída a řád plochy ohniskové spolu shodují.

26. Snadno lze také ustanoviti *řád plochy*, na níž jsou poly paprsků systemu $n^{té}$ třídy a μ^{ho} řádu obsaženého v komplexu tetraedrálném.

V libovolné rovině α jest n paprsků tohoto systemu a poněvadž poly jejich jsou na přímce, jest *žádaná plocha* n^{ho} *řádu.*

Mysleme si dále libovolný bod s, jakožto střed komplexové plochy kuželové a křivku C_3 obsahující poly povrchových paprsků této plochy kuželové. Křivka C_3 protíná plochu φ_n ve $3n$ bodech a každý z nich jest polem paprsku, který prochází bodem s. Aby se tento počet redukoval na číslo μ, musí býti body $a^{(k)}$ mnohonásobnými body plochy φ_n. Je-li všeobecně bod $a^{(k)}$ $r_k$násobný, musí čísla r_k vyhověti rovnici $3n - \Sigma r_k = \mu$, tedy $\Sigma r_k = 3n - \mu$.

Je-li třída komplexu rovna jeho řádu, jest jako v odst. 25.

$$\Sigma r_k = 2n.$$

Podotýkám ještě, že komplexu tetraedrálného lze užiti s prospěchem zvláště k vyšetřování vlastností paprskových systemů 2. třídy a jejich ohniskových ploch. Tyto systemy a tedy i jejich plochy ohniskové nabývají zvláštních rázů, jsou-li jejich poly na plochách 2. řádu obsažených v komplexu. Ukáži v jiné práci, jak lze tímto způsobem pojednati jmenovitě o *systemu 2. stupně* a o *ploše Kummerově.*

V Karlíně v únoru 1891.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 4.

CHEMICKO-BIOLOGICKÉ STUDIE.

I.

Dr. BOHUSLAV RAÝMAN a KAREL KRUIS.

(S OSMI TABULKAMI.)

PŘEDLOŽENO DNE 27. ČERVNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Tiskem J. Otty v Praze.

I.

Methody, kterými snažíme se odděliti ze směsi mikroorganismů jednotlivé druhy, v ní obsažené, byly v uplynulém desítiletí tak zdokonaleny, že poskytují správný výsledek s jistotou takměř naprostou. Tvrditi to lze zvláště o návodu Em. Chr. Hansena ku isolování rostlinných mikroorganismů poměrně patrnějších a význačnějších, jako jsou houby, pučením se rozmnožující.

Zdokonalením method těch uvolněna byla dráha nejen botanickému studiu jich vývoje a zanikání, než také chemickému studiu oněch zajímavých processů, které životem některých mikroorganismů jsou podmíněny a které shrnujeme v obecný pojem »kvašení«.

Produkty rozkladu, kvašením různých substratů vznikající, lze patrně s jistotou jen tehdy určitému organismu na vrub přičísti, byl-li ve sterilisovaný substrat hned předem toliko jediný organismus uveden a po celou dobu pokusu cizím organismům přístup vůbec dokonale zamezen.

Jakkoli je zajímavosť i důležitosť takového studia na snadě, přece bylo v té příčině posud ku podivu málo vykonáno, tak že není s dostatek objasněn ani vznik mnohých, skoro pravidelně se vyskytujících produktů nejznámějšího ze všech kvašení, totiž kvašení líhového.

Ještě méně však bylo posud přihlíženo k oněm dalším chemickým proměnám, kterým podléhá prostředí zkvašené, pakli organismus, v něm se vyvinuvší, z prostředí takového nebyl, jako v průmyslu kvasném, po ukončeném kvašení hlavním, odstraněn. Že pak takovéto další proměny mohou býti dalekosáhlými, lze tušiti u mnohých mikroorganismů již ze změny způsobu života, jaká na př. se stává již neozbrojenému oku patrnou při vytvořování se mázder na povrchu tekutin zkvašených. Již dávno jest známo, že takové mázdry na tekutinách zkvašených nepocházejí vždy od jednoho a téhož organismu, nýbrž že i normalné Saccharomycety je vytvořují;* s naprostou určitostí mohla však býti otázka ta teprve po nálezu svrchu dotčené methody rozluštěna a mají tudíž i v té stránce teprve Hansenovy zprávy cenu zajištěného fakta.

Chemismus zkvašeného prostředí, vývojem mázder mikroorganismických podmíněný, jest posud takměř naprosto neznám a tím zajímavější, ježto převážná část mikroorganismů, ne-li všechny, vytvořují, jak badáním novějším bylo objeveno, za daných okolností dotčené mázdry.

* Viz na př. Pasteur, Études sur la bière, zvláště str. 204. a 205.

Odhodlali jsme se ku chemicko-biologickému studiu mikroorganismů a zvolili předem zajímavý tento výjev za předmět svého badání, jelikož se nám naskytl příhodný k tomu material, a dovolujeme si v následujícím podati stručnou zatím zprávu o výsledcích posud získaných.

R. 1885, když praktické výsledky Hansenovy v pivovaru Carlsbergském obecnou byly vzbudily pozornost, vykonal jeden z nás společně se sládkem p. Frant. Chodounským několik pokusů o vypěstování čistého droždí spodního, které bylo po té přeneseno a zkoumáno ve dvou zdejších pivovarech.*

Jedna řada těchto pokusů poskytla v lednu r. 1886 propadlé pivo, které bylo ve vzduchu, organismu takměř úplně prostém (venku po předchozím dvoudenním sněžení) opatrně staženo do pivních láhví sterilisovaných, které potom sterilisovanými zátkami dobře uzavřeny a posléze zapečetěny byvše, uloženy byly do sklepa pivního, kdež byly neporušeny zachovány až do června r. 1890 — přechovávány tedy po dobu $4^1/_2$ roků.

Při jiné řadě pokusů (vykonaných v březnu a dubnu r. 1886) ponecháno několik balonů s čistými kulturami v laboratoriu s veškerým obsahem rovněž až do léta roku minulého. V balonech těchto, které jen as do poloviny jsouce naplněny, přechovávány byly při měnivé teplotě pracovny (v zimě 13 až 17° C., v létě časem až 25° C), vyvinula se záhy po ukončeném kvašení hlavním, pokožka, která zůstala neporušena až do té doby, kdy obsah balonů podroben byl studiu, poněvadž balony ty zůstaly po celou tu dobu v klidu státi.

Takto získáno ke studiu jednak $4^1/_2$leté pivo, jednak mladina, ve které i po ukončeném kvašení, veškeré droždí bylo ponecháno a to na dobu 4 roků při teplotě 13—25° C.

---

* Poněvadž tehdy ještě podrobné vypsání Hansenova postupu nebylo nám přístupno, užili jsme při pokusech těchto, opírajíce se o vlastní hojné zkuženosti, způsobu poněkud odchylného. Zředí-li se totiž při postupu dle methody Dra. R. Kocha rozpuštěná gelatina jedné ze zkoumavek tak, aby obsahovala v sobě jen co nejmenší počet ojedinělých buněk (na ploše desky 170 cm^2 jen až as do 5 kolonií), pak jest pravděpodobnost dokonalého isolování skoro absolutní, zajisté ale ne menší, než ona, kterou poskytuje starší methoda Hansenova na zřeďování se zakládající, kterou, jak povědomo, Hansen první své skvělé výsledky byl získal. Zkušenosti té nabyli jsme z nesčetné řady pokusů se záparami lihovarnickými, ve kterých vedle Saccharomycet vždy shledáváme též bakterie. Při pokusech těchto nikdy nebyla shledána bakterielní infekce v koloniích Saccharomycet a naopak, bylo-li jen zředění dostatečné. I starší tekutiny, o nichž tuto zprávu podáváme, byly tedy zajisté dokonalými kulturami čistými, jakž tomu zejména též nasvědčuje výsledek vyšetřování $4^1/_2$letého piva, níže položený.

Rozumí se samo sebou, že veškeré tekutiny, které později byly zakvašeny a o nichž tuto rovněž zprávu podáváme, jsou čistými kulturami ve smyslu Hansenově, vypěstované dle jeho návodu, který poskytuje, pokud se odloučení jednotlivé buňky týče, naprostou jistotu a tudíž bez odporu jest nejzpůsobilejším. O tom, zdali isolovaný a rozmnožený Saccharomycet jest způsobilým spodním droždím pivním čili nic, rozhodnouti jsme dali tehdy v každém případu přímo pokusu praktickému, zakvasivše při teplotě 6° C větší množství chmelené sterilisované mladiny ve skleněných balonech 10tilitrových a pozorujíce i posuzujíce postup kvašení způsobem v praxi pivovarnické obvyklým. Posudek takto v laboratoriu získaný stvrzen byl ve všech provedených případech praktickým výsledkem v pivovaru.

Jest přirozeno, že nás zajímala otázka: podlehla vykvašená mladina za vytknutých okolností dalším proměnám chemickým a jakým po případě? Jakož i porovnání složení $4^1/_2$letého za teploty sklepní přechovávaného piva s dotčenou vykvašenou mladinou, v níž hojné droždí za příznivější teploty způsobiti mohlo proměny další.

Ku studiu disponovali jsme s 14 litrovými láhvemi $4^1/_2$letého piva a 6 balony s vykvašenými mladinami, mázdrou 4letou pokrytými, z nichž posud 5 podrobeno bylo částečnému studiu. Ve 4 z nich zakvašena byla (v březnu a dubnu 1886) mladina čtverým spodním droždím pivním, v jedné kvasnicemi divokými. Upotřebené odrůdy a race chceme v dalším označovati jakožto: Saccharomyces cerevisiae V, Sacch. cerev. M_1, Sach. cerev. M_2 a Sacch. cerev. M_3. Pro dotčenou odrůdu divokého droždí navrhujeme z důvodů níže označených název (posud ovšem jinému organismu přidělovaný) Saccharomyces mycoderma a budeme jej v dalším tudíž označovati: Sacharomyces mycoderma D. Kromě toho podrobili jsme studiu též sterilisovanou mladinu, která byla po dobu 5 roků přechovávána ve skleněném, proti infekci dobře opatřeném balonu, za těchže okolností, však bez organismu a za přístupu vzduchu jako dotčené mladiny zakvašené.

Postup vyšetřování jmenovaných tekutin byl následující.

Nejprve očkovány platinovým drátkem za šetření všech náležitých opatrností buňky z mázder postupně do sterilisovaných mladin, aby se zjistilo, jsou-li v mázdrách těch posud buňky života schopné. Ve všech případech nastalo pokaždé, kdykoli pokus byl opakován, v očkovaných mladinách kvašení líhové.* Kvasnice, takto z buněk mázder se vyvinuvší, byly jednak vyšetřovány co do své mohutnosti v příčině vytvořování spór a pokožek, jednak rozmnoženy tou měrou, že mohlo jimi býti zakvašeno vždy po několika litrech sterilisované (nechmelené) mladiny.

Saccharomyces cerevisiae M_1 pak vypěstováno bylo z 4leté pokožky až do množství, ve kterém přeneseno byvši do pivovaru pana Dr. Karla Urbana v Praze, sloužilo ku zakvašení 60 litrů obyčejné mladiny chmelené. Pivo v dotčeném pivovaru z těchto kvasnic takto normálným postupem sladovnickým vyrobené podrobeno bylo rovněž studiu.

V láhvích, do nichž r. 1886 stažena byla — jak svrchu udáno — zkvašená mladina po propadnutí, usadilo se na dně něco málo droždí; tekutina nad tímto se nalézající byla úplně čirá. Droždí toto, očkováno byvši do sterilisované mladiny, rovněž vzbudilo kvašení líhové a bylo tudíž živé.

Morfologické proměny vyšetřovaných Saccharomycet seznati lze — pokud byly předmětem našeho badání — z připojených mikrofotografií. Máme za to, že jest mikrofotografická reprodukce vyšetřovaných praeparatů nejspolehlivější zprávou a nejinstruktivnějším obrazem mikroskopického pozorování, a proto jsme zvolili tento způsob zobrazování pozorovaných praeparatů.

* Máme ještě několik ras spodních i jiných kvasnic, které chovány byly rovněž po dobu několika roků v mladinách, vyvinuvše mázdry. Veškeré tyto 4- až 5leté mázdry obsahují v sobě, jak jsme zjistili, rovněž buňky života schopné.

Budiž nám tu předem dovoleno několik slov o způsobu, jakým jsme připojené mikrofotografie získali.

Apparat, jehož jsme upotřebili, zhotoven byl zdejší firmou *Josefa* a *Jana Friče*. Jest to přístroj se známým upravením obyčejného mikroskopu. V polovině tubu však přiléhá kolmo k tomuto vodorovná deska kovová, na kterou lze postaviti neprostupně proti světlu širší tubus pevné, nezměnitelné délky, který v sobě obsahuje přední čočku fotografického aplanatu a na hořením konci uzavřen býti může buď deskou skleněnou, na které se pomocí lupy zastavuje fotografický obrázek, aneb kasetou. Čočka aplanatu jest jen o tloušťku tenkého papíru vzdálena od okularu a mezera ta vyplňuje se olejem lámavosti optického skla. Užíváme přístroje toho již na čtvrtý rok a dobře se osvědčil. Jelikož zůstává vzdálenost desky citlivé od objektivu, resp. okularu vždy tatáž, lze různých zvětšení docíliti toliko různou kombinací objektivu a okularu, i nabývá se u přístroje tohoto určitou kombinací těchto optických částí apparatu vždy přesně téhož zvětšení. Veškeré obrázky, zprávě této připojené, jsou při jednom a témže zvětšení, a sice lineárně 1 : 500 zhotoveny i sloužila nám k jich vyvození kombinace Zeissova objektivu F, okularu č. 3 a přední čočky aplanatu s fokální vzdáleností 27 *cm*.

Veškeré obrázky zhotoveny jsou roztroušeným světlem denním při osvětlení pouhým zrcátkem konkavním a nejmenší clonkou (v průměru 2 *mm*). Brillantních obrázků nabyti lze toliko při silném světle, odraženém od skvělých bílých mraků. Není-li takového světla v době, kdy fotografie zhotoveny býti musí, pak nabýváme sice obrázku, který obsahuje veškeré detaily, avšak nikoli v tak účinném kontrastu jako za osvětlení připomenutého. Avšak i z takovýchto negativů lze přiměřeným sesílením nabyti positivů skvělých, zvláště bylo-li přeexponováno a málo účinnou vývojkou zvolna vyvoláváno.

Aby mikrofotografie odpovídala co nejvěrněji přímo obrázku, jaký se jeví při vyšetřování mikroskopickém, byly zhotoveny fotografované praeparaty zcela tak, jak se upravují k vyšetřování: buňky rozptýleny ve vodě a živé bez všelikého umělého zbarvení ofotografovány. Aby praeparat obsahoval co možná toliko jedinou vrstvu buněk, bylo třeba krycí sklíčko k předmětnému dosti značně přitlačiti. Buňky starší s blanou nabubřelou a protoplasmou hrubě zrnitou při tom často praskly a obsah jich roztrousil se ve vodě; tomu nebylo lze vždy zabrániti. Máme však za to, že okolnosť tato jasnosti a správnosti obrázků našich nikterak není na závadu. Nejlépe lze úkaz ten shledati na fotografii mázdry kvasnic Sacch. cerev. M_1 14 měsíců staré.

Mázdry Saccharomycet normálných (Sacch. cerev. V, pak M_1, M_2 a M_3) měly vzezření zcela takové, jak bylo vypsáno H. Willem (Zeitschr. für das ges. Brauwesen r. 1887 str. 360), mázdra organismu Saccharomyces mycoderma D byla rovnoměrně po povrchu tekutiny bez záhybů rozprostřena a ve vrstvě tenčí než u Saccharomycet normálných.

O postupných proměnách tvaru i obsahu protoplasmatického, jaké bylo lze pozorovati v mladších i starších mázdrách, poučují fotografie: obr. 1. až 8., pak 10. až 12. a obr. 17. (tab. I., II. a III., IV., V. a VII.). Z fotografií těch jest

patrno, že se i tvar i protoplasmatický obsah postupem času mění, až jest ve valné části buněk mázder obsah přeměněn v spóry. Tvar buněk rovněž podléhá proměnám, méně u Sacch. cer. V, více u Sacch. cer. M_1 M_2. Postup těchto proměn jest z počátku nápadnější, později povlovnější. Fotografie buněk mázdry race V po 13 měsících a po $4^1/_2$ letech nasvědčují jen skrovné proměně během posledních 3 let. Nejdalekosáhlejších proměn tvaru shledáváme u organismu Saccharomyces mycoderma D, které jest proměněno v tvary myceliovité po 15 měsících, ještě hojněji po $4^1/_2$ letech, po kteréžto době obsahuje značný počet zřetelně vyvinutých spór.

Mohutnosť spóry vytvořovati shledána u kultur, ze 4letých mázder vypěstovaných, toliko u Sacchar. cer. V a Sacchar. cer. M_1 (zde ne vždycky) u ostatních nepodařilo se nám posud vzdor četně opakovaným pokusům, při nichž jsme se spravovali přesně dle návodu Hansenova, vypěstovati spóry. Jelikož pak Sacchar. cerev. M_2 a Sacchar. cerev. M_3 také ztratily mohutnosť vytvořovati mázdry * kdežto Sacch. cerev. V velmi snadno a pokaždé mázdru vytvořuje a také Sacch. cerev. M_1 v balonu, dne 28. prosince 1890 zakvašeném má povrch tekutiny mázdrou potažený: soudíme z toho, že jest nám tu co činiti s výjevem variace dotčených organismů, jak známa jest z novějších výzkumů Hansenových.

Kvasnice Sacch. cerev. M_1, M_2 a M_3 isolovány byly z téhož droždí pivního. Ačkoli se v jistých vlastnostech nyní konstantně od sebe liší, přece není vyloučena možnosť, že pochází z jednoho a téhož organismu a že dlouholetým pěstováním za nezvyklých okolností individualita jich v částečné variaci došla význačnějšího rozdílu. Zamýšlíme později uvésti i race M_2 a M_3 do normálních poměrů zakvašením v pivovaru a tak pokusiti se o to, aby byly vráceny ve stav původní.

Race M_1 a M_3 stojí si, přihlížejíc k nynějším jich vlastnostem, blíže než race M_2. Obě prvnější po kvašení vždy pevně leží na dně nádoby, kdežto M_2 snadno lze v tekutině rozptýliti. Také protoplasmatický obsah a částečně i tvar za určitých okolností prozrazují týž poměr, jak tomu fotografie tabulky VI. obr. 13. a 15. nasvědčují; kdežto za jiných okolností, na př. v starších koloniích gelatinových nelze M_2 od M_3 rozeznati (viz obrázky 23. a 24. tabulky VIII.). Nápadná jest také proměnlivosť velikosti vyšetřovaných Saccharomycet, jakž jest s dostatek demonstrována našimi mikrofotografiemi.

Vývoj spór u race Sacch. cerev. V byl následující:

	Při 24° C.	za	22 hodin
	„ 15—16° C.	„	6 dní
	„ 8—10° C.	„	13 dní
Mázdra vytvořila se:	při 24° C.	za	8 dní
	„ 14—16° C.	„	16 dní

* Máme v laboratoriu několik balonů Past., s kvasnicemi těmi do normálné mladiny zasetými, které stojí v klidu až i šest měsíců. V balonech s rací M_2 není ani stopy po nějaké mázdře, ani na okraji povrchu u stěn. V balonech s rací M_3 jsou jen nepatrné sledy na stěnách balonu.

Vývoj spór u race Sacch. cerev. M_1 byl tento:

při 25° C. za 22 hodin

„ 16° C. již za 42 hodin některé buňky obsahují v sobě spóry (hojně spór teprve 5. den)

„ 13° C. v některých (nečetných) buňkách za 5 dní.

Organismus, který jsme označili jakožto Saccharomyces mycoderma *D*, isolován byl z obyčejného droždí pivního. Vočkován do mladiny, vzbuzuje líhové kvašení; avšak záhy, kdy ještě tekutina živě kvasí, pokrývá se povrch její mázdrou. Za vyšší teploty (25° C.) objevuje se mázdra již 24 hodin po zakvašení. Jelikož organismus ten, jak níže ukážeme, kvašením vytvořuje značné množství alkoholu a v mázdře obsaženy jsou spóry (jakž tomu připomenuté již fotografie zvláště 4leté mázdry tohoto organismu nasvědčují), jest třeba počítati jej k pravým Saccharomycetám.

Poněvadž pak známý, zvláště Hansenem v gelatinových koloniích charakterisovaný organismus mázder na vykvašených tekutinách se vyskytující správněji Mycoderma (vini atd.) se nazývá, navrhujeme pro veškeré Saccharomycety, již během intensivného kvašení líhového mázdru vytvořující, opuštěné jméno Saccharomyces mycoderma.

Vzezření buněk organismu toho a sice buněk ze dna v kvasící tekutině, jakož i na kavalku sádrovém, v mladých a starých mázdrách znázorňují dotyčné mikrofotografie na tabulce IV., VI. a VII.

Vyšetřováním chemickým zjištěno dosud následující:

Pivo $4^1/_2$ leté.

Pivo z čistých kultur, chované ve sklepě od ledna 1886 v láhvích, bylo v laboratoři otevřeno, i zapáchalo po té dlouhé době velmi příjemně. Pivo je posud čiré i vydrží, jsouc v nedoplněných láhvích v laboratoři chováno, stále o těchto vlastnostech.

Jedna láhev piva toho obětována analyse:

Alkoholu 7·5% $d_{15\cdot5} = 1_{\cdot0284}$

popela 0·29%

těkavých kyselin nebylo; netěkavé kyseliny byly při 100 *cm*³ piva neutralisovány 4,55 cm³ louhu norm. *

glycerinu = 0·1475 *gr* ve 100 *cm*;

veškerého dusíku = 0·1130 *gr*;

nezkvašených uhlohydratů zbylo tolik, co odpovídá 5·08 *gr* dextrosy. Devět litrů piva toho bylo destilováno s parou vodní, destilat zapáchal velmi příjemně. Pivo bylo dlouho chováno, i mohl zápach ten přináležeti aetherům těkavým, ba i těkavé kyseliny mohly býti přítomny. Jest tudíž z opatrnosti přidáno málo roztoku uhličitanu draselnatého ku celému destilatu, a tento byl pak poznovu

---

* 1 *cm*³ norm. louhu jest poměren 0·09 *gr* kyseliny mléčné, i jest zajisté ono množství kyselin netěkavých přiměřeno, vždyť Victoria Stout chová jich 0·526 *gr*, Guiness Stout = 0·523 *gr*, počítáme-li je veškeré jakožto kyselinu mléčnou.

deflegmatorem Lebel-Henningerovým o osmi plateau destilován. I nyní zapáchal nový ten destilat stejně příjemně. Za účelem zmýdelnění možných aetherů vařen jest nový destilat v nádobě o chladiči zpětném za přidání kysličníku barnatého. Po třech hodinách takového varu chladič jest obrácen a tekutina znovu destilaci podrobena. Poslední nyní destilat vysolili jsme pálenou potaší, vyloučenou vrstvu alkoholů vysušili zúplna touže vodu odnímající látkou a isolovali tak 520 gramů tekutiny aromatické, kteráž zápachem připomínala některá přirozená vína. Tekutina byla podrobena zvolné destilaci deflegmatorem Linnemann-Glinsky. První kapky byly zkoušeny na acetaldehyd, nenalezeny však ani stopy, ani žádná jiná nečistota obyčejná (furfurol atd.) nebyla nalezena. Veškerá tekutina těkala mezi $78,_2$—$78,_4^0$ C., v baňce zbyl asi gram oleje, jenž celým destilatům onoho příjemného zápachu dodával. Olej ten sám i poslední kapky frakce $78,_2$—$78,_4^0$ C. (po nové destilaci) nejevily ani stopy reakce na amylalkohol.

Jest tudíž produktem alkoholickým kvašení čistých kultur v uzavřených láhvích i po době *čtyř a půl let ethylový alkohol prostočistý.*

Zbytek z neutralisované tekutiny prvé (pomocí CO_3K_2 nabytý) byl odpařen i shledáno, že *neměl žádných kyselin těkavých.*

Kysličníkem barnatým upravený destilat druhý, jenž měl míti na baryu vázány kyseliny z podezřívaných tam v pivě aetherů těkavých, zkoušen byl po odpaření; ani zde nenalezeny stopy kyselin organických těkavých. Nebyly tudíž aethery příčinou buketu starého piva našeho. Příjemný zápach náležel výhradně oleji, jenž zbyl po rektifikaci vyloučených alkoholů, oleje bylo však pouze málo i nezdařilo se nijak chemicky jej stanoviti.

Kyseliny netěkavé volné byly jen kvalitativně zkoušeny, i postupovali jsme zcela touže methodou, kterou ubírali se pánové *Claudon* a *Morin* studujíce chemické záměny vzbuzené kvašením kvasnicemi eliptickými. (C. R. CIV. 1109.) Z oněch devíti litrů zbytek jest nasycen mlékem vápenným, zředěn málo vodou, po té kysličníkem uhličitým nasycen. Jakmile tekutina ochladla, vylučovaly se z filtratu nezřetelné krystalky solí vápenatých. Ty soli byly na to rozloženy přesně zředěnou kyselinou šťavelovou, a kyseliny vytřepávány opětovně s velmi mnoho aetherem. (Ve zbytku po soli vápenaté třepáno taktéž velmi mnoho aetherem po té, když bylo slabě kyselinou sírovou okyseleno, i zde získány byly syrupovité kyseliny.) Když bylo ono ohromné množství aetheru odehnáno na lázni vodné, zbyl syrup, jenž prostoupen byl hojně krystaly. Ssáním byly krystalky syrupu zbaveny, a překrystalováním ve zcela bílém stavu získány. Pod drobnohledem vypadaly zcela jako kyselina jantarová. Byvše opětovně překrystalovány, tály při 181^0 C., i rozpouštěly se v amoniaku. Sůl amonatá byla vařena tak dlouho, až tekutina reagovala zcela jasně kysele a chlorid železitý s ní dával ssedlinu hnědočervenou.

Po té připravena sůl stříbrnatá:

Ag nalezeno $64{\cdot}_9\%$, $C_4H_4O_4Ag_2$ theor. $65,_1{}^0{}_0$,

čímž kyselina jantarová jest dokázána.

Syrup z krystalků odlisovaný, aetherem znova pojat. Aether zůstavil kyselinu, o jejíž povaze ze soli zinečnaté pochyby nebylo. Sůl jevila se jakožto mléčnan zinečnatý.

Vystihnouti poměr obou těch kyselin jsme se nepokusili.

Kyseliny, zejména mléčnou, chtěli jsme již z původního piva vytřepati aetherem, ale v tom nám velice překážel známý nepříjemný úkaz, tvoření se klků sliznatých, táhlých, objemných, kteréž podle výzkumů pana C. J. *Lintnera* (Wochenschrift für Brauerei 1890. 962) přísluší látce arabinosové. S látkou tou setkali jsme se všude ve všech našich níže vypsaných starých (více jak čtyřletých) vykvašených mladinách. Pokusili jsme se stanoviti látku tu dle method v Tollensově laboratoři vyzkoušených, ba pokusili jsme se též studovati blíže zbytek, v němž obsažen byl glycerin, dextriny, možná i cukry, zejména přihlíželi jsme v posledních látkách uhlohydratových ku zkušenostem Scheiblerovým, avšak ponecháváme si zprávu o tomto na pojednání příští, kdež i o uhlohydrátech kvasnic starých pojednati míníme.

Poměry látek dusíkatých. Podle několikerých rozborů obsahuje pivo naše ve 100 cm^3 0·1130 *gr* veškerého dusíka, dusík ten byl zastoupen v následujících formách:

ve sraženině hydrátem mědnatým (bílkoviny)	0·00590 *gr*	N = 5·2%
„ „ fosfovolframové (peptony) . .	0·00160 „	N = 1·4%
amidy	0·00719 „	N = 6·4%
MgO-em vyhnáno jakožto amoniak	0·00495 „	N = 4·4%

ostatní jest bezpochyby v amidokyselinách a snad též ve složitějších látkách dusíkatých, kteréž sraženy ani MgO-em rozloženy nebyly.

Hledíc k analysám piv třeba vytknouti, že naše pivo mělo pouze ethylový alkohol, žádných těkavých kyselin, a pak buď stopy solí amonatých, aneb snad (viz níže) amidů, kteréž již magnesií pálenou amoniak vypouštějí.

Mladiny, 4 léta s kvasnicemi přechovávané.

Mladina, zakvašená v březnu 1886 čistou kulturou odrůdy pivních kvasnic Sacchar. cerevisiae V., která byla ponechána i s droždím v klidu až do roku 1890 (28/V), byla ve sterilisačním přístroji do sterilisované baňky sfiltrována a filtrat zkoušen následovně: nejprve podroben byl destilaci. Tekutina zapáchala velmi příjemně, zcela jasně po aetherech těkavých kyselin, i destilována jest proudem páry vodní. V tekutině i ve vzduchu nad balonem nalézalo se, navzdor předchozí filtraci, hojně kysličníku uhličitého. Destilat nasycen uhličitanem draselnatým *(A)* až do fenolftaleinové reakce (reakce ta byla prováděna vždy tak, že pápérce fenolftaleinu rozpouštěny v samé tekutině, aby nebyla cizorodě znečištěna) i znova destilováno. Destilat druhý neobsahoval v sobě ani stopy acetaldehydu (reakcí fuchsin-siřičitou), aniž jiné obyčejně líh znečisťující látky; voněl silně po aetherech, reakcí jodoformovou postíženy *jen sledy látky, která pravděpodobně byla ethylalkohol.* Byl tudíž celý destilat (4 litry) vařen v zpětném chladiči s draslem žíravým a po delším varu destilováno opět. Nový destilat *B* jevil nepatrné sledy reakce jodoformové. Zbytek od *B*, chovající v sobě sůl draselnatou z aetherů pocházející, destilován byl se zředěnou kyselinou sírovou. Destilat byl kvantitativně nasycen louhem barnatým a smísen

s přiměřeným množstvím* roztoku dusičnanu stříbrnatého i vařen s ním na zpětném chladiči. Vylučovalo se práškovité stříbro a tekutina sehnaná vyloučila našedivělou sůl stříbrnatou, celkem 0·1784 *gr*. Ze soli té vypálením v tyglíku zbylo 0·0948 *gr* Ag, 53·14% Ag, valeranu stříbrnatému přiměřené množství Ag jest 51·7%.

Ač veličina ta nesouhlasí přesně, přece lze považovati podle dalších výsledků *aether ten za směs mravenčanu a valeranu. ethylnatého.* Destilatu prvého zbytek *A*, jenž v sobě choval pouze soli draselnaté těkavých kyselin, a nic těkavého (aldehydy atd. v sobě tajiti nemohl), byl zředěn na dva litry, okyselen kyselinou solnou a tak destilován, že za každý osmý díl v jimadle nasbírané tekutiny přidáno čtvrt litru vody do baňky destilační. Veškerých osm frakcí (mimo druhou) bylo přesně titrováno, ku každé z nich přidáno dusičnanu stříbrnatého, a každá byla pak v zpětném chladiči vařena tak dlouho, dokud se stříbro vylučovalo. Ob čas neutralisováno amoniakem a opět přidáno něco NO_3Ag. V prvém destilatu (nejsilněji kyselém) vznikla za přidání dusičnanu stříbrnatého zažloutlá sedlina, která ihned černala zahřetím. Druhá frakce přeměněna v sůl rtuťnatou, i procházela při zahřívání všemi známými stadiemi až vylučovala rtuť, jak to činí kyselina *mravenčí.*

Roztoky v oněch sedmi baňkách, ač původně zneutralisované, zapáchaly za varu s roztokem dusičnanu stříbrnatého charakteristicky po kyselině valerové I dlužno sobě rozklad solí stříbrnatých představiti takto:

$$2CHO_2Ag = Ag_2 + CO_2 + CH_2O_2$$

$$C_nH_{2n-1}O_2Ag + CH_2O_2 = CHO_2Ag + C_nH_{2n}O_2$$

a dále ihned opět rozklad podle rovnice prvé. Jelikož by kyselina mravenčí ze soli své stříbrnaté vyloučená kvantitativně vyháněla kyselinu druhou, a sama mimo to by vyloučila varem ze soli své stříbra, což odpovídá sestupné řadě následující:

$$CHO_2Ag = Ag + \frac{CO_2}{2} + \frac{CH_2O_2}{2}$$

$$\frac{CHO_2Ag}{2} = \frac{Ag}{2} + \frac{CO_2}{4} + \frac{CH_2O_2}{4}$$

tudíž odpovídalo by

$$CH_2O_2 \text{ součet} = Ag + \frac{Ag}{2} + \frac{Ag}{4} \ldots = Ag_2$$

jest patrno jednak, že bylo by lze z množství stříbra i z volné kyseliny druhé** destilací vystižené, vypočísti kyselinu mravenčí samu.

---

* t. j. vyšším než kvantitativným množstvím, viz příčinu toho níže.

** Kyselina mravenčí jeví se v chemických reakcích i podle měření afinitných nejsilnější kyselinou mastnou. *Lieben* (Monatshefte für Chemie I. 924) nalezl, že kyselina mravenčí a octová rozkládají chlorid vápenatý v roztoku silněji než kyseliny vyšší mastné. Totéž vyplývá ze měření rychlostí reakčních, i z elektrických vodivostí, kdež vynikají veličiny kyselině mravenčí svědčící nápadně nad příslušné veličiny afinitné homologů její. Jak zvláštním pokusem bylo zjištěno, rozkládá se též sám valeran stříbrnatý, byl-li v jistém zředění z valeranu nějakého i NO_3Ag připraven a dlouho vařen.

Avšak veličiny počtem vystižené nejsou shodné, množství pak obou kyselin byla tak minimálná, že zákonitost nemohla býti přesně vystižena. Sůl stříbrnatá druhé kyseliny, dosti nesnadno rozpustná, byla:

ve frakci I. 0·1895 *gr* soli zanechalo 0·0983 *gr* Ag = 51·8%
„ „ III. 0·1381 „ „ „ 0·0714 „ Ag = 51·7%
„ „ IV. 0·2184 „ „ „ 0·1141 „ Ag = 52·1%

valeran stříbrnatý vyžaduje 51·69% Ag.

Ku bližšímu důkazu byla veškerá sůl zbylá elementárně zanalysována:

0·3213 *gr* vysušené soli poskytlo na loďce 0·1668 *gr* Ag
a 0·3369 *gr* CO_2 = 0·0919 *gr* C
0·1272 *gr* H_2O = 0 01413 *gr* H

z čehož vyplývá složení té soli:

		$C_5H_9O_2Ag$ theor.
uhlíka . . .	28·6%	28·7%
vodíka . . .	4.4%	4·3%
stříbra . . .	51·9%	51·7%
kyslíka . .	15·1%	15·3%

a proto jest solí *kyseliny valerové*, pomíšené snad s malým množstvím soli stříbrnaté nějaké kyseliny nižší (soudíc ze stříbra frakce *čtvrté*). O povaze té kyseliny valerové viz níže posudek.

Veškeré kyselinou mravenčí vyloučené stříbro, celkem as 0·65 *gr*, neobsahovalo, jsouc po oxydaci zkoušeno, *ani stopy síry* (na rozdíl od níže uvedených úkazů při *pivě* z téže kultury). Vážením soli stříbrnaté odhadnuto množství kyseliny valerové na 0·48 *gr* (v 4·95 litrech tekutiny), i zbývá z dat původních titračních pro kyselinu mravenčí 0·13 *gr*. Jelikož poměry molekulárných vah $CH_2O_2 : C_5H_{10}O_2 = 46 : 102$ jsou jiné, než jak zde nalezeno, máme za to, že obě ty kyseliny nevznikly oxydací organismem způsobenou z molekuly o šesti atomech uhlíka, nýbrž spíše že pocházejí z různých dvou reakcí.

Veškerých těch kyselin jest poměrně málo, tak že zajisté přihlížejíc ku známým tabulkám Nadiny *Sieberové* (J. pr. Chem. 1879 č. 9. a 10.) a *Maerkera* (Zeitschr. f. das ges. Brauwesen 1881 str. 459.) ku platnosti antiseptické nepřicházejí.

Poměry dusíkové nebyly studovány, poněvadž byl material k jiným účelům spotřebován.

Filtrací mladiny, o níž právě zpráva byla podána, získané kvasnice byly nejprve sterilisovanou vodou promyty, odfiltrovány, voda zkoumána, kvasnice sušeny povlovně na vzduchu a pak až do 110° v sušárně.* Vody mycí zapáchaly nad míru příjemně. Kvasnice vysušené byly z části aetherem, z části chloroformem extrahovány, částečně ve stavu, jakém byly elementárně analysovány. Výslaz aetherický obsahoval v sobě příjemně páchnoucí tekutý tuk, jenž vylučoval malinké množství jehliček krystalových, na jichž určení nebylo pro skrovné jich množství ani pomyšlení. Tuku bylo 7·5%.

---

* V proudu dusíka plynného.

Elementárné analysy kvasnic neextrahovaných:

I. (CrO_4Pb-ým) 0·2722 *gr* látky = 0·1891 *gr* H_2O = 0·02101 *gr* H_2 (7·7%)
= 0·5646 *gr* CO_2 = 0·1539 *gr* C (56·5%).

II. (CuO-ým) 0·2401 *gr* látky dalo = 0·0034 *gr* popela,
0·1707 *gr* H_2O = 0·0188 *gr* H_2 (7·8%)
0·5102 *gr* CO_2 = 0·1391 *gr* C (57·9%)

III. 0·2818 *gr* látky spáleno, 8·3 cm^3 N při 21°C 723·7 *mm* tlaku
= 0·009218 *gr* dusíka = 3·2% N.

IV. Dle Kjeldahlovy methody v 1 *gr* kvasnic = 0·0318 *gr* N
v 1 *gr* kvasnic = 0·0316 *gr* N.

V. 0·9637 *gr* látky dle methody Hamarstenovy* ϴS.

VI. 0·6044 *gr* látky dusičnou kyselinou oxydováno ϴS.

VII. 1·3152 *gr* látky zanechalo 0·0132 *gr* popela 1·01%.

	Analysy				Dumas	Mulder	Mitscherlich	
uhlík	56·5	57·9			50·6	50·8	47·0	po odečtení popelů
vodík	7·7	7·8			7·3	7·2	6·6	
dusík	3·2	—	3·18	3·16	15·0	11·1	10·0	
síra	ϴ	ϴ	—	—	27·1	30·9	0·7	
kyslík	—	—	—	—			35·8	
popel	1·61	1·4			—	—	—	

Popel udává p. *Thausing* na 6·2—7·2%.

Později byly i staré kvasnice i ze Sacch. cerevisiae M_1 M_2 (celkem 98 *gr*) chloroformem extrahovány i poskytly příjemně páchnoucího tuku 6·04 *gr* tekutého. Nápadné to množství tuku, jenž jevil se i na filtrovacím papíře, na němž kvasnice byly sušeny a jenž silně vynikal pod mikroskopem, srovnává se dobře s náhledy *Pasteura*** i *Nägeliho*, kteříž vytvořování se nadbytečného tuku uváděli v souvislosť se živější respirací (oxydací volným kyslíkem). Obtížnější jest vysvětlení tak nápadné deprese dusíka i toho, že síra aneb vůbec zmizela, aneb byla na minimum analyticky stanovitelné snížena podílem svým. Mladší buňky obsahují ovšem méně tuku a jsou bohatšími popelem i bílkovinou, starší pak, dle posavadných zkušeností jsou tučnější a bohatší celulosou (spíše snad vůbec uhlohydraty?).

Nápadně nízké množství dusíku vysvětlili jsme sobě teprv při pochodech ostatních našich organismů i tam k věci té blíže přikročíme, tam buďtež umístěny taktéž i studie o invertivné mohutnosti kvasnic těch. Tolik jen zde, že v našich kvasnicích starých klesl dusík na nejnižší stupeň, až pod onen v houbách, jediný *Cantharellus* obsahuje též 3·2% dusíka.

---

* Síra stanovena tavením žíravým draslem a ledkem za veškerých oněch kautel, kteréž jsou pečlivě vylíčeny: *Hammarsten* (Zeitschr. fysiol. Chem. VII. 257), *Bunge* a *Zinovsky*. Disertace Dorpat 1885. Zeitschr. fysiol. Chemie X. 16.

** *Pasteur* přičítá tuku mycoderma vini mohutnost, že drží splývající na povrchu pokožku, a nedovoluje jí klesnouti pod hladinu I zde tuk souvisel by s oxydačnou mohutností. *Pasteur*. der Essig překlad něm. od *Bergmanna* 1878. str. 66 poznámka dole a 101.

Tyto staré kvasnice živé (Sacch. cerev. V.) vočkovány byly ve sterilisovanou mladinu nechmelenou 16° S. v balonu Pasteurově obsaženou. Mladina ta kvasila v laboratoři od 7/XII—28/XII 1890 při temperatuře 13—17° C. Celá složitá destilace byla provedena opět tak, jak vypsáno jest při mladině zkvašené staré. Destilat nasycen byl opět uhličitanem draselnatým i neshledány v něm aethery nižádné; druhý destilat ze solí draselnatých obsahoval v sobě dle hutnosti své 5·2% alkoholu. (Jelikož jsme mezi tím učinili podivných zkušeností se Saccharomyces mycoderma *D*, pátráno v alkoholu po amoniaku a těkavých amidech, nenalezeny však žádné.) Destilat zbaven byl kyselin těkavých, vysušen a množství jeho celé 243·7 *gr* deflegmatorem rektifikováno. Celý destilat přecházel přesně v hranicích bodu varu *ethylového alkoholu*. Jelikož však běželo o to, není-li zde snad nějakého aetheru v těchže hranicích asi vroucího aneb snad (hledíc k té okolnosti, že mladina byla nechmelena) sledy amylového alkoholu (*Vothnagel* a *Rossbach*), byla první frakce (několik centimetrů tekutiny) podrobena stanovení hutnoty par podle methody A. W. *Hofmannovy;* poslední frakce zkoušena na alkohol amylnatý.

Frakce I. byla v *Hofmannově* vakuu jen obvyklý čas nade rtutí ponechána (I) a pak po druhé dlouho zde držána (II):

I.	II.
látky . . . . = 0·0931 *gr*	látky = 0·0665 *gr*
barom. . . . = 754·2 *mm*	744·5 *mm* (při 21° C)
volné páry . = 99·02 *cm*³	88·8 *cm*³
temp. rtuti . = 25° C	21° C
sloupce rtuti = 116·3 *mm* při 99·6°	193 *mm* při 99·6° C
106·7 *mm* při 26°	110 *mm* při 21° C
d = 1·417	d = 1·351
mol. v. = 41·03 (C_2H_6O = 46)	mol. v. = 39

Mol. váha jest mnohem nižší, než jakou vyžaduje ethylový alkohol, příčina byla ihned patrna, veškerá rtuť i stěny trubky kalibrované byly pokryty sirníkem rtuťnatým. V alkoholu nalézala se patrně nějaká sloučenina sírná, kteráž ztrátou své síry proměněna jest v látku nižší váhy molekulárné. I byl proto celý alkoholický destilat znovu velmi zvolna destilován, a první třetina smíšena se sublimatem. Jen v té třetině objevil se zákal *bílý*, jenž po dnes barvu svoji nezměnil, ostatní dvě třetiny reakci tu nejevily. Musí býti síra v látce té jakožto organický sírník, z jehož bodu varu však nechceme ničehož o jeho povaze bližší uzavírati, vědouce, že větší molekulárná váha sírníku vynikne na úkor destilace nad molekulárnou váhu alkoholu i níže těkajícího než jest bod varu, příslušný sírníku.

Poslední kapky destilatu zkoušeny konc. H_2SO_4, za přidání ledové kyseliny octové a síranu železitého na alkohol amylnatý. Ač teploměr při úzkostlivé destilaci frakciované ani nad 78·5° nevystoupil, byly přece v posledních centimetrech destilatu pozorovány: ono intensivné zabarvení violové charakteristické i absorpční pás, jak naznačen jest ve *Vortmann's*: Anleitung zur chemischen Analyse organischer Stoffe (tab. VII.). Jsou pak zajisté sledy amylalkoholu

pranepatrné, a udržíme případ ten v evidenci, vždyť kvašeno bylo při temperatuře proti obvyklé poněkud vyšší.

Zbytek uhličitanem draselnatým zneutralisovaný byl smíšen s roztokem dusičnanu stříbrnatého, sedlinka rychle žloutnoucí při slabém zahřetí již vylučovala hojné práškovité stříbro: bezpochyby *kyselina mravenčí.* Mimo to zápachem svým upomínaly páry vodní jakousi kyselinu mastnou vyšší, my ji však vystihnouti neuměli. Vyloučené stříbro oxydováno jsouc bromem, prokazovalo mezi produkty *kyselinu sirovou,* obsahovalo tudíž také *síru.* Alkoholu a těkavých kyselin zbavená tekutina byla opět v původní objem doplněna ($d_{15\cdot5} = 1\cdot0245$) i obsahovala ve $100\,cm^3$:

kyselin netěkavých, co jich odpovídá $4\cdot24\,cm^3$ normálného louhu
uhlohydráty nezkvašené $= 4\cdot15\,gr$ dextrosy
poměry dusíkové: $0\cdot1028\,gr$ dusíka vůbec, z toho
$0\cdot00616\,gr$ dusíka náležejícího amidům
$0\cdot00502\,gr$ dusíka, jenž MgO se odštěpil jakožto amoniak.*

Při pivě tom jest nápadna síra, která se všude jevila, však ve staré vykvašené tekutině obsažena nebyla v tak labilné formě, možná, že byla ve staré zkvašené mladině úplně v sírany oxydována.

Staré zkvašené mladiny, jež byly r. 1886 zakvašeny kvasnicemi Sacch. cerev. M_1 M_2 M_3, byly studovány týmže způsobem. Původní mladina se Sacch. cer. M_1 měla koncentraci S 15°. V destilatu nalezen byl ethylalkohol, kyseliny: mravenčí i valerová, celkem na jeden litr destilatu (stejný objem s původní tekutinou) spotřebováno $13\,cm^3$ naší vody barytové ($1\,cm^3 = 0\cdot005615\,gr$ HCl). Ze všech organismů M jeví M_1 nejmenší oxydačný effekt v tom směru. Netěkavé kyseliny rovnají se $5\cdot2\,cm^3$ louhu normálného.

Poměry dusíkové ve $100\,cm^3$: veškerý dusík $= 0\cdot0971\,gr$
z toho bílkoviny (hydratem mědnatým) $= 0\cdot0083\,gr$ N
peptony (fosfowolframová sedlina) . . . . $= 0\cdot0032\,gr$ N

MgO vyhnal ze zbytku $0\cdot0186\,gr$ dusíka jakožto amoniak, jest tudíž v té nejslabší formě *19·1% veškerého dusíka.*

Ze staré mladiny té, zakvašené Sacch. cer. M_1, stará pokožka poskytla pěstěním kvasnice, jimiž kvasila nová mladina v balonu Pasteurově (od 28/XII až do 25/I 1890) při temp. 13—16° C. v laboratoři. Zápach zkvašené mladiny té byl velmi příjemný, aethery ovocné připomínající, velmi silný. Alkoholický po neutralisaci uhličitanem draselnatým zjímaný destilat vařen byl s kysličníkem barnatým, i zanechával v destilační nádobě sůl, kteráž jsouc rozkládána dusičnanem stříbrnatým a povařena, vylučovala hojně stříbra, síry úplně prostého, z čehož soudíme na přítomnost kyseliny *mravenčí*; kromě toho zbylo málo soli bílé stříbrnaté $0\cdot0283\,gr$, kteráž po mírném žíhání zanechala $0\cdot0145\,gr$ stříbra $= 51\cdot2\%$; z čehož možno uzavírati, že v alkoholu jsou obsaženy aethery kyseliny *mravenčí* a *valerové.*

---

* Při zahřívání celého piva (neporušeného — o veškerém dusíku) s kysličníkem hořečnatým čerstvě vypáleným prchal mimo amoniak hojně *sirovodík.* Úkaz ten pozorován jen při tomto organismu V.

Kyselin volných bylo velice málo, a jen kyselina mravenčí byla dle redukce soli stříbrnaté zjištěna. Zajímavá jest rychlá aetherifikace v mladině té. Alkoholy jsou vyloučeny, vysušeny; 220 *gr* (ze 4·5 litrů piva) pak bylo zcela zvolna destilováno. Pouze ethylalkohol byl přítomen, aldehyd žádný neshledán. Poslední alkoholický destilat proměněn byl jodem a bílým fosforem v jodidy, ty byly sušeny a destilovány. Celý podíl těkal při 71·9°, tedy poblíž bodu varu ethyljodidu. My však víme, že není tím celý alkohol proměněn v jodid, a nejsou nám známy zákony o závislosti mezi tím jodováním i tíží radikalů alkoholických, i byl tudíž zbytek chloroformem vytřepán a provedena zkouška na amylový alkohol. Skutečně i zde objevila se nepatrná, ale přece jasná reakce na alkohol ten, jehož tam musily býti sledy pranepatrné.

Filtrat mladiny (zbavené pokožky kvasničné), zakvašené r. 1886 v březnu *kvasnicemi Sacch. cer.* M_2, destilován. Destilat poskytl silnou reakci jodoformovou, amylového alkoholu nenalezena ani stopa. Ethylalkohol však nebylo možno vyloučiti jakožto vrstvu, skoro všechen byl během čtyř let zoxydován. Těkavých kyselin nalezeno množství $1^1/_2$násobné u porovnání s mladinou obsahující Sacch. cer. M_1, a sice byly to kyseliny mravenčí opět i valerová. Kyselin netěkavých (z tekutiny zkvašené, těkavých součástí prosté $d_{15\cdot5} = 1\cdot0370$) bylo tolik, co přísluší 5·4 cm^3 normál. louhu.

Veškerý dusík ve 100 cm^3 jest 0·1184 *gr*

dusík bílkovin	0·0079 *gr*
dusík peptonový	0·0015 *gr*
dusík amidový	0·00357 *gr*
dusík látek, kteréž $MgO\text{-}NH_3$ odštěpily	*0·0276 gr*
dusík zbývající amidokyselinám a j. . .	0·0779 *gr.*

Zkvasitelný material zkvašen až na uhlohydraty, kteréž ve 100 cm^3 počítány jakožto dextrosa vydají 2·92 *gr.*

Filtrat mladiny zakvašené r. 1886 kvasnicemi *Sacch. cer.* M_3. Shledáno bylo dvakráte tolik těkavých kyselin co u produktu kvašení kvasnic Sacch. cer. M^1. Těkavé kyseliny rozděleny na deset frakcí, i zkoušeny frakce I. a IV. Obě obsahovaly tytéž kyseliny, jak už dříve nalezeno: *mravenčí* i *valerovou.* Za příčinou poznání kyseliny valerové co do konstituce její, odkudž bylo by lze původ její odhadnouti, byly veškeré zbývající frakce zneutralisovány a sehnány. Soli barnaté tam obsažené prováděly zajímavé změny. Fenolftaleinové zabarvení ku neutralisaci použité mizelo, když roztok chvíli na vzduchu stál, i vylučoval se ponenáhlu uhličitan barnatý a tekutina zapáchala po volné kyselině valerové. Sůl barnatá byla kvantitativně rozložena kyselinou sírovou, tekutina kyselá zdestilována a destilat nasycen kvantitativně hydratem sodnatým. Zde byla hra barvy zcela opačná, okyseleno-li slabounce kapičkou kyseliny nějaké minerálné a tekutina odbarvena, zčervenala na to ve krátké době, když kysličník uhličitý sodnatou sůl kyseliny mastné rozložil. Fenolftaleinnatrium se patrně vyššími kyselinami mastnými nerozkládá. Kyseliny valerové bylo ovšem velmi málo, i nevylučovala se ani sůl její vápenatá ani manganatá určitě při zahřátí roztoků jejich. Z tohoto negativného se chování není ovšem určitě

konstitucc dokázána, ale zdálo by se přece, že kyselina ta valerová není asi normálnou.*

Oddestilovaný alkoholický podíl, jenž měl sledy ethylalkoholu, byl chloroformem vytřepán a vodný výslaz okysličován směsí dvojchromanu draselnatého a zředěné kyseliny sírové. Nenalezena ani stopa kyseliny valerové, ač frakce s vodou vydestilované opatrně byly zkoušeny. Acetaldehyd prozrazoval přítomnost (při reakci podobné s tekutinou hlavní provedené) — alkoholu ethylnatého.

Kyselin netěkavých bylo ve 100 cm^3 tolik, že sytily 4·47 cm^3 louhu normálného. Toto permanentní číslo, které se ustavičně vrací za nepatrného kolísání, jest důkazem, že ve výborném tom živném ústředí nebylo nižádných kvasidel kyseliny netěkavé (mléčnou) tvořících, i jest též do jisté míry kontrolou čistoty našich kultur. Dále vidno, že ani po letech mléčná a jantarová kyselina v těch ústředích se nemění.

Stará ta zkvašená tekutina, která jevila hutnosť 1·0415 při 15·5° C, obsahovala nezkvašených uhlohydratů tolik, co obnáší 3·34 *gr* počítáno jako dextrosa.

Poměry dusíkové: 0·1260 *gr* dusíku ve 100 cm^3.

dusík bílkovin 0·0067 *gr*
dusík peptonů 0·0028 *gr*
dusík amidový 0·0066 *gr*
dusík jakožto NH_3 magnesií vyhnaný 0·02403 *gr*.

Čerstvě vypálený kysličník hořečnatý vyhnal po sražení veškerých forem rozložitelných magnesií i jiných 19·05% veškerého dusíka jako amoniak.

Soudíme-li z pokusů těch, které uvedeny byly, jest zajisté nápadno, že veškeré ty staré tekutiny obsahují tak málo alkoholu ethylového a žádný alkohol amylnatý.

Ačkoliv i ze zředěných vodných roztoků alkoholických, jak pokusy jsme se přesvědčili, po letech dosti alkoholu prchne, nelze zde jinak za to míti, než že alkohol ethylový organismem mázdry byl povlovně okysličen v kysličník uhličitý a vodu. Jelikož v pivě (po šest let chovaném), které kvasilo i chováno po celou dobu při obvykle nízké temperatuře, nebylo možno nejjemnějšími methodami žádného amylového alkoholu vystihnouti, odpadá možnosť, že by zde alkohol ten byl mohl ethylalkohol zprovázeti. Prapepatrné sledy amylalkoholu nalezeny byly pouze v pivech v laboratoři při poměrně vyšších teplotách (13—16° C) kvašených. *Lindet* (C. R. *112*, 102, 663. ref. *Wochenschrift für Brauerei* 1891, 260 a Berl. B. XXIV. 303, 357) má za to, že vyšší alkoholy vznikají tehda, když kvasnice největší část cukru byly zkvasily, z uhlo-

---

* Leucin okysličuje se, jak jsme dokázali velmi aktivnou černí platinovou v kyselinu valerovou, a jelikož *E. Schulze* a *A. Likiernik* (Berl B. XXIV. 669) dokázali, že leucin z bylinné bílkoviny pocházející jest α amidoisobutyloctová kyselina

$$=\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}> CH\cdot CH_2\text{-}CH(NH_2).CO_2H$$

byla by souvislost naší isovalerové kyseliny s bílkovinou výslazu ječmenného možná.

hydratu jich vlastního těla snad za pomoci jiných organismů, jichž činnosť byla za průběhu samého kvašení utlumena. Našimi analysami jest tolik zjištěno, že kvasnice samy ani po letech tak neučinily, neboť v láhvích pivních byly na dně kvasnice živé, ač jen v skrovné míře. Otázka ta zasluhuje bližšího prozkoumání, neníť výsledek páně Lindetův nijak definitivní. Myslíme, že podaří se nám později problemu toho se dotknouti, až přistoupíme ku kvasnicím lihovarnickým, jichž máme více variet isolovaných, zejména při kvašeních za temperatur značně vyšších.

Co do hranice kvašení musíme oznámiti, že jsme pokoušeli se několikráte po odstranění látek dusíkatých dextriny podle způsobu *Scheiblerova* osmosou odděliti od možných cukrů snad ještě zbylých, avšak nepodařilo se nám nikdy extrakcí alkoholem isolovati cukr. V tekutinách více než pět let s kvasnicemi ve styku se nalézavších zbyly uhlohydraty, kteréž silně Fehlingovu tekutinu redukovaly, kteréž i s činidlem fenylhydrazinovým poskytovaly ssedliny, avšak krystalických cukrů isolovati nijak odtud se nepodařilo. Znamenitými pracemi Scheiblerovými mezi tím vyšlými mnohé nyní se nám vysvětluje, však my přece uhlohydraty ony zbývající podrobíme studiu.

Velmi nápadné byly dvě okolnosti: že se vyskytly nejen ve starých vykvašených tekutinách, nýbrž i v čerstvých pivech vykvašených v laboratoriu při 13—16° C kulturami ze starých mázder kyselina mravenčí i valerová a po případě i jich aethery. V pivech čerstvých i starých za *chladu vykvašených i chovaných* kyselin těch nebylo. Mimo to jsou nápadny proměny v dusíkatých poměrech, vytvoření značných množství solí kyselin organických amonatých, málo amidů, za to však nejvíce amidokyselin!

Procesy, kterými vznikly ony kyseliny, považovali jsme za pochody oxydačné, i bylo na snadě odvozovati obě kyseliny z molekuly uhlohydratové; vždyť obě ty kyseliny mravenčí i valerovou získal zajímavým způsobem *Loew* (Berliner Ber. XXIII. 866), když byl vodný roztok dextrosy okysličoval černí platinovou velmi účinnou. Co se týče aetherů ve starých vykvašených tekutinách s mázdrou, nepovažovali jsme věc za tak palčivou, aniž jsme myslili že nutno přibrati velmi důvtipné* hypothesy *Nägeli-ho* (Theorie der Gährung 1879, str. 21 a násl. a str. 228); průběhem času zaestherifikovaly se kyseliny vynikající s alkoholy přítomnými a tak zcela vznikly asi naše aesthery, jak nalezl *Wislicenus* (Lieb. Am. *125*·70 i *133*·274) při acetylomléčnanu ethylnatém

$$CH_3 . CH(O) . CO_2 C_2 H_5$$

$$C_2H_3O$$

* Velmi nápadné jsou ve přírodě vysky tující se aesthery o témže počtu atomů uhlíku v kyselém i alkoholickém radikálu: skořican skořičnatý, aether kyseliny angelikové a tyglinové s amylalkoholem, palmitan cetylnatý atd., kteréž mohly vzniknouti oxydací poloviny své nynější molekuly a sloučením ve stavu zrodu. My ostatně víme velmi málo o vitálné oxydaci; což není nápadné společné vyskytování se látek

$$C_6H_6 \begin{matrix} CH_3 \\ C_3H_7, \end{matrix} \quad C_6H_4 \begin{matrix} CH_3 \\ C_3H_7, \end{matrix} \quad C_6H_4 \begin{matrix} OCH_3 \\ C_3H_5, \end{matrix} \quad C_6H_4 \begin{matrix} OCH_3 \\ C_3H_3O_2? \end{matrix}$$

kteryžto aether rozkládá se vodou po několika měsících v kyselinu mléčnou, alkohol ethylnatý, kyselinu octovou i *octan ethylnatý*. Hůře bylo při pivech v laboratoři čerstvě vykvašených, kdež aetherifikace *jen ve stavu zrodu* mohla v tom zředění proběhnouti.

Kyselinu mravenčí připisovali jsme původně částečně glycerinu,* jenž podle Gorup Besaneze (Lieb. Am. 125·211) ozonem vedle CO_2 ji poskytuje.

Vysvětlení těchto úkazů dodělali jsme se studiem staré mladiny, která jsouc sterilisována před pěti lety, v téže místnosti tak dlouho jako ostatní balony s kvasícími tekutinami stála a pak studiem produktů vegetace kvasnic, jež nazýváme Saccharomyces mycoderma D.

Mladina pět roků stará, úplně čirá, usadila něco málo látek temných na dně. Při otevření rozšířila se ihned libá vůně. Vzduch nad mladinou byl velice bohat *kysličníkem uhličitým*, jenž též při protřepání nádoby z tekutiny ubíhal. Destilat vodními parami přehnaný zapáchal příjemně, neobsahoval ani stopy ethylového alkoholu, aniž aldehyd, pouze těkavou kyselinu, která všemi reakcemi objevila se býti kyselinou *mravenčí*. Ze 4·5 litrů staré té mladiny zachyceno 0·7607 *gr* kyseliny mravenčí. Valerová kyselina nebyla vystižena; vyloučené stříbro nemělo v sobě síry.

Ve 100 cm^3 mladiny té nalézalo se uhlohydratového materialu tolik, co by odpovídalo 13·02 *gr* dextrosy. Netěkavých kyselin bylo na 1·3 cm^3 normalného louhu, netýkala se tudíž činnosť okysličující podle posavadních analys mladin, oněch látek, jichž produktem oxydačným býti by mohly kyseliny netěkavé. Mimo kysličník uhličitý byla v destilatu vodném kyselina mravenčí a sice v 1 litru tekutiny 0·169 *gr* CH_2O_2. Vyšší kyseliny nebyly nalezeny pražádné. Ve stříbře kyselinou mravenčí vyloučeném nebylo, jakž jsme již svrchu připomenuli, ani stopy síry. I běželo o poměry dusíkové:

veškerého dusíku ve 100 g amech bylo = 0·1161 *gr*
ve způsobě bílkovin . . . . . 0·0171 *gr*
» » amidů . . . . . 0·0563 *gr*
jakožto amoniak prchlo MgOým = . . 0·0130 *gr*.

Jest zajisté nápadno, že se stále objevoval amoniak, i bylo několik normalných piv i čerstvá mladina (16° S) na amoniak zkoušena, když jsme byli z těchto před tím ostatní formy dusíka eliminovali. Ve všech těch případech nalezeny vážitelné podíly amonatých solí (pokud ovšem jest methoda destilace s MgO spolehlivou, o čemž viz níže). Jest pouze třeba tak zvanou magnesii pálenou před prací samou *důkladně* vypáliti.

Čerstvé pivo *v pivovaru pana dra. K. Urbana*, připravené *lege artis* z kvasnic vypěstovaných ze staré pokožky Sacch. cerev. M_1, nemělo *pražádný alkohol amylnatý, nižádné těkavé kyseliny, ani sledy po kyselině mravenčí* a zcela malé stopy amoniaku.

---

* *Redtenbacher* (Lieb. Ana. 57·114) nalezl, že glycerin s vodou kvasnicemi byv zkvašen, poskytuje kyselinu propionovou. *Roos* pravil (Berl. B. IX. ref. 509), že čistý glycerin tak nečiní. My smíme zajisté uzavírati, neboť naše tekutiny obsahovaly glycerin se všemi možnými látkami i *čistými* kvasnicemi, že těmito vůbec kyselina propionová z glycerinu nevzniká, nýbrž asi působením organismů jiných, kvasnice znečišťujících.

*

Ethylalkoholu isolováno při 78·2 ze *pěti litrů* 120 gramů.
ve 100 cm^3 bylo ho . . . . . 2·49 gramů.
Amoniaku vyhnáno magnesií . . . . . 0·006 gramů.

Pěstovány byvše za poměrů v praxi pivovarnické platných ztratily kvasnice svoje pathologické abnormity.

Ku obecnému porozumění celého pochodu nahodil se nám organismus, jenž svrchu již označen námi jakožto Saccharomyces mycoderma *D*, organismus ten byl v mladině mající původně koncentraci 16·5° S od 30/I. 1886 do 28/X. 1890. Celý průběh vyšetřování byl právě takový jako ve případech předešlých. Destilat zjímán, opatrně do fenolftaleinové reakce neutralisován roztokem uhličitanu draselnatého. Jakmile bylo zahřáto, těkal z tohoto neutralisovaného (červeného) prvního destilatu destilat nový, po amoniaku páchnoucí, a zbytek se stále odbarvoval. I bylo přikapováno do úplné neutralisace (tekutina *A*) stále barytové vody a destilováno pak tak dlouho, dokud amoniak prchal. Destilat B nový nasycen byl chlorovodíkem, načež znova destilováno. Zcela čistý poslední destilat obsahoval 92·6 *gr* ethylového alkoholu, ani sledy amylalkoholu, aniž jiných látek příboudliny. Tento organismus zanechal *nejvíce alkoholu*, jejž spáliti neuměl. Zbytek *C* chovající chlorohydrat amoniaku neb snad chlorohydraty zásad, byl odpařen a smíšen s chloridem platičitým. I získány jsou krystalky, kteréž očištěny a vysušeny, musily pohromadě býti analysovány, neboť jich nebylo mnoho:

0·3376 *gr* látky poskytlo 0·1490 *gr* Pt . . 44·2% Pt
platin salmiak odpovídá theor. 44·3% Pt.

Souhlas jest tak značný, že přítomnosť aminů jiných mimo amoniak byla vyloučena. I určeno veškeré množství platiny, kteráž v chloroplatičitanu veške rém byla obsažena: 0·2137 *gr* Pt = 0·0302 *gr* dusíka.

Zbytek A kvantitativně zneutralisovaný byl rozložen kyselinou solnou, načež vše těkavé bylo odehnáno. V destilatu nalézaly se kyseliny, jejichž množství mohlo býti stanoveno jednak z předchozí neutralisace vodou barytovou, jednak novou titrací destilatu A'. Kyseliny ty by vyžadovaly ku neutralisaci (neb ku vytvoření úplného amidu) 0·1313 *gr* dusíka, tudíž o 0·1 *gr* N více než co nalezeno (= 0·0302 *gr* N).

Kyseliny neutralisovány a vařeny s roztokem dusičnanu stříbrnatého *ihned* vylučovaly stříbro práškovité a zanechaly sůl stříbrnatou bílou, jejíž dvě frakce analysovány:

I. frakce měla 51·9 % Ag
II. „ „ 51·77% Ag.

Jsou tudíž kyseliny těkavé: kyselina mravenčí a valerová a sice v molekulárném poměru v převaze nad dusík, jenž s částí oněch kyselin byl tam v původním destilatu sloučen.

Běželo o to, v jaké formě byl ten dusík v destilatu původním ze 3·44 litrů obsažen? Dusík prchal jakožto amoniak teprv, když destilat byl vařen s roztokem uhličitanu draselnatého a barytu. Rozklad těmito žíravinami šel zvolna před se, teprv po chvíli mizelo zabarvení fenolftaleinové. Jelikož soli

amonaté těkavé byly vyloučeny, musily v destilat těkati *amidy těkavých oněch kyselin.* Skutečně těkají amidy nízkých kyselin mastných s parami vodními velmi dobře, a při varu jejich vodných roztoků s uhličitanem draselnatým za přítomnosti fenolftaleinu objevují se ony úkazy odbarvování povlovného, jak svrchu pověděno bylo. Rozkládají se tudíž amidy těkavé kyselin mastných též za varu s roztokem uhličitanu draselnatého a sice povlovně: amoniak prchá, sůl draselnatá zbývá. To v literatuře jsme nenalezli.

Podle horních udání jsou *mimo amidy tam přítomny i jejich příslušné kyseliny ve stavu volném;* která kyselina byla jakožto amid přítomna, zda jedna či obě, říci neumíme.

Aby další poměry byly prozkoumány, byl zbytek po první destilaci doplněn na původní objem a znova destilováno na polovic. Těkavého ničeho více nevystiženo. I bylo potom přesyceno opatrně kyselinou solnou* do silné kyselé reakce a rychle s vodní parou destilováno. V destilatu nalezeno velmi mnoho kyseliny uhličité, pak mravenčí, a stopy nějaké kyseliny vyšší. Veškeré to množství kyselin těkavých jest stanoveno titrací, kyselina uhličitá ve zvláštním vhodném aparátu vážkově. Na to bylo přesyceno čerstvě vypálenou magnesií a destilováno do kyseliny solné. Chlorhydrat obsahoval též v sobě amoniak, neboť platiny z chloroplatičitanu bylo 44·3%, což jest též theoretická veličina platinsalmiaku. Jiný podíl (as jeden litr) byl s magnesií přímo destilován, z destilatu vyňal chloroform po třepání látku, kteráž jsouc pevna, krystalická o dlouhých jehlách, zapáchala silně po nikotinu. Množství její bylo tak malé, že nebylo lze ani na bod tání pomýšleti.

100 cm^3 té tekutiny (zbavené těkavých amidů a bílkovin; peptony zde nebyly pražádné) obsahovalo 0·05146 *gr* dusíku jakožto amoniak** ve způsobě solí amonatých. Hledíc ku 0·1041 *gr* veškerého dusíku, jest množství to ohromné, daleko převyšující výsledky pochodů způsobených normálnými kvasnicemi pivními svrchu vypsanými. Mimo to bylo tam též 0·0051 *gr* dusíku ve způsobě amidů netěkavých. Pokusy ty byly všemožně měněny, aby se podařilo i ty netěkavé kyseliny kvantitativně stanoviti, aby vystoupil poměr $CO_2 : NH_3$ zbylému, avšak veškeré výpočty nebyly spolehlivy. I pátráme přímo po jednotlivých látkách.

---

* Onou kyselinou, která jest předepsána ku rozkladům kvantitativným dextrinů. Zředění bylo tak silné, že na rozklady hlubší přítomných uhlohydrátů při té rychlé destilaci a tom velikém zředění nemožno pomýšleti

** Abychom se přesvědčili, pokud jest stanovení amoniaku pomocí čerstvě vypálené magnesie spolehlivým, destilovali jsme šťovan amonatý, fosforečnan amonatý i octan amonatý a salmiak s magnesií čerstvě pálenou, samy o sobě v roztocích vodných, napotom pak za přidání acetamidu, karbamidu aneb asparaginu v různých poměrech. I ukázalo se že acetamid, jsa vodními parami těkavým, zvyšuje o něco množství amoniaku ze sol· amonaté prchající; v míře značnější činí tak karbamid. Příbytek na amoniaku není závislým na povaze soli amonaté. Karbamidu samého rozkládá se magnesií ve vodném prostředí v době, kdy určení amoniaku bývá za stejných jinak okolností skončeno, asi 3·5%. Podivuhodným způsobem kolísal podíl rozloženého karbamidu za přítomnosti různých těch solí amonatých, také mezi 3·2—3·7%. Asparagin, pak amidokyseliny: tyrosin a leucin nijak nepůsobily v ono stanovení.

Ve 100 cm^3 té tekutiny bylo uhlohydratového materiálu 6·18 *gr* počítaného jakožto glykosa, veličina to v pokusech našich co do materialu zbylého nejvyšší. Glycerin nebylo lze benzoylchloridem vyloučiti v krystalické formě, vznikl vždy syrup. Bližší v té příčině přineseme, až budeme vládnouti materialem novým. Tolik zde pouze budiž dovoleno podotknouti, že kysličník uhličitý volný, z kvašení pochodící, v té tekutině na žádný způsob nemohl býti přítomen, vždyť tekutina jest třikráte až na polovinu zdestilována a v posledním destilatu, jenž as půl litru z jednoho litru tekutiny obnášel, nemohl baryt za přítomnosti fenolftaleinu indikovati ani stopu čehokoliv těkavého. Uhličitý kysličník, který při varu se zředěnou kyselinou solnou ubíhal, musil pocházeti:

a) buď z uhličitanu amonatého.

b) z nějaké kyseliny vysokomolekulárné, která by podle své zvláštní konstituce kysličník uhličitý v takovém zředění již byla pustiti musila; aneb konečně

c) snad pocházel z močoviny, aneb nějaké látky zpřízněné.

Případ první jest poněkud málo pravděpodobný, neboť jak svrchu kvantitativně jest dokázáno, byly těkavé kyseliny v nadbytku ve stavu volném, avšak, kdož může zde říci bez bližších pokusů, jak chová se as 0·1 *gr* kyseliny volné mastné vedle uhličitanu amonatého a hojnosti jiných látek ve čtyrech litrech tekutiny třebas i vroucí. Močovina skutečně, jak jsme se pokusy speciálnými přesvědčili, odštěpuje snadno kysličník uhličitý, když ji vaříme se zředěnou kyselinou solnou. Nepodařilo se nám však posud močovinu v té směsici isolovati.

Z práce té nechceme prozatím ničeho obecnějšího uzavírati než následující:

I. Produktem kvašení čistých kultur saccharomycet za temperatury obvyklé v závodech pivovarských, jest jediný z alkoholů — alkohol ethylový.

II. Alkohol ten zůstává i po léta ve prostředí pivním se žijícími organismy sám o sobě, nemá-li vzduch přístupu; může-li vzduch ku tekutině, povznesou se organismy ve formě mázdry, nastane energická oxydace, alkohol ethylnatý rozruší se jakožto kysličník uhličitý a voda.

III. Ostavíme-li saccharomycety (naše vypsané) ve prostředí vhodném po dlouhou dobu, zkvasí cukr, avšak některé dextriny ani po letech nejsou dotknuty.

IV. O takovém hladovění vrhají se saccharomycety na bílkoviny, hydralisují je i vznikají až amidy a soli amonaté kyselin organických.

V. Tato bílkoviny hydralisující mohutnost byla u Sacch. cer. M_1, M_2, M_3 rozličně silná, avšak slabší celkem než u organismu Sacch. Mycoderma D, jenž vytvořil množství solí amonatých ohromné.

VI. Vedle té hydratačné mohutnosti, okysličují ony saccharomycety produkty z bílkovin v kyselinu mravenčí a valerovou; první kyselina vzniká vedle kysličníku uhličitého pouhým chemismem (bez přispění mikroorganismů) z čisté mladiny, vlivem dlouholetým kyslíku vzduchového.

VII. Ty oxydačné mohutnosti podržují individua z mázder; když je necháme prováděti kvašení při poněkud zvýšené temperatuře v laboratoři, tu, jak se zdá, přiměšuje se též k ethylalkoholu ve stopách amylalkohol; ona individua však mohutnosti ty ihned tratí, jakmile pivo jimi upravujeme lege artis za podmínek pivovarnických.

VIII. Kvašení samo není snad také nic jiného než střídavá hydratace a dehydratace; z uhlohydratů vznikají látky o alkylenoxydové vazbě, které kyslík přesmykují, jak činí alkylenoxydy tvoříce aldehydy neb acetony. Při kvašení přesmyknutím kyslíka vzniká řetěz prostý kyslíku, na konci molekuly pak se nahromadí až v kysličník uhličitý neb v karboxyl.

K závěrku budiž nám dovoleno, abychom vzdali na tomto místě panu Dru. Karlu Urbanovi, majetníku pivovaru v Praze, upřímný svůj dík za vzácnou ochotu a obětavosť, se kterou nám dovolil provedení příslušných zkoušek ve vzorném svém závodu.

OBSAH

rozpravě této připojených tabulek.

Tab. I. Obr. 1. Saccharomyces cerevisiae V.
Buňky mázdry, staré 49 dní po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 2. Saccharomyces cerevisiae V.
Buňky mázdry, staré 13 měsíců po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Tab. II. Obr. 3. Saccharomyces cerevisiae M_2.
Buňky mázdry, staré 32 dní po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 4. Saccharomyces cerevisiae M_2.
Buňky mázdry, staré 12 měsíců po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Tab. III. Obr. 5. Saccharomyces cerevisiae M_1.
Buňky mázdry, staré 14 měsíců po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 6. Saccharomyces cerevisiae M_3.
Buňky mázdry, staré 12 měsíců po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Tab. IV. Obr. 7. Saccharomyces mycoderma D.
Buňky mázdry, staré 15 měsíců po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 8. Saccharomyces mycoderma D.
Buňky mázdry, staré 5½ roků po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Tab. V. Obr. 9. Sedlina ze 4½ letého piva
(na dně původní láhve ještě rok za teploty pracovny přechovávaná). Zvětšení 1 : 500.

Obr. 10. Saccharomyces cerevisiae V.
Buňky mázdry, staré 4½ roků po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 11. Saccharomyces cerevisiae M_1.
Buňky mázdry, staré 4½ roků po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 12. Saccharomyces cerevisiae M_3.
Buňky mázdry, staré 4½ roků po zakvašení za teploty pracovny. Zvětšení 1 : 500.

Tab. VI. Obr. 13. Saccharomyces cerevisiae M_1.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, po 24tihodinném kvašení v čerstvé mladině nechmelené při 25° C. (Praeparat zhotoven 24 hodin před fotografováním.) Zvětšení 1 : 500.

Obr. 14. Saccharomyces cerevisiae M_2.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, po 48tihodinném kvašení v čerstvé mladině nechmelené při 18° C. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 15. Saccharomyces cerevisiae M_3.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, po 48tihodinném kvašení v čerstvé mladině nechmelené při 18—25° C. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 16. Saccharomyces mycoderma D.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, po 24tihodinném kvašení v čerstvé mladině nechmelené při 25° C. (Pro spóry na kavalku sádrovém.) Zvětšení 1 : 500.

Tab. VII. Obr. 17. Saccharomyces mycoderma D.
Buňky mázdry, staré 17 dní po zakvašení, za teploty pracovny (16—18° C.). Zvětšení 1 : 500.

Obr. 18. Saccharomyces mycoderma D.
Buňky z kavalku sádrového, spóry nevytvořující, vypěstované ze staré mázdry. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 19. Saccharomyces cerevisiae M_1.
Buňky z kavalku sádrového, spóry nevytvořující, vypěstované ze staré mázdry. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 20. Saccharomyces cerevisiae M_3.
Buňky z kavalku sádrového, spóry nevytvořující, vypěstované ze staré mázdry. Zvětšení 1 : 500.

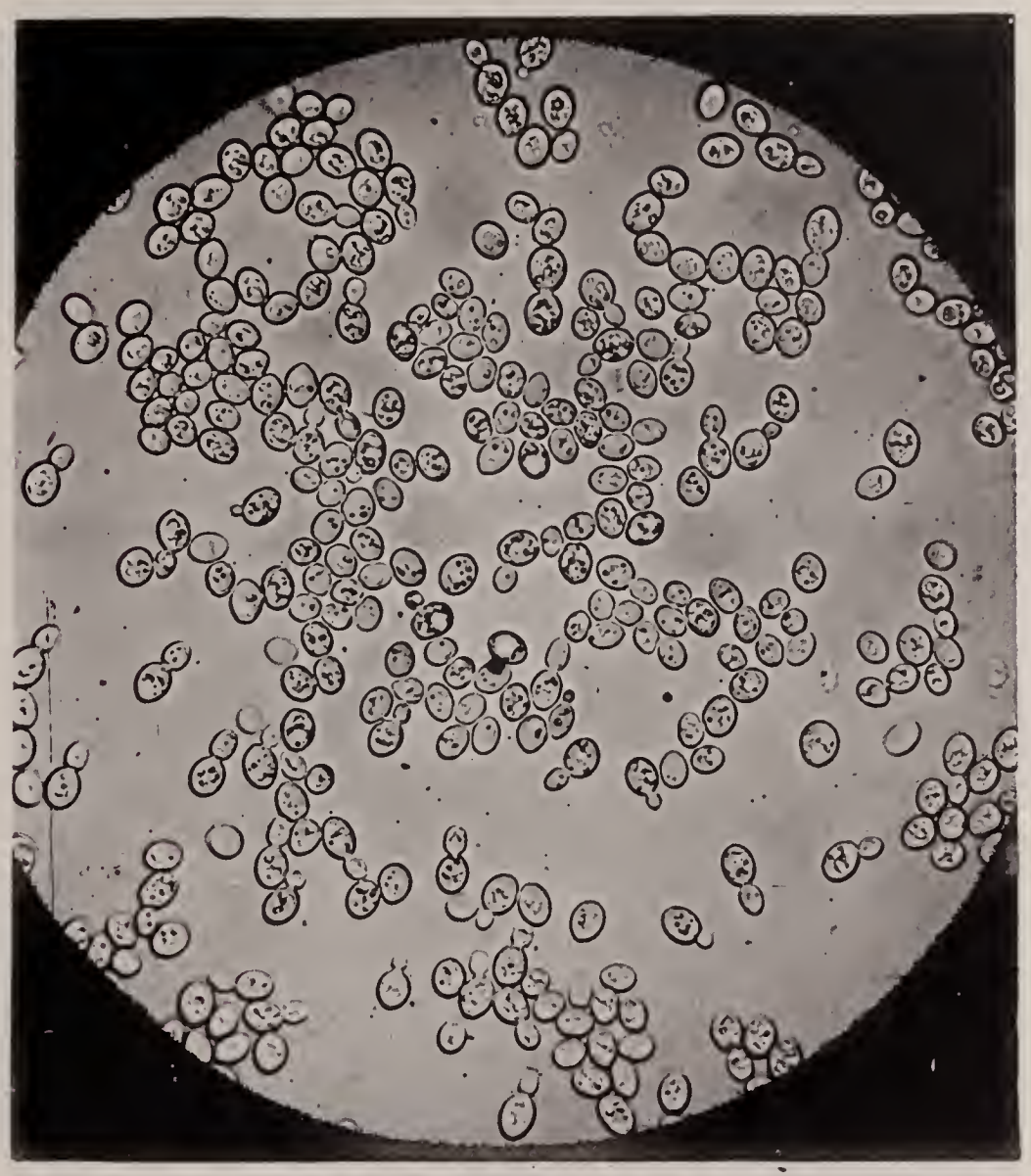
Tab. VIII. Obr. 21. Saccharomyces cerevisiae V.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, v gelatinovém rosolu mladinovém po půldruhém měsíci. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 22. Saccharomyces cerevisiae M_1.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, v gelatinovém rosolu mladinovém po 6ti měsících. Zvětšení 1 : 500.

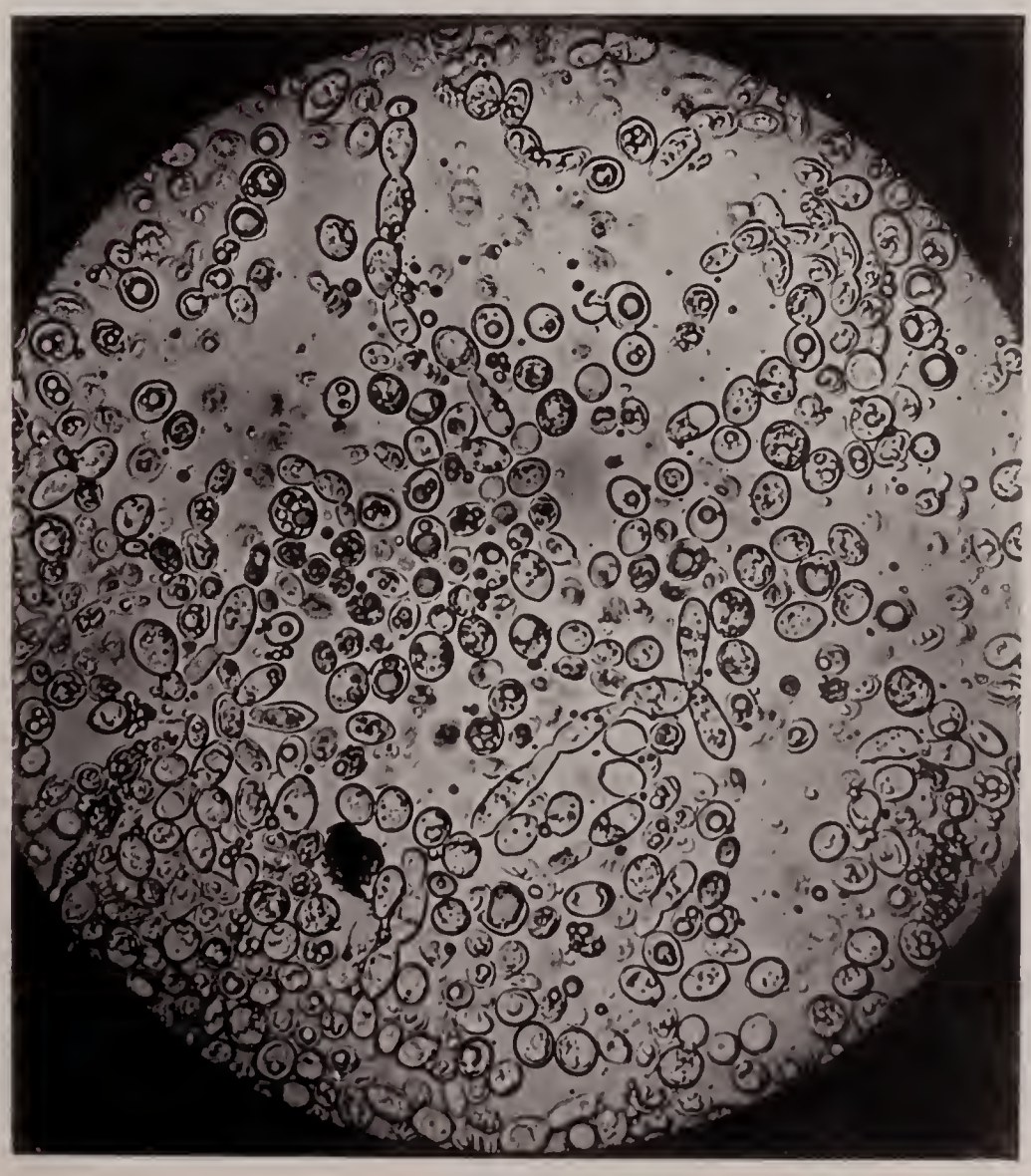
Obr. 23. Saccharomyces cerevisiae M_2.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, v gelatinovém rosolu mladinovém (na desce skleněné vylitém) po 16ti dnech. Zvětšení 1 : 500.

Obr. 24. Saccharomyces cerevisiae M_3.
Buňky, vypěstované ze staré mázdry, v gelatinovém rosolu mladinovém (na desce skleněné vylitém) po 16ti dnech. Zvětšení 1 : 500.

Dr. Bohuslav Raýman a Karel Kruis: Chemicko-biologické studie. I.

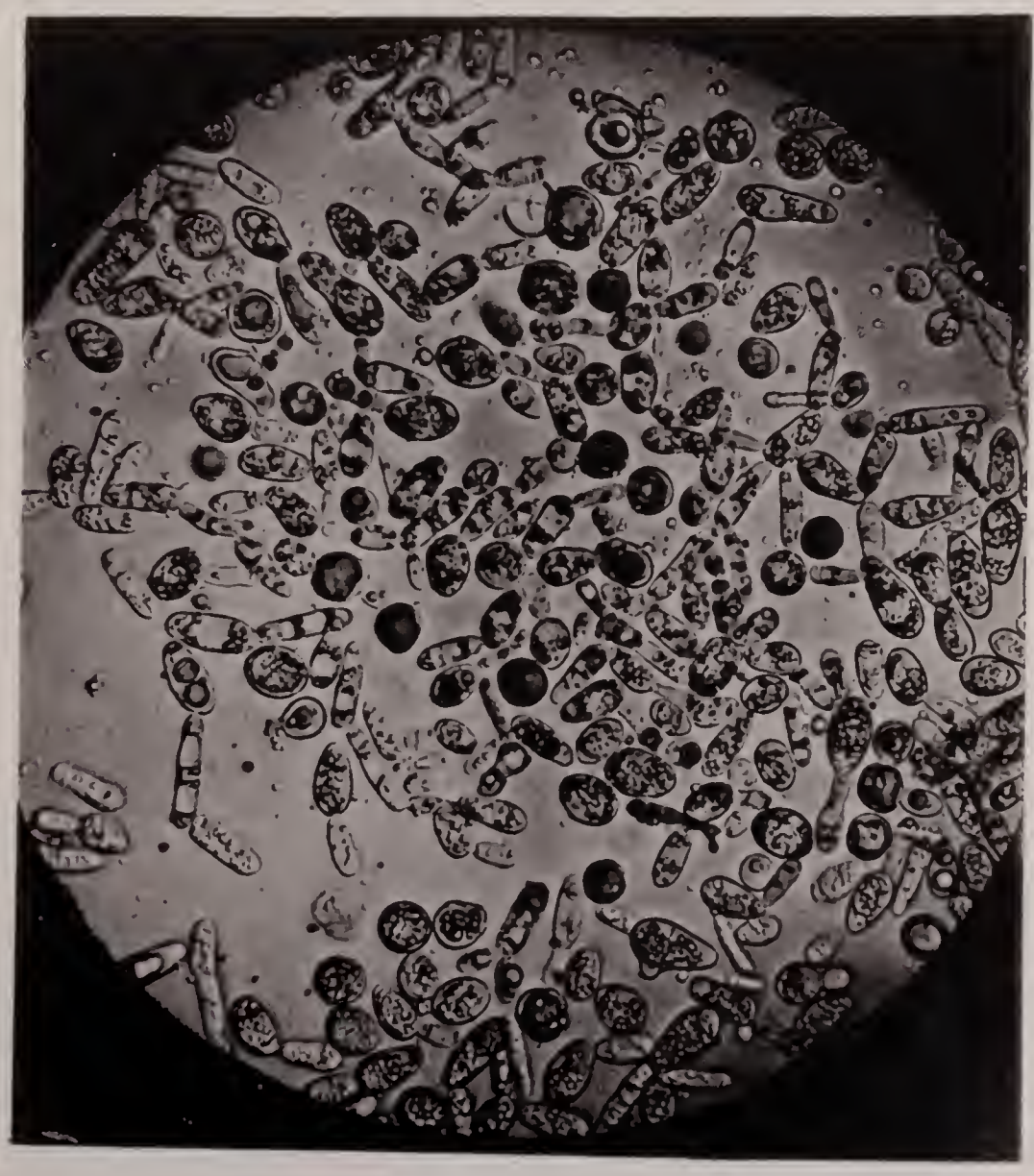


obr. 1.

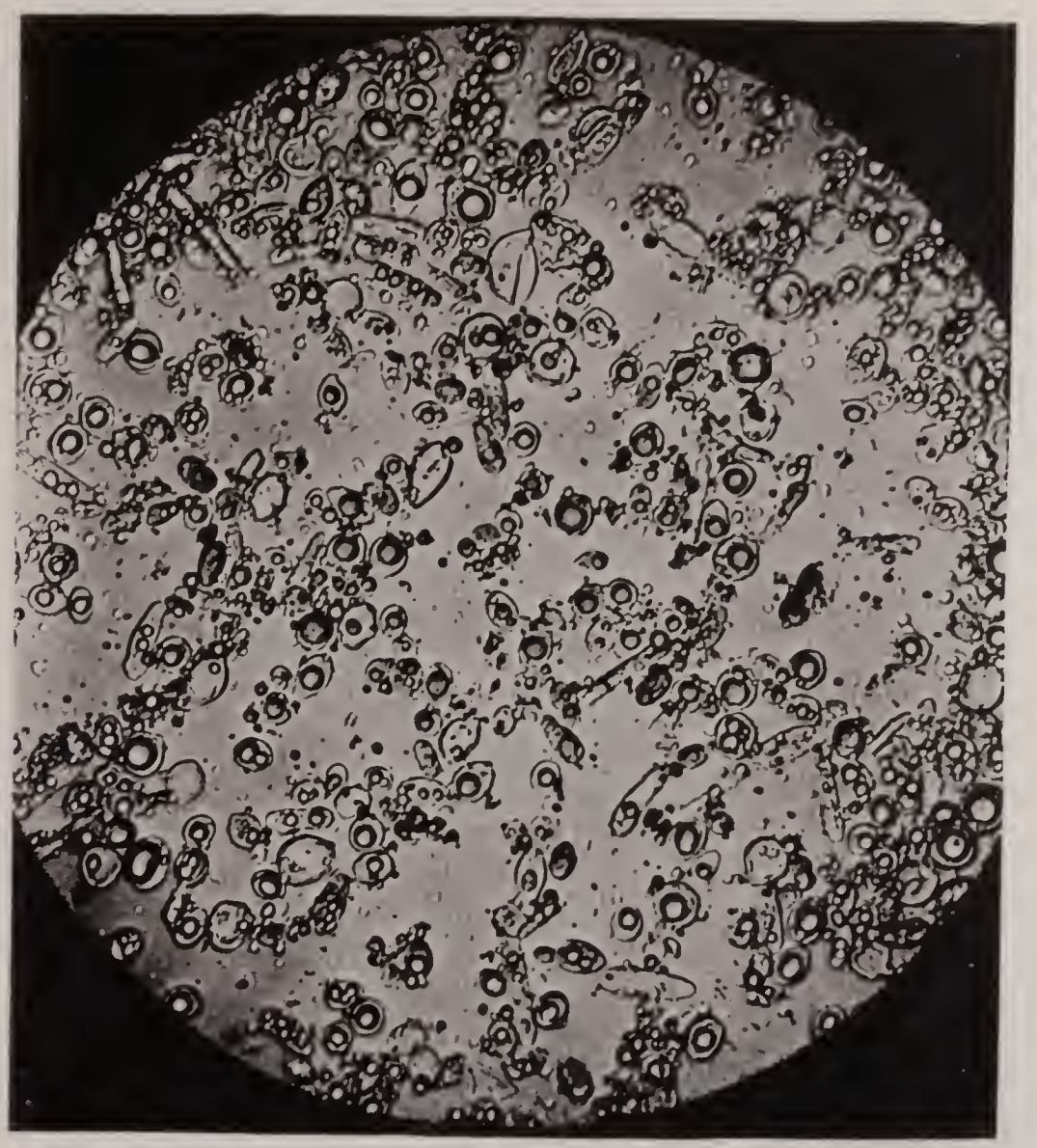


obr. 2.

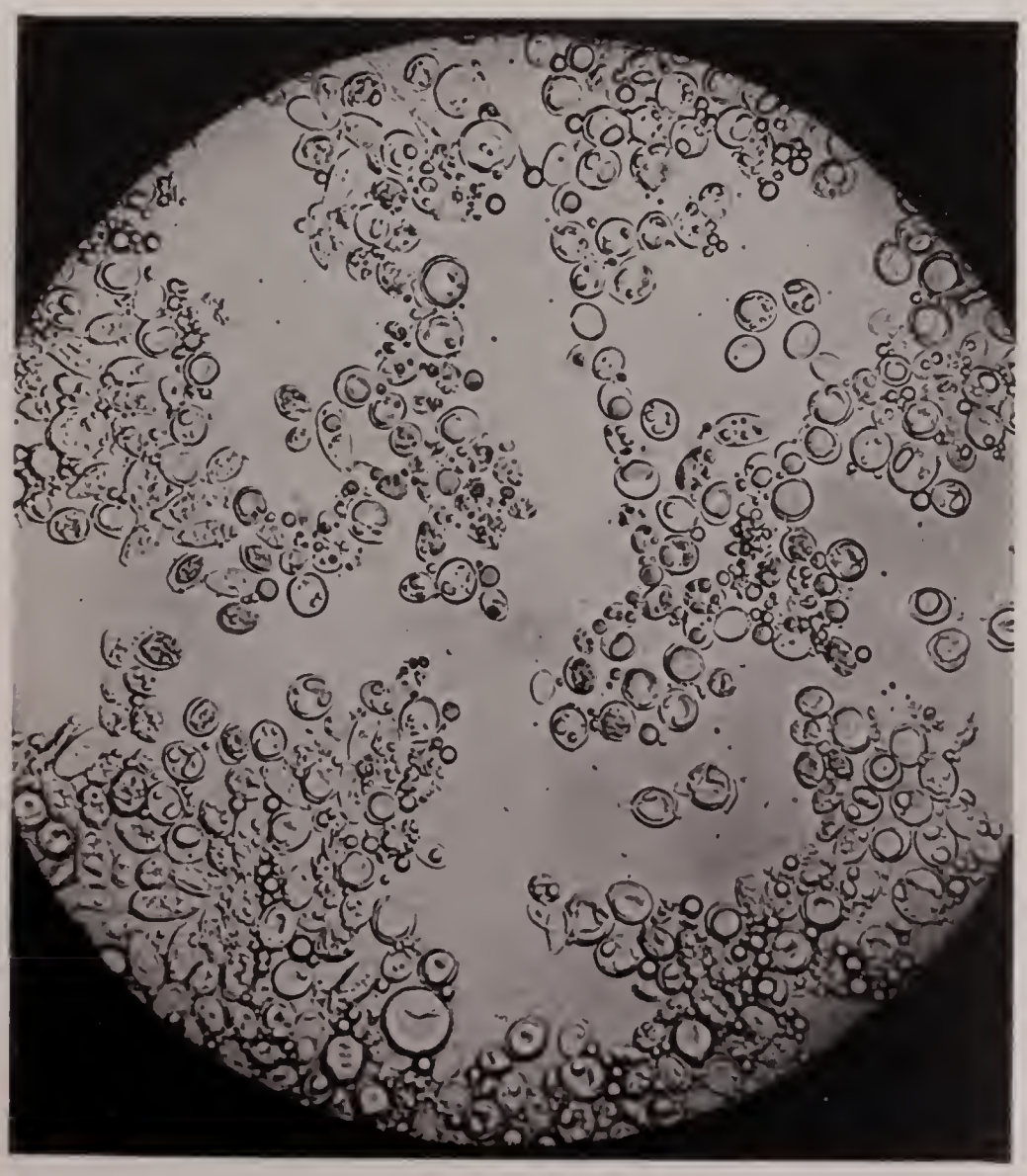
obr. 3.



obr. 4.



obr. 5.

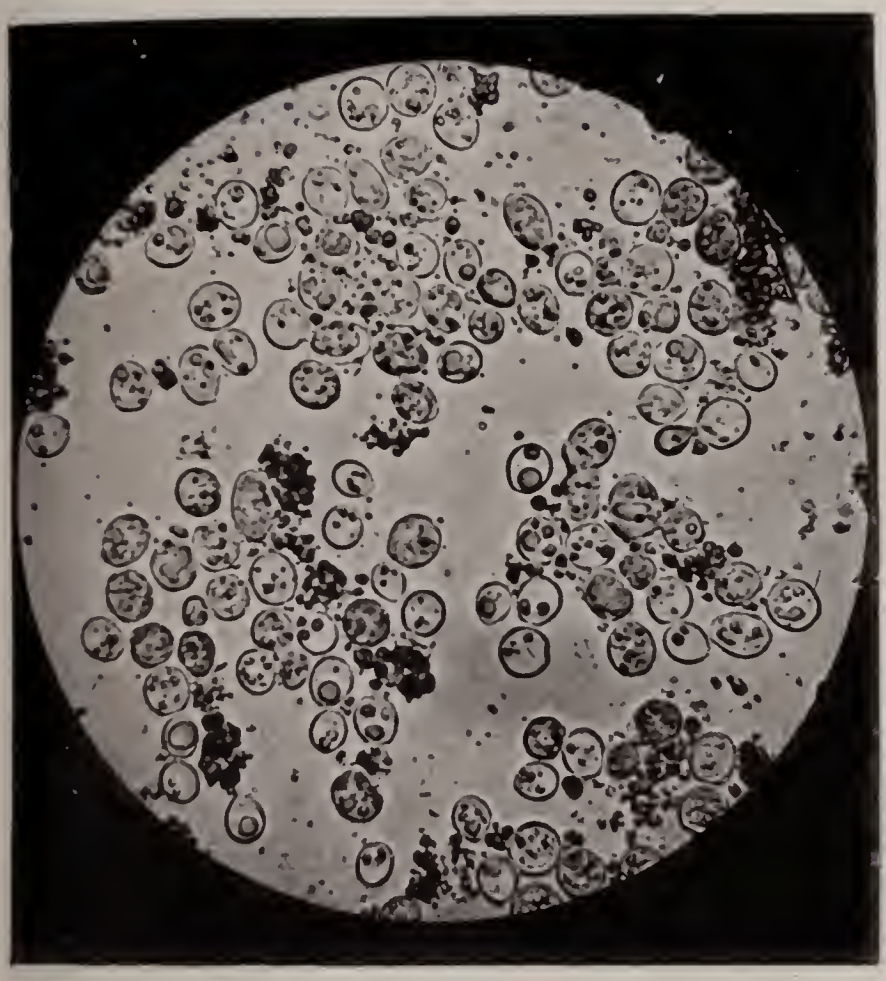


obr. 6.

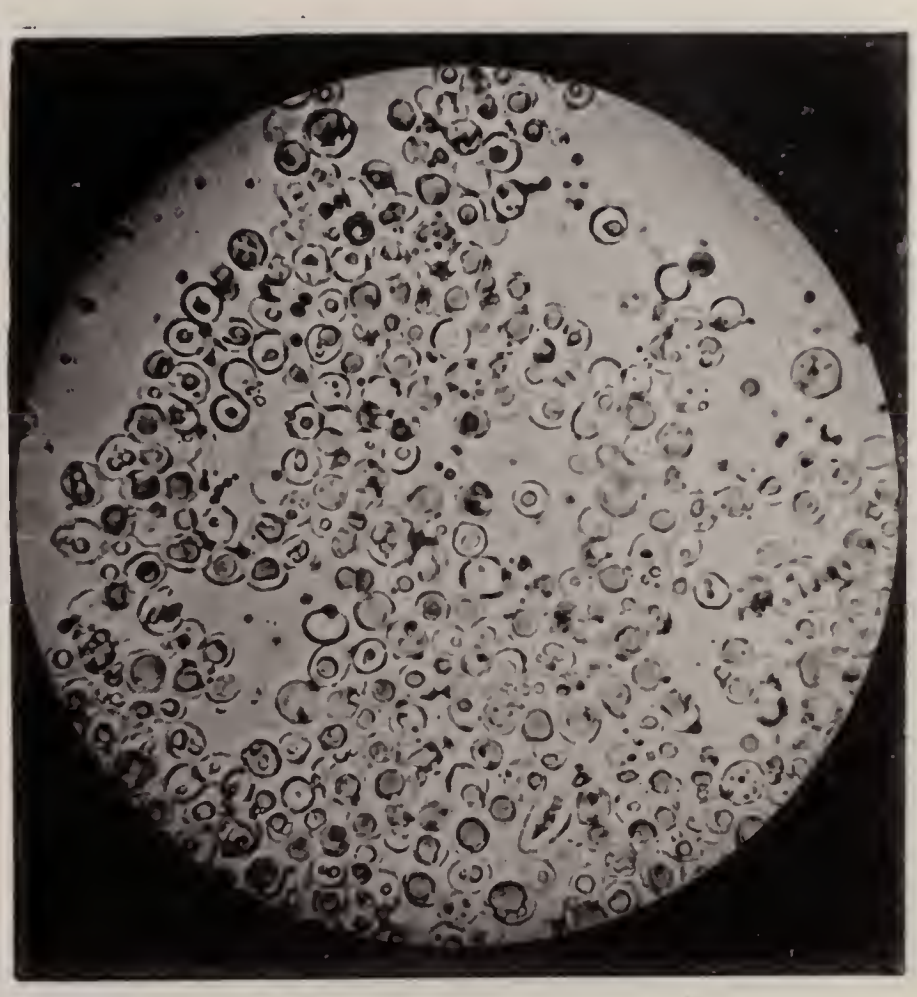
obr. 7.

obr. 8.

Dr. Bohuslav Raýman a Karel Kruis: Chemicko-biologické studie. I.

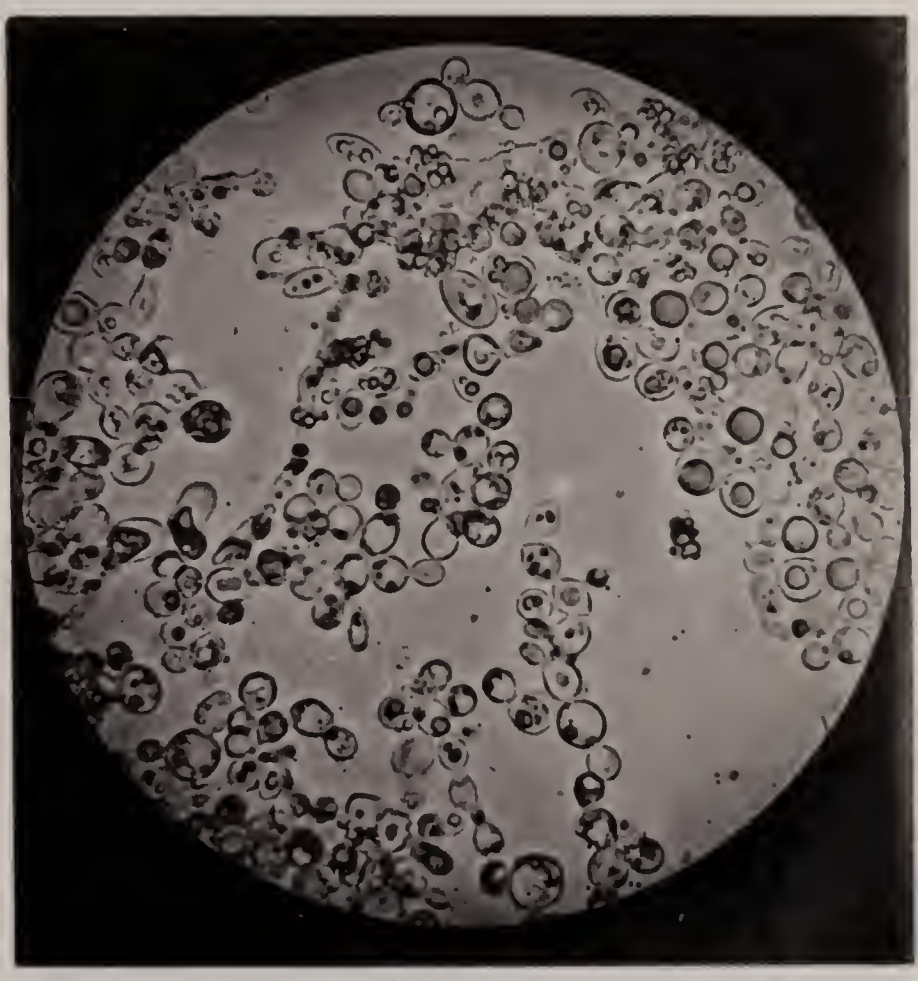


obr. 9.

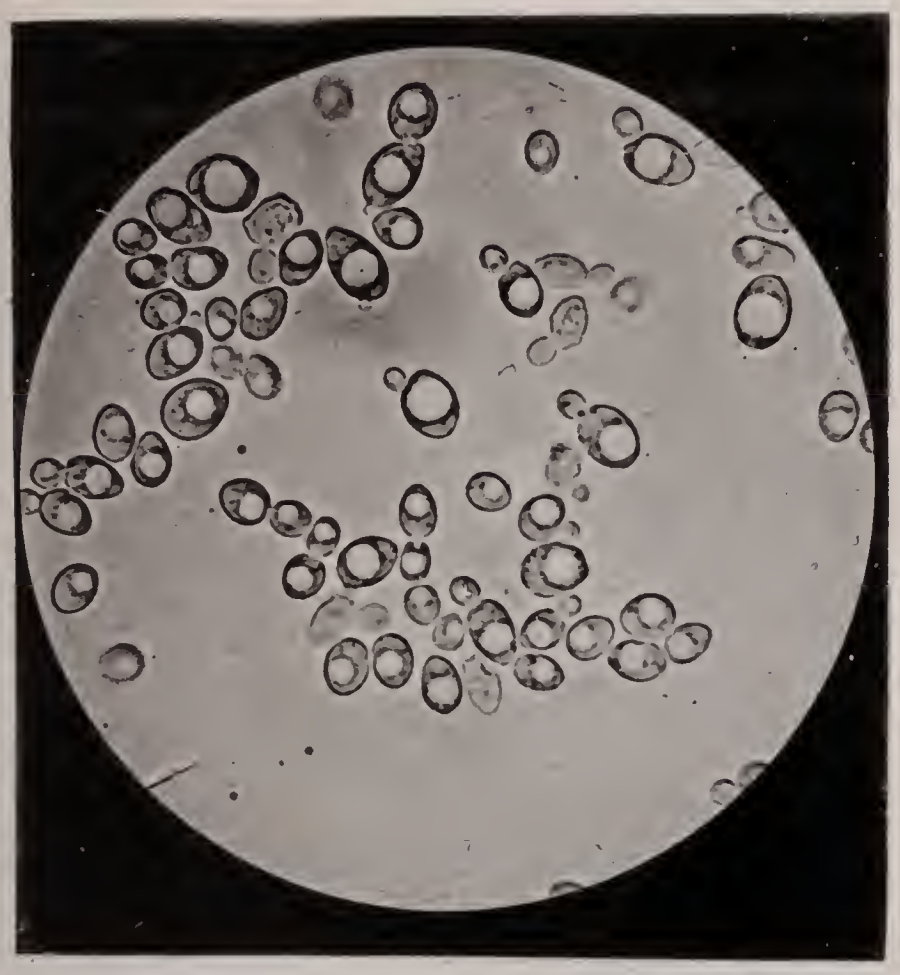


obr. 10.

obr. 11.



obr. 12.



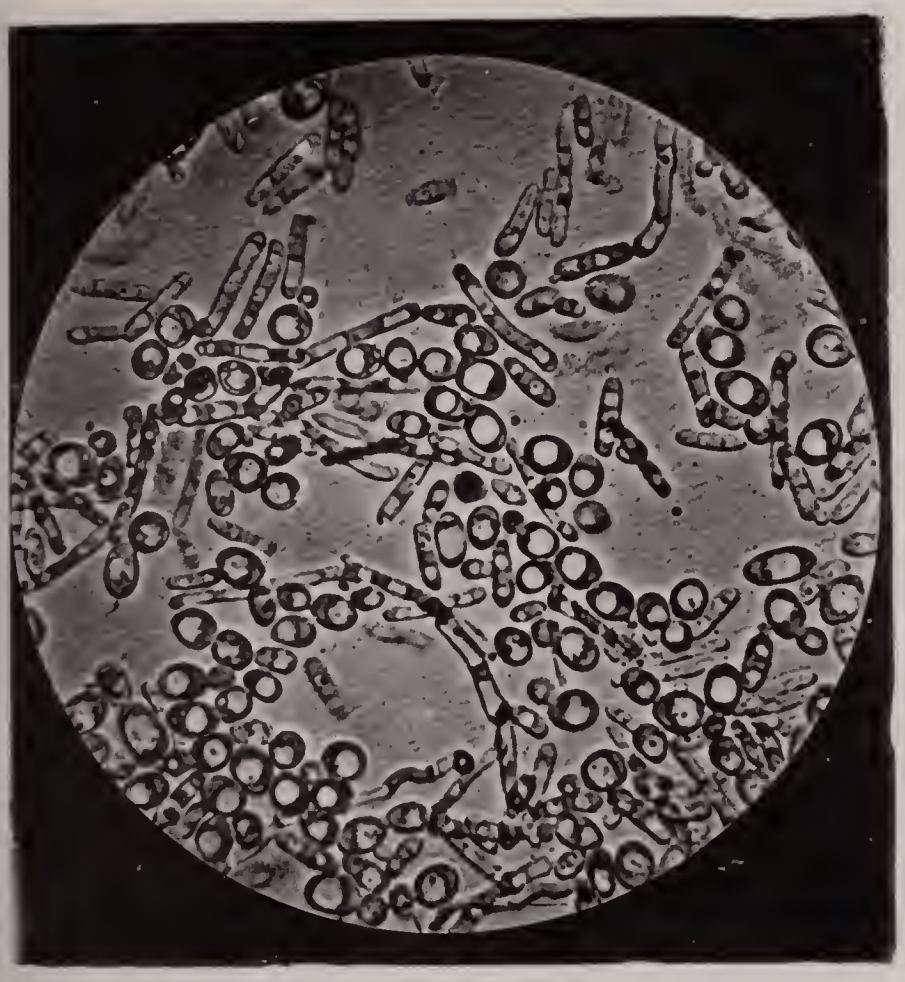
obr. 13.

obr. 14.

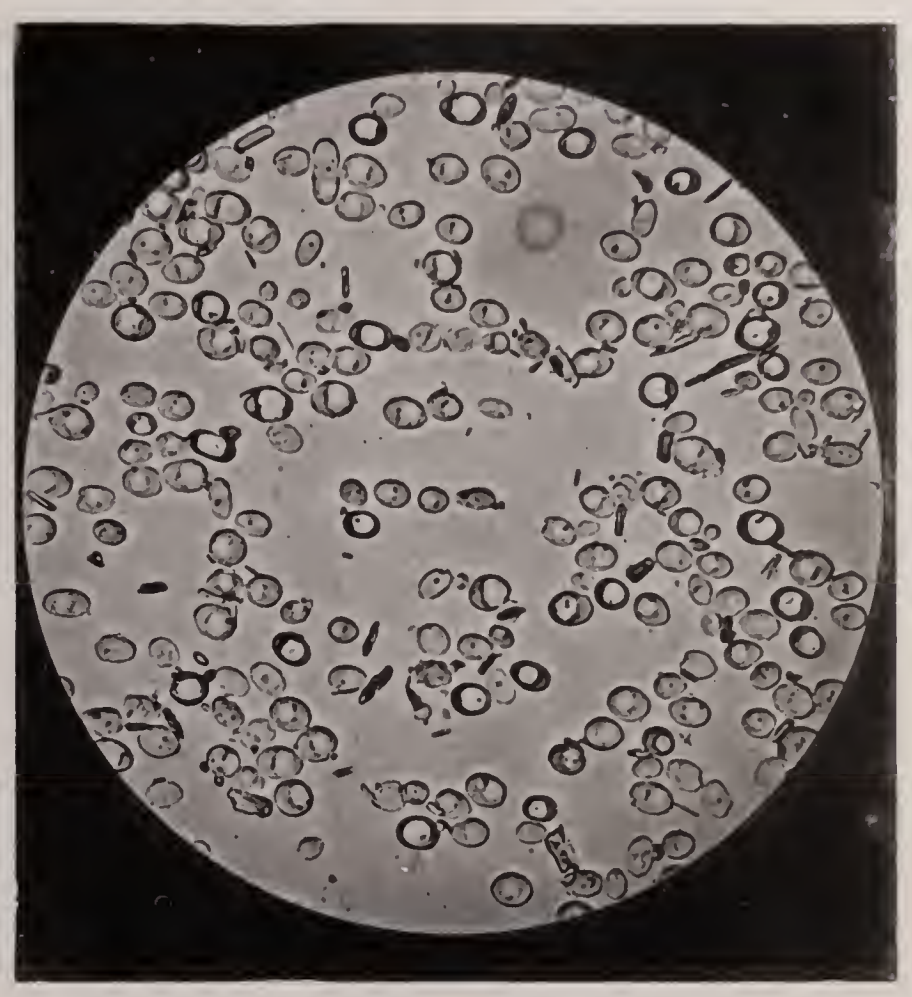
obr. 15.

obr. 16.

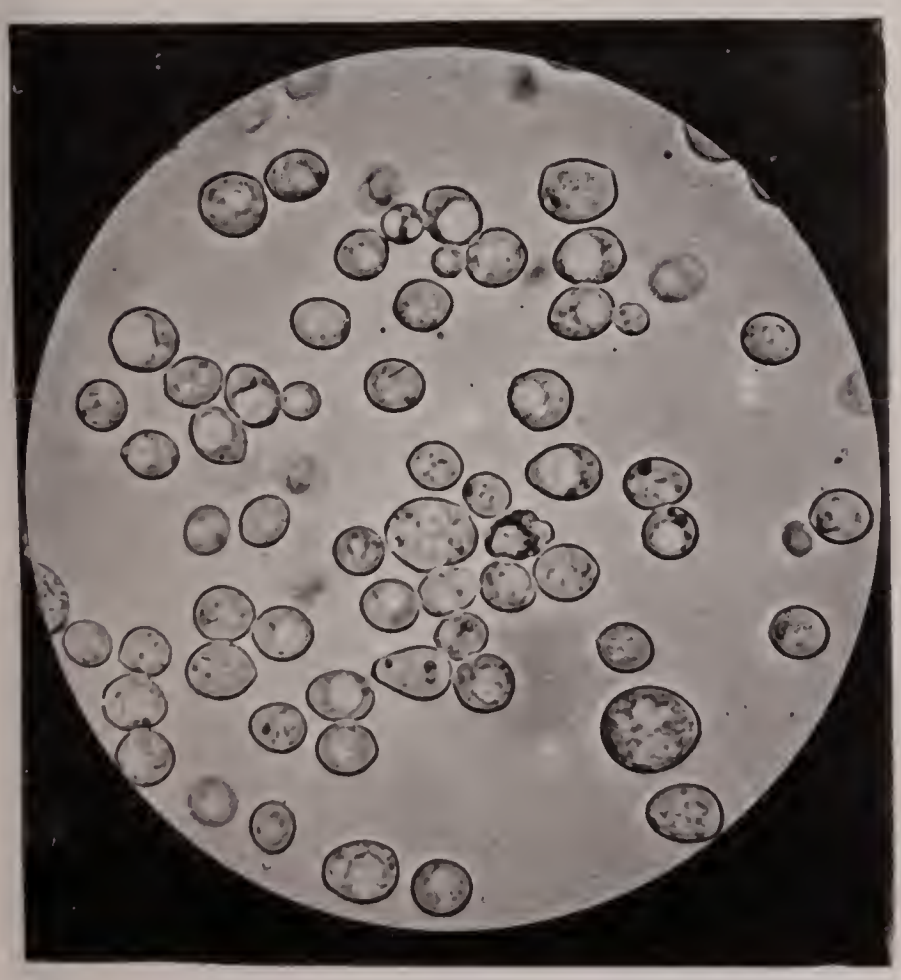
Dr. Bohuslav Raýman a Karel Kruis: Chemicko-biologické studie. I.



obr. 17.

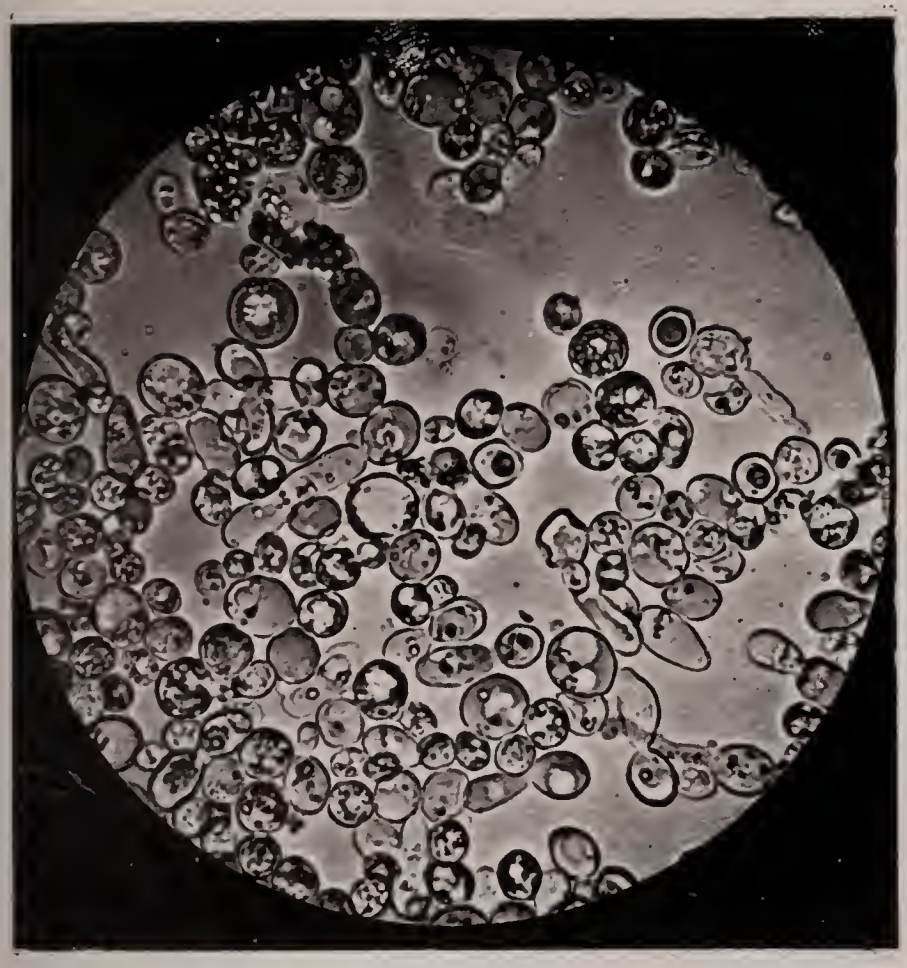


obr. 18.

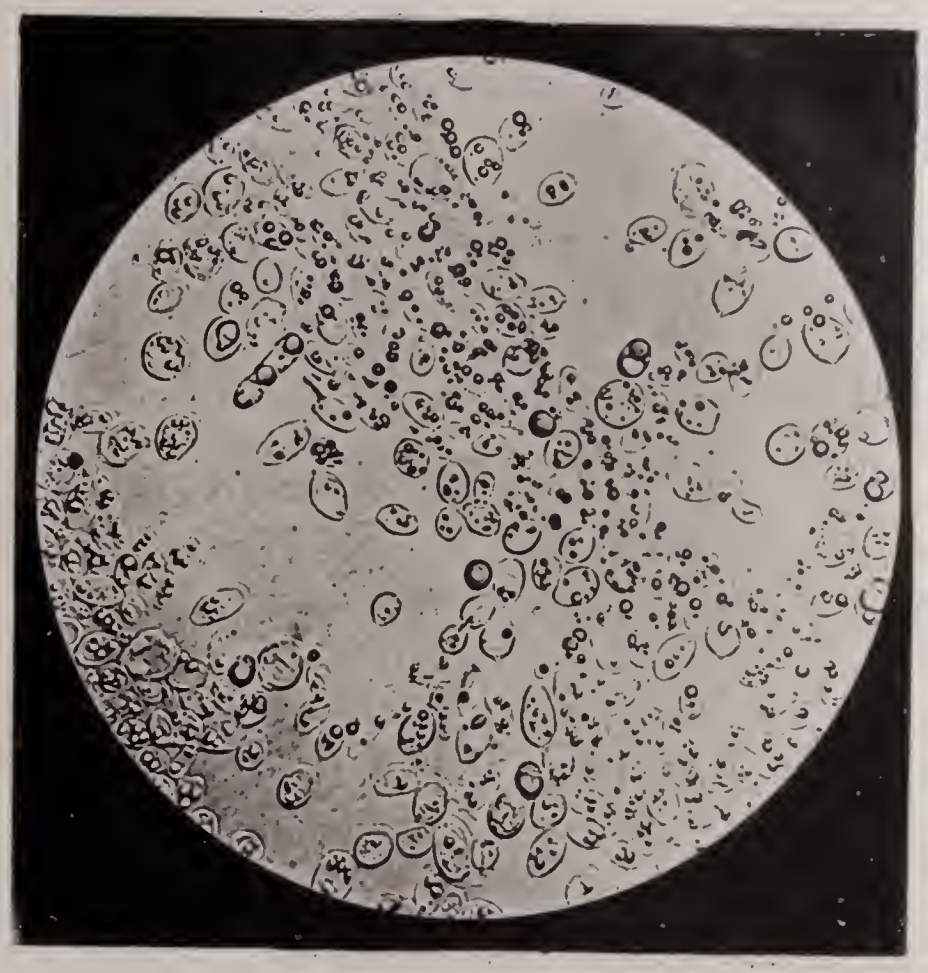


obr. 19.

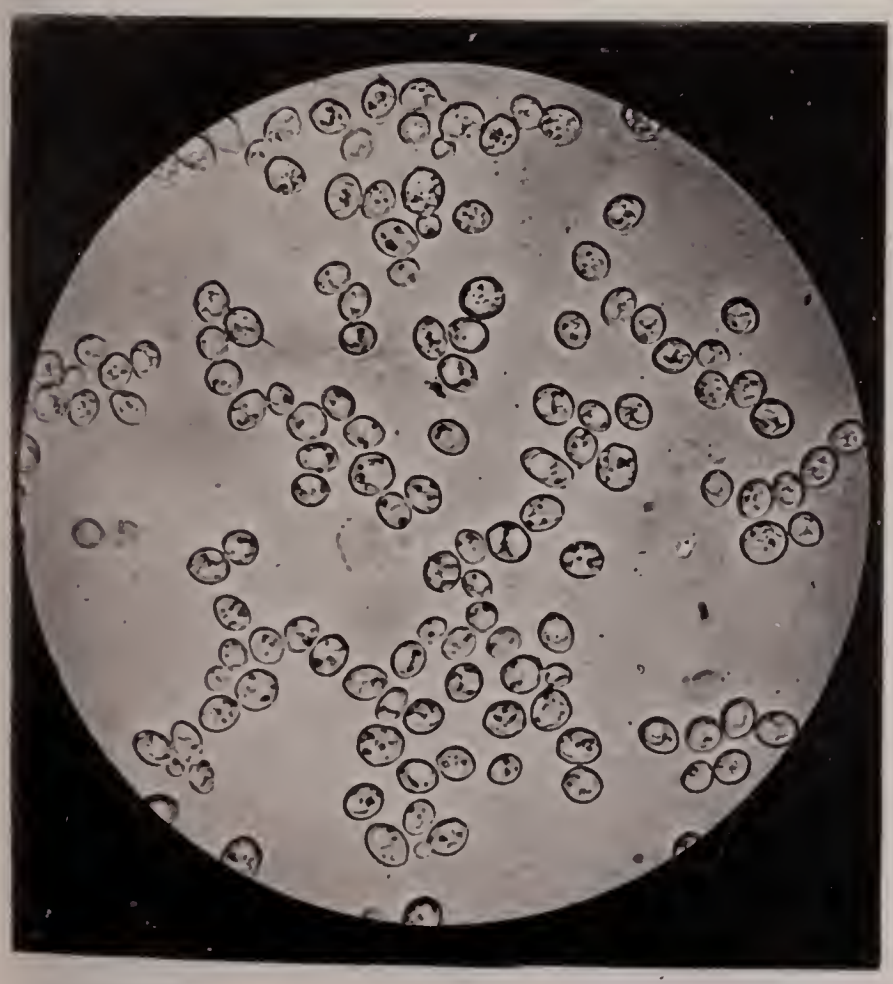
obr. 20.



obr. 21.



obr. 22.



obr. 23.

obr. 24.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 5.

STROJENÍ
OSKULAČNÍCH KUŽELOSEČEK
K ČARÁM VYTVOŘENÝM
KŘIVÝMI PROJEKTIVNÝMI ŘADAMI A SVAZKY.

NAPSAL
EDUARD WEYR.

PŘEDLOŽENO DNE 12. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

1. Pan *Schröter* zkoumal v pojednání »Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde«, Crelle t. 54, čáry vytvořené projektivnými řadami položenými na přímce a na kuželosečce, aneb na dvou kuželosečkách a stanovil dotyčné body vytvořujících paprsků. *V této práci podávám řešení obtížnějšího problemu požadujícího stanovení oskulační kuželosečky vytvořené čáry*, a s. odvozuji řešení z oskulačního hyperboloidu sestrojeného k ploše, kterou naplňuje spojnice sdružených bodů dvou projektivných řad položených na přímce a kuželosečce, aneb na dvou kuželosečkách nenalézajících se v téže rovině. Opírá se tedy tato konstrukce o řešení problemu jiného, který sám o sobě jest zajímavý.

Jako v citované práci tak i v této lze k dosaženým výsledkům přičiniti ihned ony, které ze zákona reciprocity plynou.

2. Dány-li v rovině dvě čáry Γ, Γ', a jsou-li bodům A, B, C, . . čáry první zákonitě přiřaděny body A', B', C', . . čáry druhé, vytvoří tyto dvě bodové řady jistou čáru Π, t. onu, jež se dotýká všech spojivých přímek $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ $\overline{CC'}$, . . sdružených bodů.

Rovnoběžné souřadnice bodu A buďte α, β, bodu A' pak α', β', libovolného dalšího bodu B první řady x, y, a sdruženého bodu B' řady druhé x', y'. Souřadnice sdružených bodů B, B' lze předpokládati vyjádřeny jakožto funkce jedné proměnné τ ve tvaru

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha + \alpha_1\,\tau + \alpha_2\,\tau^2 + \ldots, & y = \beta + \beta_1\,\tau + \beta_2\,\tau^2 + \ldots, \\ x' = \alpha' + \alpha'_1\,\tau + \alpha'_2\,\tau^2 + \ldots, & y' = \beta' + \beta'_1\,\tau + \beta'_2\,\tau^2 + \ldots \end{cases}$$

Spojivá přímka $\overline{BB'}$ se dotýká obalující čáry Π v bodě, jehož souřadnice hoví rovnicím

$$S = o, \quad \frac{dS}{dt} = o,$$

z nichž první jest rovnicí spojivé přímky $\overline{BB'}$. Učinivše speciálně $\tau = o$, obdržíme rovnice, jimž hoví souřadnice X, Y dotyčného bodu A_0 spojivé přímky $\overline{AA'}$ s čarou Π, totiž rovnice

$$(2)\quad \begin{cases} (\beta' - \beta)\,(X - \alpha) - (\alpha' - \alpha)\,(Y - \beta) = o, \\ (\beta'_1 - \beta_1)\,(X - \alpha) - (\alpha'_1 - \alpha_1)\,(Y - \beta) + \beta_1\,(\alpha' - \alpha) - \alpha_1\,(\beta' - \beta) = o. \end{cases}$$

Veďme k čáře Γ v bodě A tečnu a, a k čáře Γ' v bodě A' tečnu a'. Zvolme dále v rovině daných čar libovolný bod O a promítejme řadu $A, B, C, \ldots$ z bodu O na tečnu a do řady $A, B_1, C_1, \ldots$, při čemž arci předpokládáme, že se bod O nenalézá na tečně a. Jsou-li x_0, y_0 souřadnice bodu O, nalezneme pro soustřednice x_1, y_1 bodu B_1

$$x_1 - \alpha = \alpha_1 \frac{(x_0 - \alpha)(y - \beta) - (x - \alpha)(y_0 - \beta)}{\alpha_1 (y - y_0) - \beta_1 (x - x_0)},$$

$$y_1 - \beta = \beta_1 \frac{(x_0 - \alpha)(y - \beta) - (x - \alpha)(y_0 - \beta)}{\alpha_1 (y - y_0) - \beta_1 (x - x_0)}.$$

Máme tedy vzhledem k (1)

$$x_1 - \alpha = \alpha_1 \frac{[\beta_1 (x_0 - \alpha) - \alpha_1 (y_0 - \beta)]\tau + [\beta_2 (x_0 - \alpha) - \alpha_2 (y_0 - \beta)]\tau^2 + \ldots}{\beta_1 (x_0 - \alpha) - \alpha_1 (y_0 - \beta) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\tau^2 + \ldots}$$

a tedy pro dosti malé hodnoty τ

$$x_1 = \alpha + \alpha_1 \tau + \ldots, \quad y_1 = \beta + \beta_1 \tau + \ldots$$

Poněvadž do rovnic (2) z koefficientů řad (1) vcházejí jen první dva, máme tento výsledek:

Promítneme-li řadu $A, B, C, \ldots$ z libovolného bodu O na tečnu čáry Γ v bodě A do řady $A, B_1, C_1 \ldots$, tu vytvoří tato řada s řadou $A', B', C', \ldots$ čáru, která se spojivé přímky $\overline{AA'}$ v témž bodě A_0 dotýká, v němž se jí dotýká čára Π vytvořená řadami $A, B, C, \ldots$ a $A', B', C', \ldots$ Z toho jde též dále, že, promítnuvše též řadu $A', B', C', \ldots$ z libovolného bodu O' na tečnu a' čáry Γ' v bodě A' do řady $A', B'_1, C'_1, \ldots$, dvě nové řady $A, B_1, C_1, \ldots$ a $A', B'_1, C'_1, \ldots$ vytvoří čáru dotýkající se přímky $\overline{AA'}$ v bodě A_0.

Dle zákona reciprocity v rovině lze ihned vyřknouti obdobnou větu vzhledem k čáře vytvořené dvěma soustavami tečen na daných čarách Γ a Γ' v rovině.

Tím dokázány obě věty, jichž v citované práci užito jakožto vět samozřejmých.

3. Není nezajímavé seznati ještě jiné přímé řady, jimiž lze nahraditi dané křivé řady v příčině stanovení bodů dotyčných.

Tečny $a, b, c, \ldots$ čáry Γ v bodech $A, B, C, \ldots$ stanoví na tečně a v bodě A řadu bodů, které opět nazveme $A, B_1, C_1, \ldots$, a tečny čáry Γ' v bodech $A', B', C', \ldots$ stanoví na tečně a' řadu bodů $A', B'_1, C'_1, \ldots$

Dány-li souřadnice bodů B, B' výrazy (1), snadno nalezneme pro souřadnice x_1, y_1 a x'_1, y'_1 bodů B_1 a B'_1 výrazy tvaru

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha + \frac{1}{2}\alpha_1 \tau + \ldots, & y_1 = \beta + \frac{1}{2}\beta_1 \tau + \ldots, \\ x_1' = \alpha' + \frac{1}{2}\alpha'_1 \tau + \ldots, & y_1' = \beta' + \frac{1}{2}\beta'_1 \tau + \ldots, \end{cases}$$

z nichž soudíme, že se zavedením těchto výrazů místo výrazů (1) rovnice (2) nemění. Tím jsme nabyli výsledku, *že v příčině stanovení bodu A_0 spojivé přímky $\overline{AA'}$ s vytvořenou čarou lze nahraditi řadu bodů $A, B, C, \ldots$ řadou $A, B_1, C_1, \ldots$, nahradíme-li současně řadu $A', B', C', \ldots$ řadou $A', B'_1, C'_1, \ldots$*

Je-li jedna z daných řad přímá, na př. $A, B, C, \ldots$, tu rovnice (3) ukazují, že lze řadu $A', B', C', \ldots$ nahraditi řadou $A', B'_1, C'_1, \ldots$ nahradíme-li sou-

časně A, B, C, . . řadou A, B_0, C_0, . ., a značí-li B_0, C_0, . . středy délek $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, . .

Uvážíme-li, že půlící body jsou harmonické body vzhledem k nekonečně vzdálenému bodu přímky Γ, a že lze kterýkoli bod promítnutím vyvoditi z nekonečně vzdáleného bodu, soudíme, že lze přímou řadu A, B, C, . . obecněji nahraditi řadou A, B_0, C_0, . ., značí-li B_0, C_0, . . body harmonické k libovolnému pevnému bodu přímky Γ vzhledem k bodovým družinám A, B; A, C; . . . . Projektivný ráz výsledku tohoto jest patrnější než předchozího.

4. Jsou-li dané čáry Γ a Γ' kuželosečkami, aneb jedna kuželosečkou a druhá přímkou, a dané na nich řady bodové projektivnými, tu, volivše pomocné středy O a O' na Γ, resp. Γ', obdržíme pomocné přímé řady projektivné, a také předchozí článek vede patrně k řadám projektivným. Lze tedy dotyčný bod přímky $\overline{AA'}$ s vytvořenou čarou čtvrté neb třetí třídy ihned sestrojiti výsledek podaný již v citovaném pojednání.

Jakožto druhou applikaci vytkněme řešení následujícího úkolu.

Přímočará plocha Π dána jakožto geometrické místo spojivých přímek sdružených bodů dvou projektivných řad A, B, C, . . a A', B' C', . . nenalézajících se v téže rovině, z nichž buď jedna jest na přímce Γ a druhá na kuželosečce Γ', aneb obě na kuželosečkách Γ, Γ'; nechť se sestrojí nějaký dotyčný hyperboloid této plochy podél přímky $\overline{AA'}$.

Promítneme-li dané řady z libovolného bodu S na libovolnou rovinu ϱ, tu vytvoří průměty spojivých přímek $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, . . čáru, jež jest průmětem plochy Π na rovině ϱ. Bod P, v němž se průmět přímky $\overline{AA'}$ této čáry dotýká, jest patrně průmětem bodu Q na $\overline{AA'}$, jehož tečná rovina k ploše Π prochází bodem S. Sestrojením bodu P jest úkol vlastně řešen, neb pak známe tečné roviny plochy Π ve třech bodech přímky $\overline{AA'}$, t. v bodech A, A', Q. Dle předcházejících úvah soudíme, že, *nahradíme-li dané řady A, B, C, . . a A', B', C', . . přímými řadami dle návodů čl. 2. neb 3. sestrojenými, tyto přímé projektivné řady vytvoří hyperboloid, který se dotýká plochy Π podél přímky $\overline{AA'}$.*

5. Vytkněme si nyní problem, o jehož řešení hlavně jde.

Dvě dané projektivné křivé řady A, B, C, . . a A', B', C', . . na kuželosečkách Σ, Σ', položených v různých rovinách ϱ, ϱ', vytvořují spojnicemi sdružených bodů plochu; nechť se sestrojí oskulační hyperbolod její podél přímky $\overline{AA'}$.

Řešení tohoto problemu si usnadníme tím, že nahradíme kuželosečky Σ a Σ' jinými, dotýkajícími se průsečné přímky $\varrho\varrho'$ rovin ϱ a ϱ'; kterak to lze učiniti, ukazuje následující úvaha.

Veďme body A, B, C libovolnou kuželosečku Σ_1, ktera nechť protne Σ ještě v bodě X, a stanovme na těchto dvou kuželosečkách projektivné řady tím, že bodům A, B, C čáry Σ přiřadíme tytéž body $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$ na čáře Σ_1. Poněvadž se obě řady promítají z bodu X dvěma projektivnými svazky, v nichž se vyskytují tři samodružné paprsky XA, XB, XC,

soudíme, že paprsky vedené bodem X protínají Σ a Σ_1 v projektivně sdružených bodech.

Blíží-li se body B, C bodu A, tu se čára Σ blíží kuželosečce oskulující čáru Σ v bodě A, a hyperboloid vedený přímkami AA', $\overline{BB'}$, CC', se blíží hledanému oskulačnímu hyperboloidu. *Lze tedy v příčině sestrojení tohoto hyperboloidu nahraditi čáru Σ libovolnou kuželosečkou Σ_1 oskulující čáru Σ v bodě A, nahradíme-li současně řadu A, B, C, . . řadou A, B_1, C_1, . . do níž se první řada z bodu X, čarám Σ a Σ_1 společného, na kuželosečku Σ_1 promítá.*

Na základě tohoto výsledku můžeme v další úvaze předpokládati, že se dané kuželosečky Σ a Σ' dotýkají průsečné přímky $\overline{\varrho\varrho'}$ v libovolně volených bodech; a tak skutečně učiníme.

6. Především nyní snadno ustanovíme další dvě povrchové přímky hledaného oskulačního hyperboloidu procházející body A, resp. A'.

Za tím účelem stanovme směr sdružený na ploše Π se směrem tečny $\overline{AA_0}$ čáry Σ v bodě A, označujíce literou Π plochu vytvořenou danými projektivnými řadami a literou A_0 průsečný bod zmíněné tečny s přímkou $\overline{\varrho\varrho'}$. Jest-li M libovolný bod na Σ, prochází tečná rovina μ plochy Π v tomto bodě přímkou $\overline{MM'}$ a tečnou $\overline{MM_0}$ čáry Σ v bodě M sestrojenou; literou M_0 označujeme opět průsečný bod této tečny s přímkou $\varrho\varrho'$. Speciálně jest tečná rovina α v bodě A rovina jdoucí body A, A', A_0. Blíží-li se bod M na Σ bodu A, tu se blíží průsečná přímka $\alpha\mu$ rovin α, μ hledané přímce sdružené s přímkou $\overline{AA_0}$. Jde tedy o limitní polohu průsečné přímky $\alpha\mu$.

Stopy rovin α a μ na rovině ϱ jsou tečny $\overline{AA_0}$ a $\overline{MM_0}$ čáry Σ; limitní poloha jich společného bodu jest tedy dotyčný bod A. Stopy oněch dvou rovin na rovině ϱ' jsou přímky $\overline{A_0A'}$ a $\overline{M_0M'}$; limitní poloha jich průsečného bodu jest tedy dotyčný bod P přímky $\overline{A_0A'}$ s onou čarou, která obaluje veškeré spojivé přímky $\overline{A_0A'}$, $\overline{M_0M'}$, . . Uvážíme-li, že body A, M, . . kuželosečky Σ souvisí projektivně se stopami A_0, M_0, . . jich tečen na tečně $\overline{\varrho\varrho'}$, soudíme, že řada bodů A_0, M_0, . . jest projektivná s řadou bodů A', M', . . na kuželosečce Σ'. Lze tedy známým způsobem sestrojiti bod P.

Spojivá přímka AP jest sdružena s přímkou $\overline{AA_0}$ na ploše Π; sestrojíme-li tedy k povrchové přímce $\overline{AA'}$ harmonickou přímku vzhledem k přímkám $\overline{AA_0}$ a $\overline{AP}$, máme druhou povrchovou přímku hledaného oskulačního hyperboloidu bodem A procházející. Stopa V této přímky na rovině ϱ' jest tedy harmonický bod k bodu A' vzhledem k bodům A_0 a P.

Obdobně lze sestrojiti druhou povrchovou přímku oskulačního hyperboloidu procházející bodem A'; její stopu na rovině ϱ označme literou W.

7. Rovina ϱ protíná hledaný hyperboloid v kuželosečce oskulující čáru Σ v bodu A a procházející bodem W, a rovina ϱ' jej protíná v kuželosečce oskulující Σ' v A' a procházející bodem V; oba tyto řezy protínají přímku $\overline{\varrho\varrho'}$ arci v týchže dvou bodech.

Svazek čar druhého stupně procházejících bodem W a oskulujících kuželosečku Σ v bodu A stanoví na přímce $\overline{\varrho\varrho'}$ tutéž involuci bodovou jako svazek kuželoseček procházejících bodem V a oskulujících Σ' v bodě A'; neboť oběma involucím náleží ona bodová družina, v níž hledaný oskulační hyperboloid přímku $\overline{\varrho\varrho'}$ protíná, a dále též ona družina bodová A_0, A_0', kterou stanoví současně zvrhlé čáry obou svazků na přímce $\overline{\varrho\varrho'}$; A'_0 zde značí stopu tečny čáry Σ' v bodě A' na přímce $\overline{\varrho\varrho'}$.

Hledaný oskulační hyperboloid maje procházeti přímkami $\overline{AA'}$, $\overline{AV}$, $\overline{A'W}$ a mimo to se dotýkati podél přímky $\overline{AA'}$ nalezeného dotyčného hyperboloidu, o němž můžeme předpokládati, že jest veden přímkami $\overline{AV}$ a $\overline{A'W}$, náleží do svazku ploch druhého stupně, které odvodíme z dotyčného hyperboloidu kollineací, při níž bod A jest středem kollineace a rovina $(AA'W)$ rovinou kollineační. Jest patrno, že každý hyperboloid vyvozený z dotyčného hyperboloidu takovou kollineací prochází přímkami $\overline{AA'}$, $\overline{AV}$, $\overline{A'W}$ maje podél $\overline{AA'}$ tytéž tečné roviny, které má dotyčný hyperboloid, a že naopak každý hyperboloid hovící těmto výminkám na vytčený způsob lze kollineací vyvoditi; neboť on jest stanoven, jakmile vytkneme v tečné rovině π nějakého bodu P na $\overline{AA'}$ další povrchovou přímku jeho, a jejím přiřaděním povrchové přímce dotyčného hyperboloidu bodem P procházející jest žádaná kollineace též zrovna stanovena.

Stopy na rovině ϱ všech ploch takovým způsobem z dotyčného hyperboloidu vyvozených patrně se navzájem oskulují v bodě A, a jelikož hledaný hyperboloid mezi ně náleží, oskulují vesměs čáru Σ v bodě A; že pak jich stopy na rovině ϱ' oskulují čáru Σ' v bodě A', vychází z úvodní úvahy tohoto článku.

8. Nechť jsou kuželosečky Ω a Ω' řezy libovolného hyperboloidu vytčeného svazku ploch s rovinami ϱ a ϱ', a G, H průsečné body tohoto hyperboloidu s přímkou $\overline{\varrho\varrho'}$. Čára Ω oskuluje čáru Σ v bodě A a prochází body G, H, W, a čára Ω' oskuluje Σ' v bodě A' procházejíc body G, H, V.

Povrchové přímky tohoto hyperboloidu téže soustavy, do níž náleží přímka $\overline{AA'}$, stanoví na čarách Ω a Ω' dvě projektivné řady, v nichž body G, H příslušejí sobě; tento projektovaný vztah nazveme vztahem (I).

Kuželosečky Σ a Ω se protnou mimo bod A ještě v jednom bodě X, a čáry Σ' a Ω' mimo A' ještě v bodě X'. Promítněme body G, H z bodu X na kuželosečku Σ do G_1, H_1 a z bodu X' na kuželosečku Σ' do bodů G'_1 H'_1. Je-li vytknutý hyperboloid o stopách Ω a Ω' hledaným oskulačním hyperboloidem, tu lze dle čl. 5. v příčině jeho vytvoření nahraditi čáry Σ a Σ' resp. čarami Ω a Ω', nahradí-li se současně dané projektivné řady A, B, C, . . a A' B' C', . . řadami, do nichž se tyto řady z bodu X resp. X' na kuželosečku Σ resp. Σ' promítají; souvislost posledních dvou řad jest pak souvislostí (I). Z toho jest zřejmo, že pro oskulační hyperboloid body G'_1, H'_1 musí příslušeti bodům G_1, H_1 danou mezi A, B, C, . . a A', B', C' . . projektivností; a jelikož snadno nahlédneme, že této výmince hoví jediný hyperboloid vytknutého svazku ploch, bude týž hledaným oskulačním hyperboloidem.

9. Stopy Ω na rovině ϱ všech ploch vytčeného svazku tvoří svazek kuželoseček, a vytvoří tedy i družiny G, H bodovou involuci na přímce $\overline{\varrho\varrho'}$ a tudíž i družiny, do nichž se z bodu A na Σ promítají a jež označíme G_2, H_2, též bodovou involuci, jejíž střed δ snadno sestrojíme; obě involuce jsou projektivné se svazkem kuželoseček a tedy i s řadou bodů X na Σ.

Zvrhlá čára svazku kuželoseček se skládá z přímek $\overline{AA_0}$ a $\overline{AW}$, *) nalézá se tudíž bod δ na přímce $\overline{AW}$. Libovolnou další čáru Ω svazku vytkneme jakožto kollineárnou čáru ku Σ, volíme-li A za střed kollineace a přímku nějakou o bodem A vedenou za osu kollineační; její průsečný bod X s čarou Σ jest arci na čáře Ω. V této kollineaci přiřaďující čáře Σ čáru Ω nutno přiřaditi bodu W_2 bod W, značí-li W_2 druhý průsečný bod přímky AW s čarou Σ. Abychom nalezli body G_2, H_2, počítejme přímku $\overline{\varrho\varrho'}$ do téhož systemu, v němž se Ω nalézá, a sestrojme kollineární přímku; tato protne patrně Σ v bodech G_2, H_2. Za tím účelem vytkněme průsečný bod M přímky $\overline{\varrho\varrho'}$ s osou o a stanovme k dalšímu bodu přímky $\overline{\varrho\varrho'}$, na př. k bodu A_0 kollineárný bod A'_0 pomocí družiny W, W_2; spojnice $\overline{A'_0M}$ obsahuje body G_2, H_2 a protíná tedy přímku $\overline{AW}$ v hledaném bodě δ. Označivše literou N průsečný bod přímek $\overline{A_0W}$ a $\overline{A'_0W_2}$ arci na ose o ležící, snadno poznáváme z úplného čtyrrohu $A_0A'_0MN$, že dvojiny bodové A, A; W_2, δ_2; W, δ jsou družiny involuce, značí-li δ_2 průsečný bod přímek $\overline{AW}$ a $\overline{\varrho\varrho'}$. Jest tedy A dvojným bodem involuce, v níž W_2, δ_2 a W, δ jsou dvě družiny, z čehož plyne snadná konstrukce bodu δ.

Otáčí-li se paprsek o kolem bodu A, vytvořuje svazek projektivný s řadou bodů X na Σ a současně perspektivný se svazkem paprsků $\overline{\delta M}$ o vrcholu δ, při čemž $\overline{\varrho\varrho'}$ jest osou perspektivní; z toho vychází, že body G_2, H_2 jsou družinou involuce na Σ projektivné s řadou bodů X, jakož jsme tvrdili.

10. Promítneme-li G_2, H_2 z bodu A na přímku $\overline{\varrho\varrho'}$, obdržíme body G, H, a promítneme-li tyto z bodu X na Σ, obdržíme body G_1, H_1. Každá čára Ω vytknutého svazku podává takto jednu družinu G_1, H_1 a tyto družiny tvoří na Σ involuci projektivnou se svazkem čar Ω a tedy i projektivnou s řadou bodů X.

Skutečně zvolivše bod X na Σ, veďme přímku $\overline{AX}$, která protíná $\overline{\varrho\varrho'}$ v bodě M, veďme přímku $\overline{\delta M}$ protínající Σ v bodech G_2, H_2, promítněme tyto body z A na $\overline{\varrho\varrho'}$ do G, H a tyto opět z X na Σ do bodů G_1, H_1; i vidíme, že bodu X přísluší jedna družina G_1, H_1.

Zvolíme-li naopak bod G_1, obdržíme jeden příslušný bod X a jeden bod H_1 tvořící s G_1 družinu. Skutečně zvolivše X_0 libovolně na Σ, proveďme právě vytknutou konstrukci opačným postupem, tedy veďme $\overline{G_1X_0}$, jenž protne $\overline{\varrho\varrho'}$ v bodě G, veďme $\overline{GA}$, která přímka protíná Σ v bodě G_2, veďme $\overline{G_2\delta}$, jenž protne $\overline{\varrho\varrho'}$ v bodě M a veďme konečně MA, jenž vytkne na Σ bod X'_0; každý takto vytknutý bod souvisí s následujícím patrně projektivně a tedy též první X_0 s posledním X'_0. Splynou-li body X_0 a X'_0, máme hledaný bod

*) Čtenář nechť si laskavě obrazec sám zhotoví.

X příslušný zvolenému bodu G_1; to stane se v samodružných bodech projektivného vztahu X_0, X'_0. Snadno však se lze přesvědčiti, že nechť jest bod G jakkoli na Σ zvolen, dotyčný bod čáry Σ s přímkou $\overline{\varrho\varrho'}$ vždy repraesentuje jeden samodružný bod ve vytknutém projektivném vztahu, a že tedy obdržíme vždy jen jeden na poloze bodu G_1 závislý a úkolu hovící bod X, čímž hořejší výrok dokázán.

Střed δ_1 involuce vytvořené družinami G_1, H_1 snadno obdržíme pomocí dvou družin příslušných dvěma polohám bodu X na Σ; za pomoci třetí takové družiny obdržíme i projektivnou souvislost paprsků svazku δ_1 s příslušnými body X, kterouž souvislost označíme symbolem (II).

11. Zcela obdobně, jako jsme v předchozích dvou článcích odvodili involuci bodových družin G_1, H_1 na Σ, vyvoďme involuci družin G'_1, H'_1 v čl. 8. definovaných na Σ'. Přísluší-li bodům G'_1, H'_1 danou projektivností — přiřaďující bodům A', B', C' body A, B, C — body G_0, H_0, tvoří tyto též družinu involuce na Σ, jejíž střed δ_0 snadno lze sestrojiti za pomoci dvou družin.

Dle čl. 8. stanoví hledaný oskulační hyperboloid na $\overline{\varrho\varrho'}$ takovou družinu bodovou G, H, pro kterou se příslušné družiny G_1, H_1 a G_0, H_0 stotožňují a tedy zapadají do spojnice $\overline{\delta_1\delta_0}$ obou středů involučních. Sestrojíme-li k paprsku $\overline{\delta_1\delta_0}$ onen bod X, jenž mu projektivností (II) přísluší, máme bod, jímž prochází stopa Ω hledaného oskulačního hyperboloidu. Bodem X stanovena stopa Ω a tedy pomocí povrchových přímek $\overline{AV}$ a $\overline{A'W}$ oskulační hyperboloid sám; aneb jinak, přiřadivše u vytknuté prostorové kollineaci (čl. 7.) bod X onomu bodu, v němž přímka $\overline{AX}$ již sestrojený dotyčný hyperboloid protíná, obdržíme hledaný oskulační hyperboloid jakožto plochu přiřaděnou touto kollineací hyperboloidu dotyčnému.

Tím problem v čl. 5. formulovaný řešen a s. na základě infinitesimálných elementů, tedy methodou povaze problemu nejpřiměřenější.

12. Vytkněme si na druhém místě následující jednodušší problem:

Na kuželosečce Σ a na přímce Σ' mimo její rovinu položené jsou dány dvě projektivné řady A, B, C . . a A', B', C' . . vytvořující spojnicemi sdružených bodů plochu; nechť se sestrojí oskulační hyperboloid této plochy podél přímky $\overline{AA'}$.

Především připomeňme, že snadno obdržíme právě tak jako v čl. 4. dotyčný hyperboloid vytvořené plochy podél $\overline{AA'}$. Promítneme-li totiž řadu A, B, C, . . z nějakého bodu kuželosečky Σ na tečnu její t v bodě A do řady A, B'', C'', . ., tu vytvoří spojivé přímky $\overline{AA'}$, $\overline{B''B'}$, $\overline{C''C'}$, . . dotyčný hyperboloid. Aneb vzhledem k čl. 3. protněme tečnu t tečnami kuželosečky Σ v bodech B, C, . . sestrojenými v bodech B_1, C_1, . . a přiřaďme bodům A, B_1, C_1, . . projektivně body A', B'_1, C'_1, . ., značí-li B'_1, C'_1 . ., body harmonické k nějakému pevnému bodu přímky Σ' vzhledem k družinám A', B'; A', C'; . . stanovené. Tak vytknuté dvě projektivné přímé řady vytvoří též dotyčný hyperboloid naší plochy.

Abychom sestrojili oskulační hyperboloid její, veďme přímkou Σ' libovolnou rovinu ϱ' a předpokládejme, že čára Σ dotýká se přímky $\overline{\varrho\varrho'}$, supposice dle čl. 5. přípustná; ostatně v případě, kdy lze přímkou Σ' vésti reálnou tečnou rovinu k čáře Σ, netřeba tuto čáru ani jinou kuželosečkou nahrazovati. Nyní ustanovíme právě tak jako v čl. 6. druhou povrchovou přímku AV hledaného oskulačního hyperboloidu procházející bodem A, s tím však zjednodušením. že se nyní bod P jeví jakožto dotyčný bod tečny $\overline{A_0A'}$ kuželosečky vytvořené v rovině ϱ' dvěma projektivnými přímými řadami A_0, M_0, . . a A', M', . .

Průsečný bod přímky Σ' s rovinou ϱ označme W'; jím procházejí stopy Ω všech hyperboloidů vyvozených z dotyčného hyperboloidu kollineací, při níž jest A středem kollineace a rovina vedená tímto středem a přímkou Σ' rovinou kollineační. Povrchové přímky hledaného oskulačního hyperboloidu téže soustavy, k níž náleží $\overline{AA'}$, stanoví na přímce Σ' a na stopě Ω sdružené body projektivných řad; příslušejí-li tímto způsobem bodům B', C', W', . . body B_1, C_1, W_1, . . na Ω, musí se body tyto jeviti jakožto průměty bodů B, C, W, . . z bodu X stanovené, značí-li X další průsečný bod čar Σ a Ω a přísluší-li bod W na Σ bodu W' na Σ' danou projektivností řad A, B, C, . . a A', B', C', . . Avšak bod W' nalézaje se na čáře Ω se stotožňuje s bodem W_1, pročež musí se bod W' jeviti jakožto průmět bodu W z bodu X stanovený. Z toho jde ihned, že spojnice bodů W a W' protne čáru Σ v bodě X, jímž prochází stopa hledaného oskulačního hyperboloidu. Stopa ta oskulujíc kuželosečku Σ v bodě A a jdouc body W' a X jest úplně stanovena, a tím i oskulační hyperboloid, jejž ostatně nyní opět lze ihned vyvoditi kollineací z hyperboloidu dotyčného.

Tím vytknutý problem řešen.

13. Vraťme se k původnímu cíli, k němuž tato práce směřovala.

Dány-li na dvou kuželosečkách Σ a Σ' v téže rovině dvě projektivné řady A, B, C, . . a A', B', C', . ., vytvořují tyto obecně čáru čtvrté třídy, a jde o sestrojení oskulační kuželosečky k této čáře v bodě, v němž se jí přímka $\overline{AA'}$ dotýká. Pokládejme dané kuželosečky za průměty dvou kuželoseček v prostoru, na nichž tedy též dvě projektivné řady obdržíme; tyto řady vytvoří plochu, k níž dovedeme dle předchozích úvah sestrojiti oskulační hyperboloid podél povrchové přímky, jejíž průmět jest $\overline{AA'}$. Projekce povrchových přímek nalezeného oskulačního hyperboloidu jsou patrně tečnami kuželosečky řešící vytknutý problem.

Obdobně podává předešlý článek řešení úkolu, který požaduje konstrukci oskulační kuželosečky k čáře vytvořené dvěma projektivnými řadami danými v téže rovině, z nichž jedna jest na kuželosečce a druhá na přímce.

Pomíjíme reciprokých úvah jak v prostoru tak v rovině.

Construction von Osculationskegelschnitten der durch krumme projectivische Reihen und Büschel erzeugten Curven.

1. Herr *Schröter*, welcher in seiner Abhandlung »Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde«, Crelle Bd. 54, diese Curven geometrisch untersucht, bestimmt die Berührungspuncte der durch zwei projectivische krumme Reihen erzeugten Curve mit den Projectionsstrahlen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Schritt vorwärts gethan, *indem eine Construction eines die erzeugte Curve osculirenden Kegelschnittes gegeben wird.* Dies geschieht auf Grund der vorangeschickten Lösung des folgenden, an sich interessanten Problems: *Auf zwei in verschiedenen Ebenen ϱ und ϱ' gelegenen Kegelschnitten Σ und Σ' sind zwei projectivische Punctreihen A, B, C.., und A', B', C',.. gegeben; es soll zu der durch die Verbindungsgeraden entsprechender Puncte erzeugten Fläche Π das Osculationshyperboloid längs $\overline{AA'}$ construirt werden.*

2. Sind in einer Ebene zwei Linien Γ und Γ' gegeben und werden die Puncte A, B, C,.. der ersten auf die Puncte A', B', C',.. der zweiten gesetzmässig bezogen, so berührt die durch diese Punctreihen erzeugte Linie (Enveloppe) die Gerade $\overline{AA'}$ in demselben Puncte, in welchem $\overline{AA'}$ von der durch die Punctreihen A, B_1, C_1,.. und A', B'_1, C'_1.. erzeugten Curve berührt wird, falls B_1, C_1,.. die aus einem beliebigen Puncte O der Ebene auf die Tangente t von Γ im Puncte A bestimmten Projectionen der Puncte B, C.. und B'_1, C'_1,.. die aus einem beliebigen Puncte O' auf die Tangente t' von Γ' im Puncte A' genommenen Projectionen von B', C',.. sind.

Sind Γ und Γ' Kegelschnitte und die gegebenen Punctreihen projectivisch, so genügt es O auf Γ und O' auf Γ' zu wählen, um sofort eine Construction des Berührungspunctes zu erhalten. Dies geschieht in der citirten Arbeit.

3. Es mögen jetzt mit B_1, C_1,.. die Puncte bezeichnet werden, in welchen die Tangente t von den in B, C,.. gezogenen Tangenten der Curve Γ geschnitten wird, und B'_1, C'_1,.. die analoge Bedeutung in Ansehung der zweiten Punctreihe haben; so erzeugen diese Punctreihen A, B_1, C_1,.. und A', B'_1, C'_1,.. eine Curve, welche die Gerade $\overline{AA'}$ wiederum in dem vorher bestimmten Puncte berührt.

Ist eine der gegebenen Reihen, z. B. A, B, C,.. auf einer Geraden Γ gelegen, so hat man unter B_1, C_1,.. die Mittelpuncte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$,.. oder allgemeiner die zu einem beliebigen festen Puncte von Γ bezüglich der Paare A, B; A, C;.. bestimmten harmonischen Puncte zu verstehen. Dies gibt im Falle der durch krumme oder durch eine krumme und eine gerade projectivische Reihe erzeugten Curve eine zweite Bestimmungsart des Berührungspunctes.

4. Nun kann zu der im Art. 1 definirten Regelfläche sofort ein dieselbe längs $\overline{AA'}$ berührendes Hyperboloid construirt werden. Projicirt man die ge-

gebenen Reihen auf eine Ebene, so zeigt eine leichte Überlegung, dass die geraden Punctreihen $A, B_1, C_1, \ldots$ und $A', B'_1, C'_1, \ldots$ das verlangte Berührungshyperboloid erzeugen; wobei $B_1, C_1, \ldots$ und $B'_1, C'_1, \ldots$ entweder die im Art. 2 oder im Art. 3 gegebene Bedeutung haben.

5. Die Lösung des im Art. 1 aufgestellten Problems wird durch die Bemerkung erleichtert, *dass man den Kegelschnitt Σ durch einen beliebigen Σ in A osculirenden Kegelschnitt Σ_1 ersetzen kann, falls nur gleichzeitig an Stelle der Reihe $A, B, C, \ldots$ die Punctreihe $A, B_1, C_1, \ldots$ gesetzt wird, die man durch Projection der ersteren Reihe auf Σ_1 aus dem Σ und Σ_1 noch gemeinsamen Puncte X erhält.* Ähnliches gilt von der Reihe auf Σ'. Auf Grund dieser Bemerkung kann, ohne Beinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden, dass die gegebenen Kegelschnitte Σ und Σ' die Schnittlinie $\overline{\varrho\varrho'}$ ihrer Ebenen berühren; dies geschieht im Folgenden.

6. Sei M ein beliebiger Punct von Σ, $\overline{MM_0}$ die Tangente von Σ in M, und M_0 auf $\overline{\varrho\varrho'}$ gelegen, ebenso $\overline{AA_0}$ die Tangente von Σ in A und A_0 auf $\overline{\varrho\varrho'}$ gelegen; so geht die Berührungsebene μ von M im Puncte M durch die Puncte M, M', M_0 und die Berührungsebene α des Punctes A durch A, A', A_0. Nähert sich M dem Puncte A, so nähert sich die Schnittlinie $\overline{\alpha\mu}$ der zu $\overline{A\,A_0}$ hinsichtlich der Fläche M conjugirten Geraden. Nun sind $\overline{A_0\,A'}$ und $\overline{M_0\,M'}$ die Spuren von α und μ auf ϱ', und somit die Grenzlage ihres Schnittpunctes der Berührungspunct P der Geraden $\overline{A_0\,A'}$ mit der alle Verbindungslinien $A_0\,A'$, $\overline{M_0\,M'}, \ldots$ einhüllenden Curve; welcher Punct nach Art. 2 oder 3 leicht bestimmt werden kann, da die Reihen $A_0, M_0, \ldots$ und $A', M', \ldots$ projectivisch sind. Construirt man nun zu der Erzeugenden $\overline{A\,A'}$ die bezüglich der Geraden $\overline{A\,A_0}$ und $A\,P$ harmonische Gerade $\overline{A\,V}$, so ist dies die zweite asymptotische Tangente von Π im Puncte A und somit die zweite durch A gehende Erzeugende des gesuchten Osculationshyperboloids; ihre Spur V auf ϱ ist also der zu A' bezüglich A_0 oder P harmonische Punct V. Ähnlich ergibt sich die Spur W der zweiten durch A' gehenden Erzeugenden $\overline{A'\,W}$ des Osculationshyperboloides.

7. Das gesuchte Osculationshyperboloid gehört zum Flächenbüschel zweiten Grades, der von allen zu dem construirten Berührungshyperboloid collinearen Flächen gebildet wird, falls man A zum Collineationscentrum und die durch A, A', W gehende Ebenen zur Collineationsebene wählt. Die Spuren dieser Flächen auf der Ebene ϱ osculiren Σ in A und gehen durch W, die Spuren auf ϱ' osculiren Σ' in A' und gehen durch V.

8. Es mögen Ω und Ω' die Spuren eines beliebigen Hyperboloids des eben erwähnten Büschels auf den Ebenen ϱ und ϱ' sein, und G, H die Schnittpuncte dieser Fläche mit der Geraden $\overline{\varrho\varrho'}$ bezeichnen.

Die Erzeugenden dieses Hyperboloides, u. zw. jenes Systems, zu dem $\overline{A\,A'}$ gehört, bestimmen auf Ω und Ω' entsprechende Puncte zweier projectivischen

Reihen, in denen G und H sich selbst entsprechen; diese projectivische Beziehung mag mit (I) bezeichnet werden.

Der weitere Schnittpunct von Σ und Ω mag X, und jener von Σ' und Ω' mag X' heissen. Man projicire die Puncte G, H aus X auf Σ in die Puncte $G_1\ H_1$ und aus X' auf Σ' in die Puncte G'_1, H'_1. Nach Art. 5 folgt leicht, dass, falls das gewählte Hyperboloid das gesuchte Osculationshyperboloid ist, *die Puncte* G_1, H_1 *den Puncten* $G'_1\ H'_1$ *durch die zwischen* $A, B, C, ..$ und $A', B', C', ..$ *gegebene projectivische Beziehung entsprechen müssen.*

9. Die von allen Spuren Ω auf $\overline{\varrho\varrho'}$ bestimmten Punctepaare G, H bilden eine Involution; werden die Puncte G, H aus dem Puncte A auf Σ in die Puncte G_2, H_2 projicirt, so erhält man ein Punctepaar einer mit der Reihe der Puncte X projectivischen Involution auf Σ, deren Centrum δ_2 leicht bestimmt werden kann.

10. Werden die Puncte G, H aus dem zugehörigen Puncte X auf die Linie Σ in die Puncte $G_1\ H_1$ projicirt, so erhält man ein Punctepaar einer auf Σ gelegenen Involution, deren Centrum δ_1 leicht bestimmt werden kann, und die mit der Reihe der Puncte X ebenfalls projectivisch ist; diese zwischen dem Büschel δ_1 und der krummen Reihe der Puncte X bestehende projectivische Beziehung mag mit (II) bezeichnet werden.

11. Analog bilden G'_1, H'_1 ein Punctepaar einer auf Σ' gelegenen Involution, die mit den vorhergehenden projectivisch ist. Sind den Puncten G'_1, H'_1 durch die zwischen $A', B', C', ..$ und $A, B, C, ..$ gegebene Projectivität die Puncte G_0, H_0 zugeordnet, so bilden diese ebenfalls ein Paar einer auf Σ gelegenen Involution, deren Centrum δ_0 leicht construirt werden kann.

Nach Art. 8 schneidet das gesuchte Osculationshyperboloid die Gerade $\overline{\varrho\varrho'}$ in einem Punctepaar G, H, für welches die entsprechenden Punctepaare G_1, H_1 und $G_0\ H_0$ zusammenfallen. Construirt man somit zum Strahle $\delta_1\ \delta_0$ jenen Punct X, der ihm zufolge der Beziehung (II) entspricht, so ist X ein Punct der Spur Ω des gesuchten Hyperboloids, und hiedurch diese Spur bestimmt. Mit Hilfe der Geraden $\overline{A\,V}$ und $A'\,W$ kann nun das Osculationshyperboloid sofort construirt werden, oder auch als collineare Fläche zum Berührungshyperholoid abgeleitet werden mittels der in Art. 7 fixirten Collineation, falls der Punct X jenem Puncte zugeordnet wird, in welchem die Gerade $\overline{A\ X}$ das Berührungshyperboloid schneidet.

12. Viel einfacher gestaltet sich die Construction des Osculationshyperboloides in dem Falle, dass eine der erzeugenden projectivischen Reihen etwa $A', B', C', ..$ auf einer Geraden Σ' liegt.

Vor allem kann ein die erzeugte Fläche längs der Geraden $\overline{A\,A'}$ berührendes Hyperboloid genau so wie im Art. 4 construirt werden. Hierauf lege man durch Σ' eine beliebige Ebene ϱ' und setze voraus, dass der Kegelschnitt Σ die Schnittgerade $\overline{\varrho\varrho'}$ berühre, eine nach Art 5 zulässige Voraussetzung. Es kann sodann so wie im Art. 6 die zweite durch A gehende Er-

zeugende $\overline{A\,V}$ des gesuchten Osculationshyperboloides construirt werden, mit der Vereinfachung jedoch, dass der Punct P als Berührungspunct der Geraden $\overline{A_0\,A'}$ mit dem durch die projectivischen geraden Reihen $A_0, M_0, \ldots$ und $A', M', \ldots$ erzeugten Kegelschnitte erscheint.

Der Schnittpunct der Geraden Σ' mit der Ebene ϱ heisse W'; durch ihn gehen die Spuren Ω auf ϱ aller Hyperboloide, da sich zum Berührungshyperboloid als collineare Flächen ergeben, falls A zum Collineationscentrum und die durch A und Σ' gelegte Ebene zur Collineationsebene gewählt wird. Die Erzeugenden des Osculationshyperboloides jenes Systems, zu dem $\overline{A\,A'}$ gehört, bestimmen auf Σ' und der Spur Ω entsprechende Puncte zweier projectivischen Reihen; entsprechen auf diese Weise den Puncten $B', C', W', \ldots$ von Σ' die Puncte $B_1, C_1, W_1, \ldots$ auf Ω, so müssen diese Puncte als die aus X auf Ω genommenen Projectionen der Puncte $B, C, W, \ldots$ erscheinen, falls X den weiteren Schnittpunct von Σ und Ω, und W jenen Punct von Σ bezeichnet, der dem Puncte W' durch die zwischen $A', B', C', \ldots$ und $A, B, C, \ldots$ gegebene Projectivität entspricht. Allein der Punct W' fällt offenbar mit dem Puncte W_1 zusammen, so dass also W' als die aus X bestimmte Projection von W erscheinen muss. Die Verbindungsgeraden der Puncte W und W' schneidet somit Σ in dem Puncte X, durch den die Spur Ω des gesuchten Osculationshyperboloides geht; hiedurch ist dieses bestimmt.

13. Um nun einen Osculationskegelschnitt zu der durch zwei projectivische, auf zwei Kegelschnitten Σ und Σ' in derselben Ebene gelegene Punctreihen erzeugten Curve zu construiren, hat man bloss diese Kegelschnitte als Projectionen zweier in verschiedenen Ebenen gelegenen Kegelschnitte aufzufassen. Die auf letzteren sich ergebenden projectivischen Reihen erzeugen eine Fläche, deren Osculationshyperboloid construirt werden kann; die Projectionen der Erzeugenden dieses Hyperboloides sind offenbar Tangenten eines der Aufgabe genügenden Kegelschnittes.

Ähnlich ergibt sich der Osculationskegelschnitt im Falle, dass eine der gegebenen Reihen gerade ist.

Auf die durch das Gesetz der Reciprocität sich ergebenden Resultate mag bloss hingewiesen werden.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 6.

O ELLIPTICKÉM INTEGRALU TŘETÍHO DRUHU.

NAPSAL

EDUARD WEYR.

PŘEDLOŽENO DNE 12. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

Hodnoty, kterých nabývá pravá strana ve formuli Jacobiho

$$(1)\qquad \int_o^x \frac{k^2 sn\,a\ cn\,a\ dn\,a\ sn^2 x}{1-k^2 sn^2 a\ sn^2 x}\ dx = x\ \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\ \log\ \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

klademe-li za logarithmus různé jeho hodnoty, odpovídají hodnotám, jichž nabývá integral různými cestami integračními. *Hermite* v pojednání »Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce«, Comptes rendus t. XCIV, p. 901, stanovil hodnotu tohoto logarithmu v případě kompletních integralů

$$\Pi(a) = \int_o^K \frac{k^2 sn\,a\ cn\,a\ dn\,a\ sn^2 x}{1-k^2\ sn^2 a\ sn^2 x}\ dx,$$

$$i\,\Pi'(a) = \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 sn\,a\ cn\,a\ dn\,a\ sn^2 x}{1-k^2\ sn^2 a\ sn^2 x}\ dx,$$

a za té supposice, že cesta integrační jest přímá. Následující úvaha, vedoucí k témuž cíli cestou novou, nebude snad prosta zajímavosti.

1. Dle formule

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(o)} =$$

$$\frac{\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\left(1-2q^5\cos\frac{\pi x}{K}+q^{10}\right)..}{[1-q)\ (1-q^3)\ (1-q^5)..]^2}$$

máme

$$(2)\qquad \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)} = \frac{1-2q\cos\frac{\pi(x-a)}{K}+q^2}{1-2q\cos\frac{\pi(x+a)}{K}+q^2}\cdot\frac{1-2q^3\cos\frac{\pi(x-a)}{K}+q^6}{1-2q^3\cos\frac{\pi(x+a)}{K}+q^6}\cdot..$$

Jde o stanovení přírůstu logarithmu tohoto výrazu, mění-li se realné x nejdříve od o do K, při čemž počátečná a konečná hodnota výrazu jsou patrně stejné; tento přírůst rovná se součinu z imaginarné jednotky a z přírůstu argumentu napsaného výrazu.

Všecky faktory napsaného nekonečného součinu mají tvar zlomku

$$\frac{1 - 2q\cos\frac{\pi(x-a)}{K} + q^2}{1 - 2q\cos\frac{\pi(x+a)}{K} + q^2},$$

jehož čitatel a jmenovatel označíme literami A a B. Položivše $a = \alpha + i\beta$, kde α, β značí realné hodnoty, snadno nalezneme

$$A = 1 + q^2 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\cos\frac{\pi(x-\alpha)}{K} - iq\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\sin\frac{\pi(x-\alpha)}{K},$$

$$B = 1 + q^2 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\cos\frac{\pi(x+\alpha)}{K} + iq\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\sin\frac{\pi(x+\alpha)}{K}.$$

Položme

$$A_1 = 1 + q^2 - A = \xi + i\eta,$$
$$B_1 = 1 + q^2 - B = \xi_1 + i\eta_1,$$

dále

$$g = q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right), \qquad g_1 = q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right),$$

čímž

$$\frac{\xi}{g} = \cos\frac{\pi(x-\alpha)}{K}, \qquad \frac{\eta}{g_1} = \sin\frac{\pi(x-\alpha)}{K},$$

$$\frac{\xi_1}{g} = \cos\frac{\pi(x+\alpha)}{K}, \qquad \frac{\eta_1}{g_1} = -\sin\frac{\pi(x+\alpha)}{K}.$$

Předpokládejme nejprve, že $\beta > o$ a tedy i $g_1 > o$.

Roste-li realná proměnná x od x do $x + K$, tu body ξ, η a ξ_1, η_1 čili stručněji A_1 a B_1 popisují patrně polovici ellipsy o středu o a poloosách g, g_1, a sice bod A_1 ve směru kladném, bod B_1 ve směru záporném; roste-li x specialně od o do K, vycházejí A_1 a B_1 z téhož bodu. Z toho soudíme, že i body A a B opíší, vycházejíce z téhož bodu, každý jednu polovici ellipsy, kterou obdržíme, pošineme-li první ellipsu ve směru osy ξ o délku $1 + q^2$; a sice ji opíše bod A opět ve směru kladném, bod B ve směru záporném.

Nalézá-li se počátek mimo druhou ellipsu, tu tedy argumentu hodnoty A přibude právě o tolik, oč přibude argumentu hodnoty B, pročež se argument podílu $\frac{A}{B}$ vrátí do své počáteční hodnoty.

Je-li však počátek uvnitř druhé ellipsy, tu, značí-li φ přírůst argumentu hodnoty A, jest $-(2\pi - \varphi)$ přírůst argumentu hodnoty B, a tedy 2π přírůst argumentu podílu $\frac{A}{B}$

Avšak počátek jest patrně mimo druhou ellipsu, je-li pošinutí $1 + q^2 > g$, a uvnitř při $1 + q^2 < g$; t. j. nutno přihlížeti k nerovnostem

$$q + \frac{1}{q} \gtrless e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}},$$

to jest

$$K' \gtrless \beta,$$

kladouce $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

Jednotlivé faktory součinu na pravé straně rovnice (2) nám podává podíl $\frac{A}{B}$, klademe-li za q posloupně q, q^3, q^5,... t. j. $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, $e^{-\frac{3\pi K'}{K}}$, $e^{-\frac{5\pi K'}{K}}$,... Je-li tedy β obsaženo mezi hodnotami $(2\mu - 1)K'$ a $(2\mu + 1)K'$, kde μ značí celistvé kladné číslo, tu se argument faktorů $\frac{A}{B}$ příslušných hodnotám $q^{2\mu+1}$, $q^{2\mu+3}$,... nezmění, a argumentu každého z μ předchozích faktorů příslušných hodnotám q, q^3,.., $q^{2\mu-1}$ přibude o 2π, tedy argumentu celého nekonečného součinu o $\mu 2\pi$, a logarithmu výrazu $\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$ o hodnotu $\mu 2\pi i$. Máme tedy dle formule (1) v uvažovaném případě $\beta > o$

$$\Pi(a) = K\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mu\pi i.$$

Předpokládejme za druhé $\beta < o$ a tedy i $g_1 < o$. Pak bod A_1 opisuje jednu polovici první ellipsy ve směru záporném a B_1 druhou polovici ve směru kladném; totéž platí o bodech A a B opisujících každý jednu polovici druhé ellipsy.

Jest-li počátek mimo druhou ellipsu, přibude argumentu hodnot A a B stejně, a tedy se argument podílu $\frac{A}{B}$ vrátí do své počátečné hodnoty. Je-li ale počátek uvnitř druhé ellipsy a přibude-li argumentu hodnoty A o $-\varphi$, přibude argumentu hodnoty B patrně o $2\pi - \varphi$, a tedy argumentu podílu $\frac{A}{B}$ o hodnotu -2π.

Nalézá-li se β mezi hodnotami $-(2\mu - 1)K'$ a $-(2\mu + 1)K'$, nastane druhý případ pro faktory $\frac{A}{B}$ příslušné hodnotám $q, q^3, .., q^{2\mu-1}$, a první pro ostatní, pročež argument výrazu $\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$ vzroste o $-\mu 2\pi$, a logarithmus jeho o $-\mu 2\pi i$, čímž pro $\beta < o$ nabýváme dle (1)

$$\Pi(a) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \mu\pi i.$$

Tím nalezen první výsledek v citované práci odvozený.

2. Abychom stanovili druhý kompletní a přímočarý integral, uvažme, že máme dle formule (1)

$$i\,\Pi^1(a) = i\,K'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}L$$

značí-li L přírůst funkce $\log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$ na přímé cestě vedoucí z K do $K+iK'$. Píšeme-li $K+iu$ místo x, mění se tu realné u od o do K', a učiníme-li ještě $a = ia_1$, jest L příslušný přírůst $\log \frac{\Theta\left(K+i\,(u-a_1)\right)}{\Theta\left(K+i\,(u+a_1)\right)}$.

Avšak formule Jacobiho

$$\frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(o)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi u u}{4KK'}}\, \frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(o,k')}$$

podává

$$\frac{\Theta(iu+K)}{\Theta(iv+K)} = e^{\frac{\pi(u^2-v^2)}{4KK'}}\, \frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(v+K',k')},$$

z čehož, píšeme-li $u-a_1$ místo u a $u+a_1$ místo v, plyne

$$\frac{\Theta\left(K+i\,(u-a_1)\right)}{\Theta\left(K+i\,(u+a_1)\right)} = e^{-\frac{\pi a_1 u}{KK'}}\, \frac{\Theta(u-a_1+K',k')}{\Theta(u+a_1+K',k')}$$

Z toho soudíme, že

$$L = \frac{\pi a i}{K} + L',$$

značí-li L' přírůst hodnoty $\log \frac{\Theta(u-a_1+K',k')}{\Theta(u+a_1+K',k')}$, mění-li se realné u od o do K', aneb, co jest totéž, přírůst hodnoty $\log \frac{\Theta(x-a_1,k')}{\Theta(x+a_1,k')}$ mění-li se realné x od K' do $2K'$; přírůst ten však stanoven úvahou v předchozím článku. Položivše tedy opět $a = \alpha + i\beta$, čímž $\alpha_1 = \beta - i\alpha$, máme tyto výsledky:

Je-li $-\alpha$ mezi $(2\mu-1)\,K$ a $(2\mu+1)\,K$, jest $L' = 2\mu\pi i$, a je-li mezi $-(2\mu-1)\,K$ a $-(2\mu+1)\,K$, jest $L' = -2\mu\pi i$. Z toho soudíme, že platí

$$\Pi'(a) = K'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\pi a}{2K} - \mu\pi,$$

je-li α mezi $(2\mu-1)\,K$ a $(2\mu+1)\,K$, a že platí

$$\Pi'(a) = K'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\pi a}{2K} + \mu\pi$$

v případě, kdy α jest mezi $-(2\mu-1)\,K$ a $-(2\mu+1)\,K$.

Tím nalezen druhý výsledek odvozený v citované práci.

Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce.

Partant de l'expression donnée par Jacobi

$$(1)\qquad \int_o^a \frac{k^2 sn\,a\; cn\,a\; dn\,a\; sn^2 x}{1-k^2 sn^2 a\; sn^2 x}\, dx = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

M. *Hermite*, dans sa note »Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce«, Comptes rendus t. XCIV, p. 901, détermine la valeur précise du logarithme dans le cas des fonctions complètes

$$\Pi(a) = \int_0^K \frac{k^2 sn\,a\ cn\,a\ dn\,a\ sn^2 x}{1 - k^2 sn^2 a\ sn^2 x}\ dx,$$

$$i\,\Pi^1(a) = \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 sn\,a\ cn\,a\ dn\,a\ sn^2 x}{1 - k^2 sn^2 a\ sn^2 x}\ dx,$$

en supposant les deux intégrales rectilignes. Dans ce qui suit je parviens aux mêmes résultats par une voie nouvelle, qui, peut-être, ne sera pas sans intérêt.

On a

$$(2)\qquad \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)} = \frac{1 - 2q\cos\frac{\pi(x-a)}{K} + q^2}{1 - 2q\cos\frac{\pi(x+a)}{K} + q^2} \cdot \frac{1 - 2q^3\cos\frac{\pi(x-a)}{K} + q^6}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi(x+a)}{K} + q^6} \cdot \cdot,$$

et il s'agit de l'accroissement du logarithme de cette expression, la variable réelle x allant de o à K. Tous les facteurs de ce produit sont de la forme

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - 2q\cos\frac{\pi(x-a)}{K} + q^2}{1 - 2q\cos\frac{\pi(x+a)}{K} + q^2},$$

et si l'on pose $a = \alpha + \beta i$, α et β étant réels, on trouve

$$A = 1 + q^2 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\cos\frac{\pi(x-\alpha)}{K} - iq\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\sin\frac{\pi(x-\alpha)}{K},$$

$$B = 1 + q^2 - q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\cos\frac{\pi(x+\alpha)}{K} + iq\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right)\sin\frac{\pi(x+\alpha)}{K}.$$

Faisons

$$A_1 = 1 + q^2 - A = \xi + i\eta,$$
$$B_1 = 1 + q^2 - B = \xi_1 + i\eta_1,$$
$$g = q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right), \qquad g_1 = q\left(e^{\frac{\pi\beta}{K}} - e^{-\frac{\pi\beta}{K}}\right),$$

et nous aurons

$$\frac{\xi}{g} = \cos\frac{\pi(x-\alpha)}{K}, \qquad \frac{\eta}{g_1} = \sin\frac{\pi(x-\alpha)}{K},$$
$$\frac{\xi_1}{g} = \cos\frac{\pi(x+\alpha)}{K}, \qquad \frac{\eta_1}{g_1} = -\sin\frac{\pi(x+\alpha)}{K}.$$

Soit, en premier lieu, $\beta > o$, donc aussi $g_1 > o$. Si la variable réelle croît de x à $x + K$, les points A_1 et B_1 décrivent chacun la moitié d'une ellipse aux

demi-axes g, g_1 et dont le centre est à l'origine, A_1 parcourant la demi-ellipse dans le sens positif, B_1 dans le sens négatif. Si, spécialement, x va de o à K, les points A_1 et B_1 partent de la même position initiale; donc les points A et B partant d'un même point parcourent aussi chacun la moitié d'une seconde ellipse qu'on obtient par une translation de la première ellipse suivant l'axe réel et de grandeur $1 + q^2$; A se mouvera dans le sens positif, B dans le sens négatif.

Si l'origine se trouve en dehors de la seconde ellipse, l'argument de A eroîtra de la même quantité que l'argument de B, et l'argument du quotient $\frac{A}{B}$ reprendra sa valeur initiale. Si, au contraire, l'origine se trouve à l'intérieur de la seconde ellipse on aura, φ étant l'accroissement de l'argument de A, pour l'accroissement de l'argument de B évidemment $-(2\pi - \varphi)$, de sorte que 2π sera l'accroissement de l'argument de $\frac{A}{B}$. Or, le premier cas a lieu si l'on a $1 + q^2 > g$, et le second si l'on a $1 + q^2 < g$; ainsi c'est l'inégalité

$$q + \frac{1}{q} \gtrless e^{\frac{\pi\beta}{K}} + e^{-\frac{\pi\beta}{K}},$$

c'est-à-dire

$$K' \gtrless \beta,$$

qui en décide, étant posé $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$

Maintenant puisque les facteurs de produit (2) sont donnés par $\frac{A}{B}$ si l'on y met à la place de q successivement q, q^3, q^5, .. on a le résultat suivant.

Si β se trouve entre $(2\mu - 1)K'$ et $(2\mu + 1)K'$, μ étant un entier positif, l'argument des facteurs qui correspondent aux valeurs $q^{2\mu+1}, q^{2\mu+3}, \ldots$ ne change pas, tandisque l'argument de chacun des μ facteurs qui correspondent à q, q^3, .., $q^{2\mu-1}$ s'accroît de 2π, et par-là l'argument du produit infini (2) de $\mu\, 2\pi$. Par cela la formule (1) donne dans la cas de $\beta > o$

$$\Pi(a) = K\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mu\pi i.$$

Supposons, en second lieu, $\beta < o$, donc aussi $g_1 < o$. Rien ne change dans ce qui précède que le sens dans lequel les points A et B décrivent les demi-ellipses, de sorte que, l'origine étant à l'intérieur de la seconde ellipse, on trouve -2π pour l'accroissement de l'argument de $\frac{A}{B}$. On a donc, β étant entre $-(2\mu - 1)K'$ et $-(2\mu + 1)K'$,

$$\Pi(a) = K\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \mu\pi i.$$

Pour traiter d'une manière analogue la seconde fonction complète, remarquons qu'on a, d'après (1),

$$i\,\Pi'(a) = i\,K'\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\,L,$$

en désignant par L l'accroissement du $\log \frac{\Theta(\pi - a)}{\Theta(x + a)}$, quand x va par le chemin droit de K à $K + i K'$. Si l'on écrit $K + iu$ au lieu de x, la variable réelle u ira de o à K', et si l'on fait $a = iu_1$, la quantité L sera l'accroissement de $\log \frac{\Theta\left(K + i(u - a_1)\right)}{\Theta\left(K + i(u + a_1)\right)}$. Mais la formule de Jacobi

$$\frac{\Theta(iu + K)}{\Theta(o)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, e^{\frac{\pi u u}{4 K K'}}\, \frac{\Theta(u + K', k')}{\Theta(o, k')},$$

donne

$$\frac{\Theta\left(K + i(u - a_1)\right)}{\Theta\left(K + i(u + a_1)\right)} = e^{-\frac{\pi a_1 u}{K K'}}\, \frac{\Theta(u - a_1 + K', k')}{\Theta(u + a_1 + K' k')}$$

et par-là

$$L = \frac{\pi a i}{K} + L',$$

en désignant par L' l'accroissement de $\log \frac{\Theta(u - a_1 + K', k')}{\Theta(u + a_1 + K', k')}$, quand la variable réelle u va de o à K', ou bien l'accroissement de $\log \frac{\Theta(x - a_1, k')}{\Theta(x + a_1, k')}$, la variable réelle x allant de K' à $2K'$; accroissement qui est donné par les considérations précédentes. On a donc, puisque $a_1 = \beta - i\alpha$,

$$L' = \mp 2\mu\pi i,$$

suivant que $-\alpha$ se trouve entre $(2\mu - 1)K$ et $(2\mu + 1)K$, ou entre $-(2\mu - 1)K$ et $-(2\mu + 1)K$. Cela nous donne enfin

$$\Pi'(a) = K' \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\pi a}{2K} \mp \mu\pi,$$

le signe supérieur ayant lieu, si α est entre $(2\mu - 1)K$ et $(2\mu + 1)K$, et le signe inférieur, si α est entre $-(2\mu - 1)K$ et $-(2\mu + 1)K$.

On a ainsi retrouvé les deux résultats obtenus par M. *Hermite*.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 7.

POMĚR FYSIOLOGICKÉHO ÚČINKU K CHEMICKÉ KONSTITUCI NĚKTERÝCH DERIVÁTŮ BENZOLOVÝCH.

SDĚLUJE

Dr. K. CHODOUNSKÝ.

PŘEDLOŽENO DNE 12. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NAKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

Snesl jsem ve své publikaci »*Některé základní rysy theoretické farmakologie*« větší řadu fakt illustrujících poměr mezi konstitucí chemickou a účinkem fysiologickým, z nichž vyplývá, že jsou sice funkce fysiologická a chemická u vzájemném poměru, že však tento poměr studován jen u málo skupin a proto daleko nestačí dosavadní naše vědomosti, aby se již nyní pomýšleti smělo na nějakou dedukci všeobecných zákonův. Z velké řady otázek čeká i význam substituce radikálův mastné řady v látky aromatické svého plného vyjasnění a pokusil jsem se touto prací o příspěvek v tom směru.

Pokusy vykonány s trojí řadou látek:

1. benzol, toluol, ethylbenzol, cymol, chlorbenzol i toluolsulfonan sodnatý;
2. fenol, anisol, fenetol, fenolsíran sodnatý;
3. amidobenzol, form-, acet-, butyr-, isobutyr-, valeryl-, parachloracetanilid i octan a síran anilinu.

Veškeré deriváty anilinu zřídil jsem v laboratoři organické chemie na vysokých školách technických; měl jsem pohotově více látek, než s kterými bylo experimentováno, jako anilid kyseliny benzolsulfonové, benzolsulfamid, avšak jich nedostatečná rozpustnosť bránila upotřebení.

Přípravu látek samých netřeba široce opisovati a stačí podotknouti, že všechny byly náležitě překrystallovány, až bodem tání čistota jejich se stala nepochybnou. Aromatické uhlovodíky nasycené, ze sbírek ústavu mi propůjčené, jsou předestillovány frakciovaně.

Veškeré pokusy vykonány stejným způsobem a stejnou dávkou, až na málo výminek, aby porovnání bylo jasné a jak možno spolehlivé. Žabám vstřikovány roztoky v mizní vak hřbetní, králíkům v dutinu břišní.

Vzdávám na tomto místě dík přednostovi laboratoře organické chemie prof. dru. B. Raýmanovi za laskavé přispění v práci i panu státnímu radovi prof. dru. A. Tomsovi, v jehož ústavu mi umožněno bylo vykonání pokusův

A. Pokusy s benzolem, toluolem, ethylbenzolem, cymolem, chlorbenzolem a toluolsulfonanem sodnatým.

a) Ž á b y.

I. a II. 3 h. 55 m. vstřiknuto po 0,2 ccm. *benzolu.*
4 » 4 » stav paretický; ze hřbetní polohy se vyprostí jen s namáháním.
4 » 20 » parésa význačnější; reflexy neporušené.

*

	4	h. 50	m.	žáby lezou ještě, avšak líně.
	5	» 20	»	menší žába mrtva.
	6	» 15	»	větší žába žije; parésa trvá, reflexy nezanikly.
III. a IV.	3	» 57	»	vstřiknuto 0,2 ccm. *toluolu.*
	4	» 4	»	parésa, již brzy následovala paralysa a zánik reflexů.
	4	» 30	»	paralysa trvá, fibrillární smršťování svalstva, reflexní dráždivosť zvýšena.
	4	» 46	»	první z žab mrtva.
	4	» 49	»	druhá žába mrtva.
V.	3	» 45	»	vstřiknuto 0,2 ccm. *tuluolu.*
	3	» 54	»	parésa.
	4	» 25	»	reflexy ve velké míře zvolněny.
	4	» 30	»	paralysa.
	4	» 45	»	reflexní dráždivosť zvýšena. Smrť na to v několika minutách.
VI.	3	» 54	»	0,2 *tuluolu* — obraz tentýž.
VII. a VIII.	3	» 47	»	vstřiknuto po 0,2 ccm. *ethylbenzolu.*
	4	» 11	»	parésa.
	4	» 15	»	u první parésa se zvolněnými reflexy, u druhé paralysa se zánikem reflexů.
	4	» 45	»	u první rovněž paralysa, zvětšená reflexní dráždivosť.
	5	» —	»	smrť u druhé.
	5	» 26	»	smrť u první.
IX.	3	» 44	»	vstřiknuto 0,2 ccm. *ethylbenzolu.*
	3	» 54	»	parésa.
	4	» 1	»	dech volnější a obtížnější.
	4	» 25	»	reflexy zvolněny
	4	» 26	»	paralysa.
	5	» 50	»	smrť.
X.	3	» 45	»	vstřiknuto 0,2 ccm. *ethylbenzolu.*
	3	» 54	»	parésa.
	4	» 2	»	dech zvolněný a obtížný.
	4	» 29	»	paralysa.
	5	» 50	»	ještě živa.
XI. a XII.	4	» 4	»	vstřiknuto po 0,2 ccm. *cymolu.*
	4	» 15	»	parésa, reflexy správné.
	4	» 45	»	paralysa, reflexy zanikají.
	4	» 47	»	smrť u jedné.
	4	» 50	»	smrť u druhé.

XIII.	4 h.	35	m.	vstřiknuto 0,2 ccm. *chlorbenzolu* menší žábě.
	4 »	43	»	paralysa, zánik reflexů.
	4 »	46	»	smrť.
XIV.	4 »	40	»	větší žábě 0,2 ccm. *chlorbenzolu.*
	4 »	53	»	parésa, reflexy zvolněné.
	5 »	5	»	křečovité stahování skupin svalstva na trupu, hlavě a končetinách.
	5 »	17	»	křeče zaznamenané počínají ochabovati.
	5 »	21	»	křeče dostavují se jen po delších intervallech.
	6 »	31	»	smrť.
XV.	3 »	45	»	menší žábě 0,2 ccm. *chlorbenzolu.*
	4 »	—	»	parésa.
	4 »	2	»	paralysa zadních končetin, zánik reflexů, přední končetiny paretické se správnými reflexy.
	4 »	11	»	paralysa předních končetin.
	4 »	37	»	smrť bez křečí.
XVI.	3 »	45	»	větší žábě, v pravý vak hřbetní 0,2 ccm. *chlorbenzolu.*
	4 »	4	»	zadní pravá končetina paralysována, žába ji s sebou vleče při skoku.
	4 »	11	»	parésa celková; žába se nevyprostí z polohy hřbetní.
	4 »	32	»	dostavují se křeče klonické, počínající na svalstvu hlavy a předních končetinách.
	4 »	40	»	od hlavy a předních končetin lze reflexy vybavovati; křeče trvají.
	5 »	5	»	křeče slábnou a vystupují v intervallech; paralysa všeobecná.
	6 »	15	»	smrť.
XVII.	4 »	18	»	větší žábě v levý vak hřbetní 0,2 ccm. *chlorbenzolu.*
	4 »	29	»	paralysa levé zadní končetiny.
	4 »	32	»	paralysa obou zadních končetin a parésa celková.
	4 »	37	»	od hlavy a předních končetin lze reflexy vybavovati.
	4 »	40	»	počínají klonické křeče ve svalstvu hlavy a předních končetin.
	4 »	45	»	prudké klonické křeče v přední polovině těla; žádné v paralysovaných zadních končetinách.
	5 »	25	»	paralysa všeobecná.
	5 »	30	»	smrť.
XVIII. a XIX.	5 »	50	»	vstřiknuto dvěma žabám po 0,2 g. *tuluolsulfonanu sodnatého* v roztoku vodném.

5 h. 58 m. zvířata podrážděna; značná hypersekrece kůže.
6 » 18 » normálné chování.
6 » 30 » svěží a čilé.
Po 24 hod. zdrávy.

b) K r á l í c i.

XX. 4 h. 21 m. vstříknuto králíku (660 g.) do dutiny břišní 0,2 g. *benzolu.*
6 » 15 » zůstal úplně normální.

XXI. 4 » 21 » králíku 655 g. 0,2 g. *toluolu.*
4 » 30 » zrychlené dýchání, slabý stav paretický.
4 » 31 » parésa vyznačená; králíkovi klesá hlava, byv na bok povalen, zůstane ležeti; klidný dech; hluboká narkosa, z níž se dá jen ztěží probudit.
6 » 20 » narkosa trvá dále.

XXII. 4 » 10 » králíku 650 g. 0,2 g. *toluolu.*
4 » 11 » urychlený dech.
4 » 45 » úplná narkosa; dech volný.
5 » 55 » narkosa trvá.
Smrť v několika hodinách.

XXIII. 3 » 50 » králíku 600 g. 2,0 g. *ethylbenzolu.*
3 » 55 » urychlený dech.
4 » 2 » parésa.
5 » — » urychlený dech i parésa trvají; hlavu dovede králík držeti v normální poloze.

XXIV. 4 » 21 » králíku 660 g. 0,2 g. *cymolu.*
4 » 30 » zrychlené dýchání, slabý paretický stav.
4 » 31 » vyznačená parésa, zejména končetin zadních.
4 » 40 » hluboká narkosa, klidný dech, reflexy správné.
6 » 20 » narkosa nezměněná.

XXV. 4 » 21 » králíku 650 g. 0,2 g. *tuluolsulfonanu sodnatého.*
6 » 20 » zvíře zůstalo úplně normální.

XXVI. 4 » — » králíku 450 g. 0,2 g. *chlorbenzolu.*
5 » 43 » tuposť; potácí se při běhu.
6 » 15 » zotaven.

XXVII. 4 » 46 » králíku 540 g. 0,3 g. *chlorbenzolu.*
6 » 15 » zvíře zůstalo normální.

B. Pokusy s fenolem, anisolem, fenetolem a fenolsiranem sodnatým.

a) Žáby.

I. 3 h. 50 m. žábě 0,1 ccm. *fenolu.*
Téměř okamžitý vznik tetanického napjetí svalstva zadních končetin a na to prudké křeče klonické s rychle následující paralysou končetin zadních.
3 » 53 » klonické křeče v předních končetinách i přední polovině těla.
4 » 45 » smrť.

II. 4 » 20 » větší žábě 0,1 ccm. *fenolu.* Ihned po injekci nepozorováno příznakův.
4 » 24 » jednotlivé křečovité vztahy střídavě po těle.
4 » 26 » křeče častější zejména v zadních končetinách; tyto zůstávají chvíli v tetanickém napjetí; toto zejména trvalé na plovacích blanách. Hojná hypersekrece kůže.
4 » 37 » tetanus; křeče vystupují jen na podráždění.
4 » 40 » paralysa zadních končetin.
5 » 25 » reflexní dráždivosť zvýšena.
5 » 35 » smrť.

III. 4 » 25 » žábě 0,1 ccm. *anisolu.*
4 » 26 » nepokoj, urychlené dýchání.
4 » 27 » parésa.
4 » 31 » úplná paralysa zadních končetin, dýchání zvolněné. Periferické nervy reagují správně (n. ischiadicus, hypoglossus), zánik reflexů; centrální podráždění míchy prodloužené a míchy bez výsledku. Srdce jevilo pohyb nedostatečný, systoly slabé urychlené; přímé dráždění svalu srdečního stavilo pohyb srdce.
4 » 38 » smrť.

IV. 5 » — » žábě 0,1 ccm. *fenetolu.*
5 » 2 » podráždění.
5 » 4 » parésa. Reflektorická činnosť zvýšena; dráždivosť periferická zachována.
5 » 14 » paralysa pravé zadní končetiny, z níž vymizel i všechen reflex.
Žába zůstala živa a zotavila se.

V. 5 » 20 » žábě 0,1 ccm. *fenetolu.*
5 » 22 » podráždění s dyspnoickým dýcháním.

5 h. 24 m. parésa, reflexy zvýšeny; jedině reflexy pravé zadní končetiny sníženy, jichž úplný zánik nastoupil se současnou kompletní paralysou jediné této končetiny.

V., VI., VII. a VIII. Vstřiknuto vždy 0,1 ccm. *fenetolu*; obraz vždy typicky stejný; injekce konána v levý vak hřbetní a přece následovala u jedné žáby paralyse pravé zadní končetiny po předcházející parése se současným zvýšením reflexů. V posledních třech neobmezovala se paralysa na zadní pravou končetinu.

Po 24 hod. jevil se ještě stav paretický a kdež ještě mohl býti konstatován snížený reflex pravé zadní končetiny.

IX. a X. 4 h. 32 m. vstřiknuto dvěma žabám po 0,1 g. *fenolsíranu sodnatého.*
6 » 45 » obě zůstaly normální.

b) K r á l í c i.

XI. 3 h. 45 m. králíku 650 g. 0,2 ccm. *anisolu.*
3 » 57 » parésa; opisthotonus.
4 » — » kompletní paralysa a narkosa s klidným dechem; opisthotonus zmírněn.
5 » 47 » narkosa v stejné síle.
5 » 58 » probouzí se sám, pozdvihuje hlavu.

XII. 3 » 50 » králíku 700 g. 2 ccm. *anisolu.*
4 » 2 » králík, se potácí, slintá, lehne na stranu, nemůže se pohybovati.
4 » 4 » silný opisthotonus s následující kompletní paralysou. Za 30 hodin smrť.

XIII. 3 » 50 » králíku 655 g. 0,2 ccm. *fenetolu*
4 » — » tuposť, urychlený dech.
4 » 7 » tuposť stejná, urychlený dech.
6 » — » normální.

XIV. 4 » 20 » králíku 730 g. 1 ccm. *fenctolu.*
4 » 35 » potácí se, lehne na stranu a není s to se hýbati. Žádné období podráždění ani křečí. Reflexy zachovány.
5 » 55 » parésa trvá.
Po 36 hod. zotavení.

XV. 4 » 28 » králíku 660 g. 0,2 g. *fenolsíranu sodnatého.*
6 » 45 » králík zůstal normální.

C. Pokusy s amidobenzolem, form-, acet-, butyr-, isobutyr-, valeryl-, parachloracet- a fenylacetanilidem i s octanem a siranem anilinu.

a) Žáby.

Pokusy, až na prvé s amidobenzolem, konány býti musily s roztoky líhovými. Konstatováno, že žáby po 1 ccm. líhu upadnou v slabou parésu (zvolněné pohyby, nemožnosť skoku), z níž se za $^3/_4$ hod. úplně proberou.

I. 3 h. 55 m. vstříknuto žábě 0,2 ccm. *anilinu.*
3 » 56 » parésa.
3 » 57 » paralysa zadní končctiny, odpovídající straně injekce.
4 » — » paralysa kompletní.
4 » 20 » smrť bez předcházejících křečí.

II. 3 » 55 » žábě 0,1 ccm. *anilinu*
4 » — » tuposť.
4 » 5 » při dráždění klon. křcče v končetinách.
4 » 6 » křeče dostavují se samovolně.
4 » 10 » křeče prudké, klonické, úplně od oněch po fenolu differující; žádná stopa tetanického napjetí.
4 » 15 » křeče se stupňují; končetiny se přímo vymršťují.
4 » 18 » křeče ustávají a paralysa nastupuje.
4 » 35 » zřídka kdy slabé smrštění.
5 » 15 » slabé známky života.

III. 5 » 12 » 0,1 ccm. *anilinu* v 0,5 ccm. alkoholu.
5 » 16 » parésa.
5 » 28 » slabé klon. křeče u srovnání ku křečím po anilinu samotném; křeče počínají v zadních končetinách.
5 » 52 » křeče uslábly. Paralysa.
6 » — » smrť.

IV. 5 » 13 » žábě 0,2 ccm. *anilinu* s 1 ccm. líhu.
5 » 21 » křečovité stahování svalstva; stav paretický; na zad položena nečiní pokusy o vzpřímení.
5 » 31 » křeče klonické mírné, ne dlouhého trvání.
5 » 41 » křeče zanikají; paralysa zadních končetin.
5 » 58 » smrť.

V. a VI. 5 » 20 » dvěma žabám po 0,2 ccm. *formanilidu* v 0,5 ccm. líhu.
5 » 30 » parésa značná.
5 » 32 » úplná paralysa, zánik reflexů.
5 » 38 » smrť.

VII. a VIII.	5 h.	4 m.	0,1 g. acetanilidu menší žábě v 0,5 ccm. líhu.	0,2 g. acetanilidu větší žábě v 1 ccm. líhu.
	5 »	6 »	parésa.	parésa.
	5 »	8 »	paralysa.	parésa.
	5 »	15 »	smrť.	paralysa.
	5 »	25 »	—	smrť.
IX.	4 »	20 »	větší žábě 0,2 g. *acetanilidu* v 1 ccm. líhu.	
	4 »	25 »	křeče s následující parésou.	
	4 »	30 »	paralysa, vymizení reflexů	
	4 »	40 »	smrť.	
X.	4 »	55 »	žábě 0,1 g. *butyranilidu* v 0,5 ccm. líhu.	
	4 »	59 »	parésa.	
	5 »	4 »	paralysa.	
	5 »	28 »	reflexní dráždivosť zvýšena.	
	5 »	38 »	smrť.	
XI.	4 »	56 »	žábě 0,1 g. *butyranilidu* v 0,5 ccm. líhu.	
	5 »	— »	parésa.	
	5 »	6 »	paralysa.	
	5 »	18 »	smršťování svalstva, podobné klon. křečím po anilinu, avšak značně oslabené.	
	5 »	30 »	reflexní dráždivosť zvýšena.	
	5 »	37 »	smrť.	
XII.	4 »	20 »	žábě 0,2 g. *butyranilidu* v 1 ccm. líhu.	
	4 »	35 »	parésa.	
	4 »	40 »	paralysa.	
	5 »	30 »	smrť.	
XIII.	4 »	40 »	žábě 0,2 g. *butyranilidu* v 1 ccm. líhu.	
	4 »	50 »	nepokoj, obtížnější a urychlené dýchání.	
	4 »	51 »	značná tuposť, zvíře jest však s to se ještě vybaviti z polohy břišní.	
	5 »	5 »	reflexy oslabené a zvolněné.	
	5 »	10 »	zvýšená dráždivosť reflexní.	
			Po hodině smrť.	
XIV.	4 »	21 »	žábě 0,2 g. *isobutyranilidu* v 1 ccm. líhu.	
	4 »	25 »	lehká parésa.	
	4 »	50 »	paralysa.	
	5 »	30 »	chvilkové smršťování svalstva.	
			Po 6 hod. smrť.	
XV.	4 »	40 »	žábě 0,2 g. *isobutyranilidu* v 1 ccm. líhu.	
	4 »	45 »	zvíře svěžejší v porovnání s č. XIII.	
	5 »	— »	obtížnější dýchání.	

5 h. 5 m. reflexy správné.
5 » 10 » parésa, reflexy zvolněné.
5 » 35 » fibrill. smršťování zadních končetin.
Smrť po delší době.

XVI. 5 » 4 » žábě 0,1 g. *isobutyranilidu* v 0,5 ccm. líhu.
5 » 8 » slabá parésa.
5 » 18 » vyznačená parésa.
5 » 22 » paralysa.
5 » 45 » jednotlivé, velmi slabé smršťování svalstva; reflexní dráždivosť zvýšena.

XVII. 5 » 4 » žábě 0,1 g. *isobutyranilidu* v 0,5 ccm. líhu.
5 » 8 » slabá parésa.
5 » 22 » parésa zůstává nezměněná.
6 » — » paralysa se nedostavila.

XVIII. a XIX. 4 » 40 » dvěma žabám po 0,2 ccm. *octanu anilinu.* Krátce po injekci stav tuposti; žáby na hřbet položeny nevybavily se.
4 » 50 » při dotknutí křečovité smršťování svalstva; reflexy správné.
5 » 40 » křeče klon., charakterisující otravu anilinu, jinak stav paretický.
Na druhý den ještě nastupovalo charakteristické třesení při doteku i při lezení žab. Skok nemožný.

b) K r á l í c i.

XX., XXI., XXII., XXIII. a XXIV. vstřiknuto králíkům 500—650 g. po 0,2 g. *amidobenzolu.*

U tří nedostavil se téměř žádný příznak; u dvou zpočátku něco nepokoje a tuposti, z čehož se králíci rychle probrali.

XXV. 4 h. 3 m. Králík 650 g. 0,3 ccm. *amidobenzolu.*
4 » 8 » zrychlený dech.
4 » 20 » slabé křeče klonické v zadních končetinách.
5 » 18 » poněkud obtížný dech, křeče přestaly; králík se rychle zotavuje.

XXVI. 4 » 30 » králíku 510 g. 0,5 *amidobenzolu.*
4 » 32 » zrychlený dech.
4 » 35 » klonické křeče, zejména v zadních končetinách.
4 » 36 » zvíře neudrží se v normální poloze.

	4 h.	40 m.	intensita křečí se zvýší na chvíli, na to slábne; následuje jen jednotlivé křečovité trhání; opisthotonus, slintání.
	4 »	58 »	paralysa — smrť následovala.
XXVII.	3 h.	32 m.	králíku 469 g. 0,2 g. *acetanilidu* v 1 ccm. líhu.
	3 »	33 »	dýchání zvolněné (60 dechů) vyznačená parésa.
	3 »	43 »	pokouší se o pohyby.
	3 »	44 »	80 dechů.
	3 »	53 »	112 dechů.
	4 »	37 »	zotavuje se.
			Druhý den mrtev.
XXVIII.	4 »	27 »	králíku 250 g. 0,2 g. *acetanilidu* v 1 ccm. líhu.
	4 »	28 »	parésa.
	4 »	29 »	dýchání po injekci urychlené se volní.
	4 »	36 »	dýchání opět urychlené.
	4 »	45 »	reflexy zvolněné.
	4 »	56 »	marné pokusy o vzpřímení.
	5 »	40 »	zotavuje se.
	6 »	15 »	paretický stav dosud. (Smrť druhý den.)
XXIX. a XXXI.	4 »	20 »	dvěma králíkům 510 g. a 530 g. *butyranilidu* 0,2 g. v 1 ccm. líhu.
	4 »	22 »	parésa, zrychlené dýchání.
	4 »	24 »	paralysa, dýchání zvolněné.
XXX.	4 »	50 »	králíku 520 g. 0,2 g *butyranilidu* v 1 ccm. líhu
	4 »	52 »	velice urychlené dýchání, parésa, zánik reflexů.
	5 »	8 »	paralysa, otrava trvá v stejné síle.
	5 »	10 »	matné pokusy o pohyby.
XXXII. a XXXIII.	4 »	25 »	dvěma králíkům 470 a 520 g. po 0,2 g. *isobutyranilidu* v 1 ccm. líhu.
	4 »	27 »	urychlené dýchání; parésa avšak méně význačnější než po butyranilidu.
	4 »	36 »	parésa; hlavu a končetiny dovedou držet v normále.
	4 »	45 »	zotavují se.
XXXIV.	4 »	50 »	králík 600 g. 0,2 g. *isobutyranilidu.*
	4 »	53 »	stav paretický, urychlené dýchání.
	5 »	5 »	drží se v obvyklé poloze.
	5 »	6 »	matné pohyby; položen na stranu vybere se po několika pokusech v polohu normálnou.
	6 »	3 »	slabší parésa trvá dosud.
XXXV.	5 »	10 »	králík 590 g. 0,2 g. *valerylanilidu* v 1 ccm. líhu.
	5 »	13 »	z počátku zrychlené, pak zvolněné dýchání; slabá parésa.

5 h. 40 m. počíná se zotavovat.
5 » 58 » stav normální.

XXXVI. 5 » 25 » králík 620 g. 0,2 g. *valerylanilidu* v 1 ccm. líhu.
5 » 45 » chová se jako zvíře normální; žere předložené zelí.

XXXVII. 5 » 30 » králíku 595 g. 0,1 g. *parachloracetanilidu* v 0,5 ccm. líhu; následovala parésa.
5 » 36 » následovala parésa. 0,1 g. *parachloracetanilidu* v 0,5 ccm. líhu.
5 » 38 » paralysa, dýchání obtížné a zvolněné (60); reflexy zrušeny.
5 » 58 » příznaky otravy v stejné síle.

XXXVIII. 4 » 30 » králíku 560 g. 0,2 *parachloracetanilidu* v 1 ccm. líhu, paralysa, zvolněný dech jako v pokusu 37.
5 » 35 » dechů 40 — otrava trvá.

XXXIX. 5 » 35 králíku 540 g. 0,2 *fenylacetanilidu* v 1 ccm. horkého líhu; sledovala jen tupost jako po stejné dávce líhu.

XL. 5 » 30 » králíka 620 g. 0,1 *fenylacetanilidu.*
5 » 45 » zůstal normální.

XLI. 4 » — » králíku $^1/_2$ kl. vstřiknuta líhová emulse těžce rozpustného *síranu anilinu.*
6 » 15 » normální.
Na druhý den nalezen mrtev.

XLII. 4 » 40 » králíku 606 g. 0,2 ccm. *octanu anilinu.*
8 » 45 » zůstal normální i druhý den čilý.

I.

Benzol způsobuje u žab v dávce 0,2 g. parésu, z níž se silnější zvířata pravidelně proberou. *Ethylbenzol*, *toluol* a *cymol* způsobují v téže dávce paralysu a smrť s intensitou ubývající jak látky jmenovány byly. V žádném případu nepozorován nějaký příznak podráždění centrálního nervstva.

Smrť u žab nastoupila po ethylbenzolu v 50 m. až 1 h. 20 m.
» » » » » toluolu » 45 » » — » 51 »
» » » » » cymolu » 43 » » — » 46 »

Králíci (průměrem 600 g.) na dávku 0,2 *benzolu* nereagovali. *Ethylbenzol*, *cymol* a *toluol* způsobovaly parésu a hlubokou narkosu; brzy po injekci nastoupil velmi urychlený dech, který u toluolu a cymolu se pozvolna volnil a uklidnil. Narkosa byla nejhlubší po toluolu a v ní také všecka pokusná zvířata po více hodinách zašla. Ethylbenzol a cymol nesmrtil; zvířata se na

druhý den zotavila; po ethylbenzolu zůstával dech i po 2 hod. po injekci urychleným.

Chlorbenzol způsobuje u žáby prudké podráždění center nervových. Po injekci 0,2 nastala pravidelně po několika minutách paralysa oné zadní končetiny, na jejíž korrespondující stranu injekce byla konána. Pak teprve následovala paralysa i druhé zadní končetiny a jakási tuposť přední části těla. Kdežto na zadních končetinách reflexy zanikly, zůstaly na celé přední polovici zachovány. Po 22 resp. 27 a 47 min. vznikají klonické křeče trvající hodinu a déle, obmezující se na přední polovinu těla a jen výminkou, pokud nejsou úplně paralysovány, se také na zadní končetiny rozšiřující. Po hodině křeče slábnou a nastupuje smrť paralysou.

U menších žab nedošlo po 0,2 g. ku křečím, tu smrtil chlorbenzol hned z předu paralysou.

U králíků zůstal chlorbenzol (0,2 g.) bez účinku; králíci slabší (pod 500 g.) se trochu potáceli, avšak brzy se probrali.

Toluolsulfonan sodnatý zůstal u žab i králíků v dávce 0,2 g. zcela bez účinku.

II.

Fenol způsobuje u žab v dávce 0,1 g. velké podráždění center nervových ihned po injekci vznikající, nejdéle po 4 min. Křeče jsou prudké a rázu tetanického; plovací blána zůstává na zadních končetinách trvale napjata. Po křečích sleduje paralysa, ohromně zvýšená reflexní dráždivosť a smrť. — U králíků (660 g.) způsobuje dávka 0,2 známý obraz prudkého podráždění center nervových s následující paralysou a smrtí.

Anisol podražďuje žáby v dávce 0,1 g. (nepokoj, urychl. dech), po čemž následuje stav paretický a po 4 min. paralysa a zvolněný dech; reflexy zanikají, centrální podráždění míchy prodloužené i míchy bez výsledku.

Srdce pohybu nedostatečného, systoly slabé, urychlené.

Smrť za 7 minut.

U králíka (650 g.) způsobil za 12 min. parésu s tetanickým stažením svalů šíjových; za 15 min. kompletní paralysu, při čemž se tetanus šíje mírnil, až zanikl. Po 1 hod. 13 min. přestávala narkosa a králík počal se hýbati i hlavu vzpřimovati.

Fenetol v dávce 0,1 g. vyvolal u žab po krátce trvajícím období slabého podráždění stav paretický s reflektorickou zvýšenou činností; dráždivosť periferická zachována. Doba reflexu zkrácena. Parésa přejde záhy v paralysu. Po 24 hod. žáby zotavenější, však dosud s patrnou parésou. — U králíků vzbudil fenetol v dávce 0,2 tuposť a urychlený dech; za půl hodiny nastoupilo úplné zotavení. Králík snese asi 1 g. fenetolu; i tenkráte ještě nastoupí po narkose zotavení, kdežto 1 g. anisolu králíci podléhají.

Fenolsíran sodnatý zůstal u žab v dávce 0,1 g., u králíka v dávce 0.2 g. bez účinku; žáby zůstaly živy a čily i na druhý den.

III.

Studium anilidův valně jest ztěženo těžkou rozpustností jejich. Anilidy nerozpustny jsou ve vodě a proto veškeré pokusy konány s roztoky líhovými. Poznamenávám, že žáby na 1 g. líhu 96% odpovídají parésou, z níž se brzy zotavují; u králíků způsobuje tažc dávka jen lehce pomíjející tuposť. Že líhový roztok působení látky alteruje, patrno z pokusu s *amidobenzolem.*

Dávka 0,1 anilinu in subst. způsobovala u žab z počátku tuposť, po kteréž se dostavily v několika minutách klonické křeče, stupňující se k značné intensitě, avšak postrádající onoho tetanického charakteru, jaký jsme při fenolu znamenali. Po křečích sleduje paralysa. Dávka 0,2 g. čistého anilinu smrtí žáby rychlou paralysou, bez předcházejících křečí.

V *líhovém roztoku* (0,1 ccm. na 0,5 ccm.) způsobil anilin u žab parésu, klonické křeče, avšak daleko *méně* prudké, než jaké po látce čisté vznikají. Ještě mírnější křeče následovaly po dávce 0,2 ccm. v 1,0 ccm, s rychle nastoupivší paralysou a smrtí.

U králíků nevyvolává anilin v dávce 0,2 g. (ať čistý, ať v roztoku líhovém) nijakých příznakův; 0,5 g. anilinu smrtí za známých příznakův anilinové otravy.

Formanilid smrtí žáby v dávce 0,2 g. rychlou paralysou v několika minutách (10—15 min.). Období podráždění center nervových nebylo pozorováno.

Acetanilid smrtí žáby rovněž paralysou v dávce 0,1—0,2 g. v 11, 15 až 21 min.; větší zvířata jevila v období paretickém křečovité smršťování svalstva kteréž na slabších pozorováno nebylo. Králíci (460—510 g.) jevili v dávce 0,2 g. z počátku parésu s urychleným dechem, po málo minutách kompletní paralysu s velice uvolněným dechem (klesl na 60 a jen pozvolna opět stoupal na 80 a 112); po hodině zdála se zvířata poněkud zotavena, leč průběhem několika hodin bez výminky zašla.

Butyranilid nezpůsobil u žab v dávce 0,2 g. v žádném případu nějakého období podráždění Otrava počala parésou, následovala paralysa s dechem nepravidelným a povrchním a zvětšenou dráždivostí reflexní. Průměrem za hodinu končila otrava vždy smrtí. U králíků vzbudila dávka 0,2 g. parésu a paralysu s poněkud uvolněným dechem; otrava nepoměrně lehčí než po acetanilidu.

Isobutyranilid způsobil u žab v stejné dávce obdobnou otravu jako butyranilid, avšak mírnější; v období paralysy pozorovati bylo fibrillární smršťování svalstva; zvířata žila průměrem o 30 minut déle než ona butyranilidem otrávená. U králíků dostavila se po dávce 0,2 pouze parésa. Po celou dobu otravy dovedou držeti hlavu v poloze normální a zotavují se za 20 až 25 min. úplně.

Valerylanilid způsobuje u králíků v dávce 0,2 g. jen pomíjející lehký stav tuposti, z něhož se rychle probírají. Patrný jen účinek líhového roztoku.

Fenylacetanilid rozpustný jen ve vroucím alkoholu nezpůsobuje u králíků v dávce 0,1 až 0,15 nijakých příznakův.

Parachloracetanilid vyvolává v dávce 0,2 g. u králíků parésu s rychle následující paralysou, se zánikem reflexů a obtížným dechem. Neulevující těžké otravě zvíře podléhá.

Octan anilinu způsobuje v dávce 0,2 g. u žab parésu; po 10 minutách vyvolává dotknutí křeče klonické, kteréž se po 30 min. samovolně dostavují, ač nikoliv v té intensitě jako po anilinu. Po 24 hodinách jsou žáby zotaveny, avšak při pohybu ještě stíženy charakteristickým třesením svalů i ztrátou své pružnosti. Na králíka nepůsobí dávka 0,2 g. octanu anilinu nijak.

Síran anilinu (téměř nerozpustný v líhu); vstříknuto 0,2 g. líhové emulse. Králík po dobu pozorování (2 hod.) nejevil nijakých příznakův; ráno nalezen mrtev.

Známo, že *účinné* paraffiny a jich deriváty zmírňují ve větší neb menší míře dráždivosť a oslabují mohutnosť různých okresův mozkových; při zvýšeném účinku podléhají především funkce mozku, nastupuje narkosa, zaniká reflexní dráždivosť a konečně i centrum respirační i motorická ganglia srdce paralyse podléhají.

Velká většina nálezů svědčí, že v tomto směru působí také substituované radikály alkoholické a kyselé — avšak jsou zároveň fakta svědčící:

1. Že nepůsobí ve směru naznačeném v každém případě; naopak, v jisté řadě látek, způsobuje zásuv radikálův zvýšený účinek dráždivý v centra nervová; platí tak o substituci v piperidin, chinolin, methyltetrahydropyridyl, tropin, morfín a j.

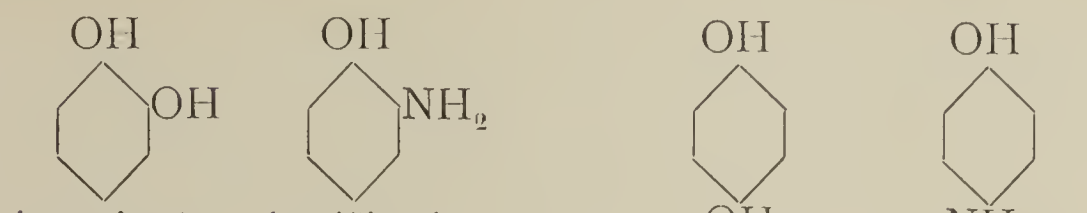
2. V jistém počtu látek jest substituce radikálův bez významu (dimethyl a diethylorthoamidofenol, některé deriváty kyseliny salicylové, jako kyselina kresotinová, salicylan methylnatý a ethylnatý, v jistých hydronaftylaminech a j.

3. Že nepůsobí radikály v té pořadné intensitě, jakou se vyznamenávají jich příslušné alkoholy a mastné kyseliny.

Ad 1. Shledal jsem, pokud mi práce byly přístupny, že substituce radikálův způsobuje křečový účinek *jedině a výhradně v některých derivátech pyridinu* a to jen v určitém omezení. To faktum týče se jedině látek, z kterých vznikají substitucí alkylův svérázné alkaloidy, v nichž alkyly, dovoleno-li soudit z výsledku fysiologických pokusův, ztrácí svůj speciální fysiologický význam a přispívají snad jen ku změně chemické povahy látek. Tentýž alkyl, substituovaný v *hotový* již alkaloid, ihned svou mohutnosť fysiologickou přivádí ku platnosti. Substitujeme-li na př. v slabý piperidin propyl, vznikne prudký, křeče vzbuzující alkaloid končin; jakmile však v substituci pokračujeme, vsouvnouce v koniin ethyl neb methyl, zmírní se valně dráždivý jeho účinek. Zde opět se objevuje vlastní charakteristická mohutnosť alkylů. Stejně to platí o methyl a ethylstrychninu, ethyl a methylbrucinu, ethylatropinu, vesměs to látek oproti alkaloidům nesubstituovaným oslabených ve smyslu alkylů. Osamocené stanovisko zaujímá *morfín*; z eminentního narkotika vzniká substitucí alkylův (řada kodeinová) látka křeče vzbuzující. Konstituce morfínu není ještě jasna; z posledních prací však vychází na jevo, že *nemá* jádra pyridinového.

Ad 2. Průzračnější jsou důvody, proč v jistých látkách zásuv radikálův zůstává bez významu. Srovnejmež ku př. účinky *dihydroxybenzolů* a *amidofenolů*; při dihydroxybenzolech jest funkce chemická a fysiologická souběžná.

Rozhoduje v obou vzájemná strukturná vzdálenosť hydroxylů; čím blíže jsou k sobě, tím účinnější fysiologicky i chemicky. Opak účinku nalézáme při amidofenolech:



intensivný bezúčinný slabý intensivný.

Jak hydroxylová tak amidová skupina má, jsouc o sobě v benzol substituována, mohutnou účinnosť (fenol, anilin); v amidofenolech nalézáme obě na jednom jádru benzolovém; v orthopostavení jsou obě bez účinku, v parapoloze obě přicházejí k platnosti. Patrně annulluje v první látce bezprostřední, vzájemná blízkosť elektronegativné OH skupiny a elektropositivné, basické NH_2 skupiny všechen účinek. Ve vzdálené parapoloze může již účinek obou k platnosti přijíti a také přichází. Funkce dihydroxybenzolů a amidofenolů, chemická a fysiologická, jest přesně souběžná.

Že substituce alkylův v amid orthoamidofenolu k nějakému účinku nepřispívá, jest pochopitelno, jelikož na jeho zásadité povaze ničeho nemění.

Podobné poměry rozhodují i v derivátech kyseliny salicylové; substituce vodíku karboxylového nemění ničeho na celkovém účinku látky; teprve substituce v hydroxylu působí. Stejně účinkují: kyselina salicylová $C_6H_4\begin{cases}OH\\COOH\end{cases}$, salicylan ethylnatý $C_6H_4\begin{cases}OH\\COO.C_2H_5\end{cases}$, kdežto kyselina methylsalicylová $C_6H_4\begin{cases}O.CH_3\\COOH\end{cases}$ jest látka oproti původní slabá.

V hydronaftylaminech rozhoduje účinek především, které jádro jest hydrováno, a v kterém chemickém místě se amidová skupina nalézá. Patrno, že neúčinnosť substituovaných radikálův v jistých látkách není argumentem proti jiným shodným nálezům, že radikály vůbec působí ve smyslu skupiny alkoholové. Neúčinnosť ta jest toliko dokladem, že poměr funkce fysiologické a chemické sluší uvažovati ze všech stránek, z celé chemické povahy látek. S druhé strany účtovati se musí s individuálností pokusného zvířete.

Naše pokusy jen doplňují tyto vývody o významu substituce radikálův. Nalezl jsem, *že se může zásuvem alkylův státi z látky inertní, látka fysiologicky působivá.*

V řadě nasycených uhlovodíkův aromatických roste (u žab) účinek od inertního benzolu k ethylbenzolu, toluolu, cymolu, řídě se zásuvem C_2H_5, CH_3 a $CH_3.C_3H_7$. Tuto pořadnosť jsem u králíků konstatovati nemohl. Oproti neúčinnému benzolu vynikají toluol, ethylbenzol i cymol, silným účinkem narkotickým; leč toluol působil nejintensivněji se smrtným zakončením, kdežto se

po narkose ethylbenzolové a cymolové králíci vesměs zotavili; cymol však patrně působil silněji než ethylbenzol.

Charakteristické působení má vsouvnutí *chloru* v molekulu benzolovou; jevilť u žab chlorbenzol místný (paralysa končetiny korrespondující s místem injekce) i povšechný účinek. Tento úplně se lišil od narkotického působení vyšších členův řady benzolové, stav se naopak dráždivým. Netřeba, abych vzpomenul dráždivého období po chlorovaných paraffinech.

Z dalších pokusův mých *s deriváty fenolu i anilinu patrno, že lze substitucí radikálův jedovatosť původní látky, zejména účinek dráždivý v centra nervová měniti v působnosť narkotisující a paralysující.*

Téměř přesný jest tento účinek k poměru molekulárné váhy radikálův. Methyl v *anisolu* není ještě s to úplně potlačiti účinek fenolu; anisol jest ještě dosti prudký oproti *fenetolu*, ve kterémž ethyl již naprosto účinek fenolový zdolati dovedl; fenetol má působení již čistě narkotické, v anisolu pak se domáhá ještě křečovitý a tetanisující účinek *fenolu.* (Tetanus šíje králíkův.)

Podobné poměry nalezl jsem v řadě anilidův. Původní křečový účinek anilinu se vesměs stírá a vyhlazuje substitucí postupné řady radikálův kyselých.

Formanilid působí prudce, smrtě (oproti všem ostatním derivátům) rychle paralysou.

Výminečná, aldehydická povaha kyseliny mravenčí obráží se v působení jejího substituovaného radikálu. Méně působící radikál kyseliny octové v *acetanilidu* nevyhlazuje úplně původní dráždivý účinek anilinu; po *butyr-* a *isobutyr-anilidu* nastupuje již jen narkosa a paralysa, kdežto *valerylanilid* téměř beze stopy účinku zůstává (u králíků).

Rostoucí vahou molekulárnou substit. radikálův zlahodňuje se prudký účinek anilinu až k úplné inaktivnosti.

(CHO — C_2H_3O — C_4H_7O — C_5H_9O.)

Povšimnutí hodny jsou zde některé poměry: kyselina octová jest prosta všeho účinku fysiologického, a anilin v dávce 0,2 g. u králíků rovněž.

Acetanilid však smrtí králíky v dávce 0,2 g. bezvýminečně, kdežto *octan anilinu* v téže dávce na králíky nijak nepůsobí.

Rovněž sluší zaznamenati rozdíl intensity účinků isomerných butyru a isobutyranilidu, z nichž poslední účinkuje mírněji, ač kyselina isomáselná o něco slaběji působí než máselná.

Z neúčinnosti *fenylacetanilidu* nedají se činiti žádné dalekosáhlé konkluse; ony anilidy k pokusům připravené, které by na substituci aromatických radikálův v anilin světlo vrhaly, nemohl jsem pro nerozpustnosť upotřebiti; přece však patrno, že substituce fenylu ve skupině amidové jest bez významu i se současnou substitucí acetylu na jádru benzolovém.

Účinek *parachloracetanilidu* jest dalším důvodem, že chlor jest vážným činitelem v příčině účinku fysiologického; účinek této látky oproti prostému acetanilidu jest nepoměrně intensivnější.

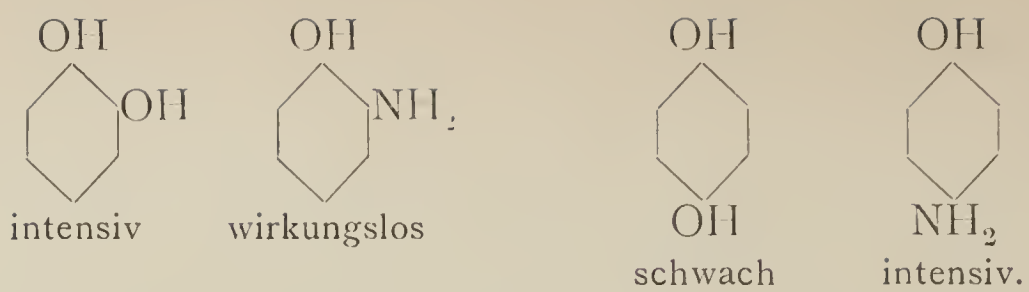
Pokusy s látkami opatřenými sulfoskupinou nebo skupinou kyseliny sírové (*fenolsulfonan sodnatý*, *fenolsíran sodnatý*, *síran anilinu*) měly shodný účinek s oněmi týmiž skupinami opatřenými látkami, s kterými pokusy vykonali Salkowski, Careneuve, Lépine, Baumann a Stolnikov. I také tři jmenované látky, mnou pokusu podrobené, přispěly k dokladu, že skupina sulfonová i kyseliny sírové dovede látky jedovaté účinku prudkého úplně zbaviti.

Resumé.

In einer von meinen Publicationen (Theoret. Farmakologie I. Praha 1890) habe ich Arbeiten, welche das Verhältniss der chemischen Constitution zur physiol. Wirkung berühren, zusammengestellt und das Lückenhafte unseres Wissens in dieser Richtung markirt; dieses gilt auch vom Capitel über die Rolle *der Radicalen.* Die grosse Mehrzahl von Befunden zeigt zwar, dass sie im Sinne der betreffenden Muttersubstanzen aus der Fettreihe wirken, doch fehlt es auch nicht an Beobachtungen, welche andere Schlüsse zulassen scheinen. Durch dieselbe Substitution bekommen bestimmte Stoffe Krampfwirkung, andere werden gar nicht beeinflusst und bei einer weiteren Reihe kann man die Reihenfolge der Wirkungsintensität nicht nachweisen, wie dieselbe den zugehörigen Alkoholen und Säuren eigen ist.

So wird durch Substitution von Radicalen (der Fettreihe) Krampfwirkung ausschliesslich nur in einigen Pyridin-Derivaten erzeugt und diese Facta beziehen sich nur auf Stoffe, aus denen durch dieselbe Substitution wirksame Alkaloide werden. — Fahrt man aber mit Substitution fort, d. h. belastet man ein schon fertiges Alkaloid mit einem weiteren Radical, dann bringt dieses sogleich seine ursprüngliche Wirksamkeit zur Geltung. Substituirt man z. B. im physiologisch schwachen Piperidin ein Propyl, dann entsteht das krampferregende Koniin; ein weiteres Radical ins Koniin gebracht, schwächt schon die Krampfwirkung energisch ab. Methyl und Aethylkoniin beweisen das. Dasselbe gilt vom Methyl und Aethylstrychnin, Methyl und Aethylbrucin, Aethylatropin u. a. Eine Ausnahmsstellung zeigt Morphin; aus einem eminenten Narcoticum wird durch Alkylsubstitution (Kodeinreihe) ein krampferregendes Gift. Die Morphinconstitution ist noch nicht endgiltig festgestellt, doch geht aus den letzten Arbeiten hervor, dass dasselbe zur Pyridinreihe nicht gehört.

Erklärlicher sind manche Facta, aus denen hervorgeht, dass in bestimmten Stoffen die Substitution von Radicalen in physiologischer Hinsicht bedeutungslos bleibt. Als Beispiel stellen wir einen Vergleich des Verhaltens der Dihydroxybenzole und Amidophenole auf. Bei den ersteren geht die chemische und physiologische Wirkung parallel; beide hängen von der gegenseitigen Entfernung der Hydroxyle ab; je näher diese aneinander, desto wirksamer ist der Stoff physiologisch und chemisch. Umgekehrt verhält es sich bei den Amidophenolen:



Sowohl OH an sich, wie NH_2 erzeugen im Benzol substituirt sehr wirksame Stoffe (Phenol, Anilin). Die Amidophenole tragen beide genannte Gruppen an demselben Kerne und doch wirkt nur Paraamidophenol energisch, während Orthoamidophenol vollkommen wirkungslos ist. Wahrscheinlich hebt in der Orthostellung die unmittelbare Nähe der elektronegativen OH Gruppe an der elektropositiven basischen NH_2 Gruppe die Wirkung auf. In der entfernten Parastellung können beide wieder zur Geltung kommen.

Substituirt man Alkyle in die NH_2 Gruppe des Orthoamidophenols, auch dann kann man nicht eine erhöhte physiologische Wirkung erwarten, weil Alkyle am basischen Charakter der Gruppe nichts ändern. Dimethyl und Diacethylorthoamidophenol sind so wirkungslos wie die Muttersubstanz.

Ähnliche Verhältnisse entscheiden auch bei den Derivaten der Salicylsäure; durch Substitution des Carboxylwasserstoffes wird die Wirkung der Muttersubstanz nicht alterirt; erst die Substitution im Hydroxyl wird wirksam.

$C_6H_4\begin{cases}OH\\COOH\end{cases}$ und $C_6H_4\begin{cases}OH\\COO.C_2H_5\end{cases}$ wirken gleich. $C_6H_4\begin{cases}O.CH_3\\COOH\end{cases}$ wirkt viel schwächer als Salicylsäure.

Das Thema wollen wir hier nicht erschöpfen; die angeführten Beispiele erklären uns nicht alle widersprechenden Thatsachen; sie genügen aber zum Beweis, dass man die Frage der Bedeutung der Radikalsubstitution nicht einseitig auffassen darf; zur vollständigen Klarstellung aber müssen noch Versuche an ganzen Reihen von Stoffen ausgeführt werden, welche bis heute noch unberührt geblieben sind und auch meine vorliegende Arbeit soll als Beitrag zu diesem Material betrachtet werden.

Experimentirt habe ich mit einigen Gliedern der aromatischen Benzol-, Kohlenwasserstoffe, mit Phenol- und Anilinderivaten. Alle Stoffe habe ich im Laboratorium für organ. Chemie der böhm. techn. Hochschule hergestellt und Versuche im physiolog. Institut der Prager böhm. Facultät gemacht. Sämmtliche Stoffe wurden in gleicher Dosis, bei Fröschen subcutan in den Rückenlymphsack, bei Kaninchen intraperitoneal applicirt. (Dosis 0,2 — bei Kaninchen durchschnittlich auf 500 g. Körpergewicht.)

Aus den Versuchen mit aromatischen Kohlenwasserstoffen geht hervor, *dass aus dem physiologisch unwirksamen Benzol durch Alkylirung wirksame Stoffe entstehen.*

Die Wirkung steigt bei Fröschen vom Benzol zum Aethylbenzol, Toluol, Cymol, den Radicalen C_2H_5, CH_3 und $CH_3.C_3H_7$ folgend. Diese Reihenfolge habe ich bei Kaninchen nicht gefunden Gegenüber dem inerten Benzol

zeichnen sich Toluol, Aethylbenzol und Cymol durch eine eminente narkotische Wirkung aus. Toluol wirkt am intensivsten, mit ausnahmslos tödtlichem Ausgang, während Kaninchen aus der Aethylbenzol- und Cymolnarkose (bei gleicher Dosirung) erwachten. Cymol wirkt etwas intensiver als Aethylbenzol.

Charakteristisch ist die Chlorbenzolwirkung; bei Fröschen stellte sich eine unmittelbare örtliche Wirkung ein, Paralyse einer Extremität correspondirend der Injectionsstelle Die allgemeine Wirkung des Chlorbenzols contrastirt mit jener der höheren Glieder der Benzolreihe: gegenüber der Narkose hier tritt nach Chlorbenzol Krampfwirkung auf; an das Reizstadium nach chlorirten Paraffinen erinnernd.

Aus Versuchen mit Phenol- und Anilinderivaten geht hervor, *dass durch Substitution von Radicalen die Giftigkeit der Muttersubstanz abgestumpft, beziehungsweise eine Krampfwirkung in eine narkotisirende und paralysirende umgewandelt werden kann.*

Bei den angewandten Stoffen steht diese Wirkung beinahe im exacten Verhältniss zum Molekulargewicht der Radicale; so ist bei Phenolderivaten das Methyl im Anisol noch nicht im Stande die ursprüngliche Phenolwirkung ganz zu unterdrücken, während es dem Aethyl im Phenetol schon vollständig gelingt. Phenetol wirkt rein narkotisch, im Anisol kommt noch die Krampfwirkung des Phenol (Nackenstarre bei Kaninchen) zur Geltung. Bemerkt sei, dass sich alle Thiere nach der Phenetolnarkose ausnahmslos erholen, auch wenn bedeutende Dosen (1 ccm. reiner Substanz) injicirt wurden. Anisol wirkt tödtlich.

Ähnliche Verhältnisse fand ich in der *Anilidreihe.* Die ursprüngliche krampferregende Wirkung des Anilins wird mit der steigenden Substitution von Säureradicalen abgestumpft und ausgewetzt. Formanilid wirkt heftig, rasch durch Paralyse tödtend. Der aldehydische Charakter der Ameisensäure bricht auch im substituirten Radical durch. Das weit schwacher wirkende Essigsäureradical im Acetanilid bezwingt nicht ganz die Krampfwirkung des Anilins. Nach Butyr- und Isobutyranilid tritt nur noch Narkose und Paralyse auf, während Valerylanilid schon wirkungslos bleibt. (Bei Kaninchen.)

Mit dem steigenden Molekulargewicht der substituirten Radicale (CHO — C_2H_3O — C_4H_7O — C_5H_9O) wird die heftige Krampfwirkung gemildert bis zur vollständigen Aufhebung jeder Wirkung. Bemerkenswerth sind noch einige aus meinen Versuchen hervorgehende Thatsachen.

Essigsäure ist physiolosch wirkungslos und Anilin in der Dosis 0,2 g. bei Kaninchen auch. Acetanilid aber tödtet in der Dosis 0,2 g. Kaninchen ausnahmslos, während essigsaueres Anilin in gleicher Dosis bei denselben Thieren vollkommen wirkungslos bleibt.

Auch ist der Wirkungsunterschied der isomeren Butyr- und Isobutyranilids bemerkenswerth, von denen der letztere weit milder wirkt, trotzdem die Isobuttersäure schwächer wirkt als Buttersäure.

Phenylacetanilid fand ich wirkungslos; leider war ich nicht im Stande die Bedeutung weiterer Substitution von aromatischen Radicalen in Anilin zu studiren, nachdem alle Stoffe, welche ich zu diesem Zwecke hergestellt hatte, vollständig unlöslich und demnach nicht anwendbar waren.

Die Wirkung des Parachloracetanilids zeugt auch von der Wichtigkeit des Chloratoms bezüglich der physiologischen Wirkung; gegenüber dem Acetanilid zeichnet sich dieser (an Kaninchen) mit grösserer Intensität aus.

Die Versuche mit phenolsulphosauerem Natron, phenolschwefelsauerem Natron und schwefelsauerem Anilin zeigten, dass auch hier die Sulpho- und Schwefelsäuregruppe entgiftend wirkt, wie dies bei anderen Stoffen Salkowski, Careneuve, Lépine, Baumann und Stolnikov gefunden haben.

ZOBECNĚNÍ VZORCE FRULLANIOVA.

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 30. ZÁŘÍ 1891.

1. Účelem krátké této úvahy jest dokázati a zobecniti vzorec *Frullani*ův

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \left[f(0)-f(\infty)\right]\log\frac{b}{a},$$

jehož zvláštní případ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{a}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

má na př. v theorii integrálů Eulerových svůj význam.

Abychom dokázali vzorec (1), uvažme, že levá strana jest limitou výrazu

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty} \int_\varepsilon^N \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,$$

jejž lze též psáti

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty} \left[\int_\varepsilon^N f(ax)\frac{dx}{x} - \int_\varepsilon^N f(bx)\frac{dx}{x}\right].$$

Transformujeme-li tyto integrály substitucemi x za ax, resp. za bx, obdrží náš výraz tento tvar:

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty} \left[\int_{a\varepsilon}^{aN} f(x)\,\frac{dx}{x} - \int_{b\varepsilon}^{bN} f(bx)\,\frac{dx}{x}\right].$$

Předpokládajíce $0 < a < b$, rozložme prvý i druhý integrál ve dva jiné:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} + \int_{b\varepsilon}^{aN}, \qquad \int_{b\varepsilon}^{aN} + \int_{aN}^{bN};$$

pak v rozdílu zruší se oba členy prostřední a zbude jakožto hodnota integrálu (1):

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty} \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x} - \int_{aN}^{bN} f(x)\,\frac{dx}{x}\right).$$

Dosazením εx, resp. Nx za x do těchto integrálů obdrží výraz tento tvar:

$$\lim_{\varepsilon = 0,\ N = \infty} \int_a^b \frac{f(\varepsilon x) - f(Nx)}{x}\, dx.$$

Jelikož a, b jsou kladné, jest funkce $\frac{1}{x}$ konečnou a spojitou v mezeře $(a \ldots b)$. *Předpokládáme-li o funkci* $f(x)$, *že jest na místech* $x = 0$, $x = \infty$ *spojitou*, máme

$$f(\varepsilon x) = f(0) + \delta,$$
$$f(Nx) = f(\infty) + \delta',$$

kde veličiny δ, δ' jsou tak malé, jak libo, jsou-li jen veličny ε, $\frac{1}{N}$ dosti malé.

Dle toho bude pak výraz (1) roven veličině

$$\big[f(0) - f(\infty)\big] \int_a^b \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon = 0,\ N = \infty} \int_a^b \frac{\delta - \delta'}{x}\, dx,$$

a poněvadž z uvedené vlastnosti funkcí δ a δ' plyne, že poslední limita jest nullou, máme konečně jakožto hodnotu integrálu (1) výraz

$$\big[f(0) - f(\infty)\big] \int_a^b \frac{dx}{x},$$

jenž se právě rovná pravé straně rovnice (1), která tedy tím jest dokázána.

Podotkněme ještě, že uvedený důkaz předpokládá u funkce $f(x)$ pouze schopnosť integrace (integrabilitu) a spojitosť její na místech $x = 0$, $x = \infty$.

2. Klademe-li v integrálu Frullaniově $a = 1$, $b = c$, což není nikterak obecnosti na újmu $\left(\text{ano lze vždy klásti } ax = z,\ \frac{b}{a} = c\right)$, obdržíme vzorec

$$\int_0^\infty \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(cx)}{cx}\, c\right) dx = \big[f(0) - f(\infty)\big] \log c;$$

levá strana jest však pouhým zvláštním případem integrálu

$$J = \int_a^b \big[f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x)\big]\, dx,$$

a sice vznikne odtud dosazením cx za $\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{x}$ za $f(x)$ a volbou $a = 0$, $b = \infty$.

My vyčíslíme integrál J za supposice, že $\varphi(x)$ znamená konečnou a spojitou funkci na mezeře $(a \ldots . b)$ (kde $a < b$), která hoví podmínkám $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, a má v této mezeře kladnou derivaci $\varphi'(x)$, jež je v ní schopnou integrace.

Funkce $f(x)$ jako v případě předešlém má býti podrobena pouze té podmínce, aby připouštěla integraci v mezeře $(a \ldots . b)$ a aby výrazy

$$\lim_{x=a} (x-a) f(x) = A, \quad \lim_{x=b} (x-b) f(x) = B$$

byly určité konečné veličiny.

Píšeme-li za J limitu

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} \left[f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x) \right] dx$$

$$= \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x\ dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(\varphi)\ d\varphi(x) \right\},$$

a transformujeme druhý integrál substitucí x za $\varphi(x)$, máme:

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx - \int_{\varphi(a+\varepsilon)}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x) dx \right\},$$

čili po jednoduché transformaci pravé strany:

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx - \int_{b-\varepsilon'}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x) dx \right\}.$$

Znamenáme-li $g(x) = (x-a)\ f(x)$, bude existovati $\lim_{x=a} g(x) = A$, a my obdržíme, kladouce $g(x) = A + \vartheta(x)$,

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x) dx = \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{g(x) dx}{x-a} = A \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{\vartheta(x)\, dx}{x-a}$$

Funkce $\vartheta(x)$ je nekonečně malá v nekonečně blízkém sousedství místa $x=a$, a poněvadž intervall $[a+\varepsilon \ldots . \varphi(a+\varepsilon)]$ je pro malá ε velmi malý a blízký místu a, bude $\vartheta(x)$ nekonečně malou zároveň s ε; je-li ϑ_ε největší absolutní hodnota této funkce v mezeře $[a+\varepsilon \ldots . \varphi(a+\varepsilon)]$, máme patrně

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = \left(A + \Theta\, \vartheta_\varepsilon \right) \log \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon},$$

kde Θ značí pravý zlomek, t. j. $-1 < \Theta < 1$.

Odtud máme

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = A \log \left(\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon} \right).$$

Jelikož dle supposice $\varphi(a) = a$, bude

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon} = \varphi'(a),$$

a tedy konečně

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = A \log \varphi'(a).$$

Zcela podobně obdržíme

$$\lim_{\varepsilon' = 0} \int_{b-\varepsilon'}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x)\, dx = B \log \varphi'(b),$$

takže hodnota integrálu J bude

$$(2) \qquad \int_a^b \left[f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x) \right] dx = A \log \varphi'(a) - B \log \varphi'(b),$$

kde, jak výše poznamenáno,

$$(3) \qquad A = \lim_{x = a} (x-a) f(x), \qquad B = \lim_{x = b} (x-b) f(x).$$

Že tu ve Frullaniově případě $\varphi(x) = cx$, $a = 0$, $b = \infty$ pravá strana obdrží tvar $[f(0) - f(\infty)] \log c$, je přímo patrno.

Správnosť vzorce (2) jest podmíněna existencí limit (3).

Je-li však $\varphi'(a) = 1$, lze připustiti $A = \infty$, an tu prvý člen pravé strany se objeví ve tvaru neurčitém $\infty \,.\, 0$.

V tomto případě $\varphi'(a) = 1$ možno předpokládati pouze existenci limity

$$(3') \qquad A' = \lim_{x = a} (x-a)^2 f(x),$$

jestliže existuje druhá derivace funkce $\varphi(x)$ a jest spojitou v místě $x = a$. Neb pak bude při $h(x) = (x-a)^2 f(x)$

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{h(x)\, dx}{(x-a)^2}$$

a značí-li ε_0 určitou hodnotu z mezery $[\varepsilon \ldots . \varphi(a+\varepsilon) - a]$, bude pravá strana míti hodnotu*)

$$h(a+\varepsilon_0) \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{dx}{(x-a)^2} = h(a+\varepsilon_0) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varphi(a+\varepsilon) - a} \right]$$

$$= h(a+\varepsilon_0)\, \frac{\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a) - \varphi'(a)\, \varepsilon}{\varepsilon\, [\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a)]},$$

kde brán zřetel k okolnostem $\varphi(a) = a$, $\varphi'(a) = 1$.

* Není-li funkce $f(x) \,.\, (x-a)^2 = h(x)$ spojitou v sousedství bodu $x = a$, dlužno výrazem $h(a + \varepsilon_0)$ rozuměti veličinu obsaženou mezi horní a dolní mezí funkce $h(x)$ na intervallu $[a + \varepsilon \ldots . \varphi(a+\varepsilon)]$.

Tato veličina však má, jak známo, za limitu

$$h(a)\ \frac{\varphi''(a)}{2\,.\,\varphi'(a)} = \frac{1}{2}\,A'\,\varphi''(a)$$

a tedy bude v našem případě

$$(2')\qquad \lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,A'\,.\,\varphi''(a),$$

kteryžto výraz nastoupí na místo prvého členu pravé strany v (2), je-li $\varphi'(a) = 1$, $\lim_{x = a} (x-a)^2\, f(x) = A'$.

3. Budiž nyní funkce $\varphi(x)$ taková, že rovnice $\varphi(x) - x = 0$ má v jistém intervallu určitý počet kořenů $a_1 < a_2 < \ldots < a_m < \ldots$ a že v tomto intervallu derivace $\varphi'(x)$ je kladnou. Dále buď $F(x)$ funkce nekonečná pouze na místech $a_1, a_2, \ldots$, a to ve stupni prvém; znamenáme-li pak

$$\lim_{x = a_\nu} F(x)\,(x - a_\nu) = A_\nu,$$

bude dle věty právě dokázané

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu} \left[F(x) - F'(\varphi)\,\varphi'(x) \right] dx = A_\mu \log \varphi'(a_\mu) - A_{\mu+1} \log \varphi'(A_{\mu+1});$$

sečteme-li tyto výsledky pro $\mu = m,\ m+1,\ \ldots n-1$, máme

$$(4)\qquad \int_{a_m}^{a_n} \left[F(x) - F'(\varphi)\,\varphi'(x) \right] dx = A_m \log \varphi'(a_m) - A_n \log \varphi'(a_n).$$

Jakožto příklad volme zde

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x},$$

kde funkce ψ je dána rovnicí $\varphi(\psi) = x$, a $\Phi(x)$ je konečná v mezích integrace. Tu nám dá rovnice (4)

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_m}^{a_n} \left[\frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x} + \frac{\Phi(\varphi)\,\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} \right] dx \\ \qquad = \Phi(a_m)\,\dfrac{\log \varphi'(a_m)}{\psi'(a_m) - 1} - \Phi(a_n)\,\dfrac{\log \varphi'(a_n)}{\psi'(a_n) - 1}, \end{cases}$$

kde, jak zřejmo, $\psi'(a_\nu) = \dfrac{1}{\varphi'(a_\nu)}$.

A. E. GYMNASIUM KROMĚRÍŽENSE BIBLIOTHECA MAIOR

Frullaniův vzorec (1) hodí se k vyjadřování limit a funkcí přetržitých; neboť pravá strana zní $\left[\lim_{x=\infty} f(x) - f(0)\right] \log \frac{a}{b}$, a tedy bude

$$(1^a) \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = f(0) + \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(x}{x} \, dx$$

Volme na př. $f(x) = \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^x$; pak integrál

$$\frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{\left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^{ax} - \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^x}{x} \, dx$$

má hodnotu 0, a jen v tom případě se rovná 1, kdy u je celistvé číslo liché. Dále výraz

$$\text{sgn. } u = \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \left(\frac{e^{au\,x} - 1}{e^{au\,v} + 1} - \frac{e^{ux} - 1}{e^{ux} + 1} \right) \frac{dx}{x}$$

rovná se 1, 0, — 1, jak jest u kladné, 0, neb záporné, t. j. integrál ten podobně jako

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u\,x}{x} \, dx$$

vyjadřuje znamení veličiny u (proto označení sgn. u).

Sur une extension de la formule de Frullani.

Dans ce petit article nous avons développé une démonstration de la formule de Frullani

$$\int_o^\infty \frac{f(a\,x) - f(b\,x)}{x} \, dx = [f(o - f(\infty)] \log \frac{b}{a}$$

et d'une formule plus générale

$$\int_a^b [(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x)]\, dx = A \log \varphi'(a) - B \log \varphi'(b,$$

où

$$A = \lim_{x=a} (x - a) f(x), \qquad B = \lim_{x=b} (x - b) f(x),$$

et où l'on suppose que la dérivée $\varphi'(x)$ est positive dans l'intervalle $(a \ldots . b)$.

En designant ensuite par $a_1, a_2, a_3 \ldots$ les racines de l'équation $q(x) - x = 0$ nous en avons signalé cette conséquence

$$(4) \qquad \int_{a_m}^{a_n} \left[F(x) - F'(\varphi)\, \varphi'(x) \right] dx = A_m \log \varphi'(a_m) - A_n \log \varphi'(a_n),$$

où

$$A_\alpha = \lim_{x = a_\alpha} (x - a_\alpha)\ F(x),$$

et en prenant

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x},$$

où $\psi(x)$ est la fonction *inverse* de $q(x)$ [c'est à dire $q(\psi) = x$], et Φ étant finie, nous avons conclu la formule

$$\int_{a_m}^{a_n} \left[\frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x} + \frac{\Phi(\varphi)\, \varphi'(x)}{\varphi(x) - x} \right] dx$$

$$= \Phi(a_m) \frac{\log \varphi'(a_m)}{\psi'(a_m) - 1} - \Phi(a_n) \frac{\log \varphi'(a_n)}{\psi'(a_n) - 1}.$$

La note termine avec cette remarque évidente que la formule de Frullani donne l'expression des limites sous la forme des intégrales; nous avons signalé en particulier l'expression

$$\operatorname{sgn} u = \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \left(\frac{e^{a u x} - 1}{e^{a u x} + 1} - \frac{e^{u x} - 1}{e^{u x} + 1} \right) \frac{dx}{x}$$

qui représente le signe de la quantité réelle u; une autre intégrale

$$\frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{\left(\sin^2 \frac{u\pi}{2} \right)^{ax} - \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2} \right)^{x}}{x}\, dx$$

est égale à l'unité, si u est un entier impair et à zéro dans tous les autres cas.

PŘÍSPĚVKY

K THEORII FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH, NEKONEČNÝCH ŘAD A INTEGRÁLŮ OMEZENÝCH.

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 30. ZÁŘÍ 1891.

1. Z theorie integrálů Eulerových známy jsou vzorce

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{s+t}} = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)},$$

$$(2) \qquad \Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}};$$

k těmto připojme vzorce známé z theorie řad Fourierových

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^\alpha f(x)\,\frac{\sin\omega x}{x}\,dx = \lim_{\omega=\infty} \int_0^\alpha f(x)\,\frac{\sin\omega x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,f(0)$$

kde α značí kladnou veličinu, která ve druhém vzorci musí býti menší než π. Pro nás bude důležitým důsledek těchto vzorců

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m\pi)$$

kde limita se vztahuje k celistvým hodnotám n.

Jeli $\alpha > 0$ a $\leqq 1$, máme z (2)

$$\left|\Gamma(\alpha+\beta i)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sqrt{\prod_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{(n+\alpha)^2}} \leqq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{n^2}\right)},$$

tedy

$$(2^a) \qquad \left| \Gamma(\alpha+\beta i) \right| \leqq \Gamma(\alpha+1) \sqrt{\frac{1+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}} \sqrt{\frac{\beta\pi i}{\sin \beta\pi i}},$$

pokud $0 < \alpha \leqq 1$.

Z této nerovnosti obdrží se pomocí vlastnosti funkce $\Gamma(s)$ vyslovené vzorcem $\Gamma(s+n) = (s+n-1)\ (s+n-2) \ldots (s+1)\ s\ \Gamma(s)$ horní mez funkce $\Gamma(\alpha+\beta i)$ i pro ostatní α.

Udělme substitucí $x = e^z$ vzorci (1) tvar

$$(1^a) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sz}\, dz}{(1+e^z)^a} = \frac{\Gamma(s)\ \Gamma(a-s)}{\Gamma(a)},$$

pišme zde $s+nti$, kde t značí kladnou veličinu realnou, násobme $e^{2nu\pi i}$ a utvořme součet vůči $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N$; i obdržíme

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=-N}^{N} \Gamma(s+nti)\ \Gamma(a-s-nti)\ e^{2nu\pi i}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{(1+e^x)^a} \cdot \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(tx+2u\pi)}{\sin\frac{tx+2u\pi}{2}}\, dx;$$

předpokládajíce *u realným*, převeďme pravou stranu substitucí $tx + 2u\pi = 2z$ na tvar:

$$\frac{2}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s}{t}(z-u\pi)}}{\left(1+e^{\frac{2}{t}(z-u\pi)}\right)^a} \cdot \frac{\sin(2N+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Přejděme nyní k mezným hodnotám pro $N = \infty$, užívajíce vzorce (3); i bude

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\ \Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\ e^{2nu\pi i} \\ \\ \displaystyle = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}. \end{array} \right.$$

Levá strana konverguje absolutně i stejnoměrně vůči u pro všecka u obsažená uvnitř *pásu* (u) omezeného dvěma rovnoběžkama s osou realnou vedenýma souměrně vůči této u vzdálenosti $\frac{t}{2}$; t. j. body pásu (u) jsou dány podmínkou $-\frac{t}{2} < \text{Jm. } u < \frac{t}{2}$, značí-li Jm. u pomyslnou část při u.

Abychom obdrželi obor stejnoměrné konvergence pravé strany, v němž by tato byla zároveň jednoznačnou, vylučme z roviny u pomocí přímočarých řezů všecky body u, jichž realné části jsou $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a pomyslné části absolutně větší než $\frac{t}{2}$ $\left(\text{aneb rovny } \frac{t}{2}\right)$. Rovina $[u]$ takto vzniklá z roviny volné u jest ještě oborem souvislým a obsahuje kromě toho celý pás (u).

Definujemeli v pásu (u)

$$\left(1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a = e^{a \log\left(1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)},$$

kde logarithmus je přirozený a má pomyslnou část v mezích $(-\pi \ldots \pi)$, pak bude každá z těchto funkcí konečnou a spojitou i různou od nully pro všecka u uvnitř pásu, a mimo to lze tyto funkce do ostatního oboru $[u]$ jen jedním způsobem propagovati.

Za supposice $0 < \text{Real. } s < \text{Real. } a$ pak konverguje pravá strana rychleji než určitá řada geometrická nezávislá na u, jakmile u leží v okolí určitého místa oboru $[u]$; tudíž jest konvergence pravé strany rovněž stejnoměrná v okolí každého místa uvnitř $[u]$.

2. Jeli a číslo celistvé, bude výraz (4) analytickou funkcí jednoznačnou vůči u v celé rovině u, která má na místech

$$u = n + \left(v + \frac{1}{2}\right) t i, \qquad (n, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

póly stupně a. Užitím elementarných vzorců

$$\Gamma(a - s - n t i) = (1 - s - n t i)\ (2 - s - n t i) \ldots (a - 1 - s - n t i)\ \Gamma(1 - s - n t i),$$

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

obdržíme při označení

$$(z, 0) = 1,\ (z, 1) = z,\ (z, 2) = z(z+1), \ldots (z, v) = z(z+1) \ldots (z+v-1)$$

následující vzorec

$$(4^a) \quad \begin{cases} f_a(u, s) = \dfrac{1}{(a-1)!} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - s - n t i,\ a - 1)}{\sin \pi (s + n t i)}\ e^{2 n u \pi i} \\ \qquad = \dfrac{2}{t} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2 s \pi}{t}(n-u)}}{\left(1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}. \end{cases}$$

Tato funkce hoví patrně rovnicím

$$f_a(u+1) = f_a(u), \quad f_a(u + t i) = e^{-2 s \pi i} f_a(u)$$

a součin $f_a(u, s)\ \vartheta_0(u \mid t i)^a\ \vartheta_1(s \mid t i)$ bude celistvou funkcí transcendentní obou proměnných u, s, a vůči u bude funkcí theta stupně a, tak že

jej lze vyjádřiti pomocí transcendent elliptických, což skutečně provésti může míti svoje obtíže.

Ustanovme nejdříve hodnotu funkce $f_1(u)$ dané řadou

$$(4^b) \qquad f_1(u,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(s+nti)} = \frac{2}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}},$$

při čemž užívati hodláme pouze prvé z našich řad, považujíce ji za funkci komplexní proměnné s, vůči níž existuje v celé rovině a má následující vlastnosti: $f(s+1) = -f(s)$, $f(s+ti) = e^{-2u\pi i} f(s)$, a součin $g(s) = f(s)\,\vartheta_1(s \mid ti)$ jest celistvá funkce transcendentní hovící podmínkám

$$g(s+1) = g(s),\ g(s+ti) = -g(s)\,e^{-\pi i(2s+2u)+ti},$$

které jsou společny též funkci $\vartheta_0(s+u \mid ti)$.

Jakožto funkce theta řádu prvého mohou se obě funkce lišiti toliko stálým činitelem, tak že

$$f_1(u,s) = A\,\frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_1(s)},$$

kde A nezávisí na s. Dle definice (4^b) bude mocninový rozvoj funkce f_1 obsahovati též $\frac{1}{s}$ a sice pochází tato mocnosť jediné ze členu $n=0$; a sice bude patrně

$$f_1(u,s) = \frac{1}{\sin\pi s} + \mathfrak{P}(s) = \frac{1}{\pi s} + \mathfrak{P}_1(s);$$

pravá strana poslední rovnice však začíná svůj rozvoj členem

$$\frac{A\,\vartheta_0(u)}{\vartheta_1'.s},$$

který musí splývati s $\frac{1}{\pi s}$ a tedy $A = \frac{\vartheta_1'}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_0(u)}$, tak že nacházíme*

$$(4^c) \qquad f_1(u,s) = \frac{\vartheta_1'}{\pi}\,\frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(s)},$$

kde elliptické transcendenty ϑ jsou tvořeny vesměs na základě parametru ti.

Z prvého výrazu (4^a) plyne při označení

$$(z,\ a-1) = \varphi\ z)$$

vztah

$$(a-1)!\,f_a = \sum_{n} \sum_{v=0}^{a-1} \frac{\varphi^{(v)}(1-s)}{v!} \quad (\quad nti)^v \quad \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(s+nti)}$$

* Vzorec tento nalezl *Jacobi*; zvlášť jednoduchý důkaz jeho a vzorců podobných i jich důsledky vyvinul p. *Hermite* (Annales de l'Ecole Normale, 1885). Viz též náš důkaz ve 12. svazku Acta math.

aneb

$$(a-1)!\, f_a = \sum_{v=0}^{a-1} \frac{1}{v!}\ \varphi^{(v)}(1-s)\ \left(\frac{-t}{2\pi}\right)^v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2n\pi i)^v\ e^{2nu\pi i}}{\sin \pi(s+nti)},$$

a odtud posléz vůči (4^b)

$$(5)\qquad f_a(u,s) = \frac{1}{(a-1)!} \sum_{v=0}^{a-1} \frac{1}{v!}\ \varphi^{(v)}(1-s)\ .\ \left(\frac{-t}{2\pi}\right)^v \frac{\vartheta_1'}{\pi\vartheta_1(s)}\ D_u^v\ \frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_0(u)}.$$

3. Ve vzorci (4) položme $u = \frac{vt}{2\pi}$, násobme t a přejděme k limitě vůči $t = 0$; i obdržíme dle definice omezeného integrálu vzorec

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+xi)\ \Gamma(a-s-xi)\ e^{vxi}\ dx = 2\pi\ \Gamma(a)\ \frac{e^{vs}}{\left(1+e^{-v}\right)^a};$$

$$0 < \text{Real. } s < \text{Real. } a.$$

Vzorec ten třeba však přesněji dokázati, což se může na př. státi důkazem obecného vzorce *Fourierova*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{vzi}\ dz \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{xzi}\ dx = 2\pi\, f(-v),$$

jímž se však zabývati nehodláme; klademe-li zde

$$f(x) = \frac{e^{sx}}{(1+e^x)^a},$$

obdržíme užívajíce vztahu (1^a) vzorec (6).

Obraťme se nyní k stanovení integrálu

$$A = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} k^s\ \frac{ds}{s},$$

kde k je kladná veličina realná, $a > 0$, a integrace se děje po přímce vedené bodem $s = a$ rovnoběžně s osou pomyslnou. Vyčíslení jeho podaří se pomocí integrálu

$$B = \int k^s\ \frac{ds}{s},$$

v němž cesta integrační skládá se z přímočarých úseků $(a - Ni \ldots a + Ni)$, $(a + Ni \ldots M + Ni)$, $(M + Ni \ldots M - Ni)$, $(M - Ni \ldots a - Ni)$. Zde značí N velikou veličinu kladnou, M velikou veličinu, kladnou pro $k < 1$, zá-

pornou pro $k > 1$, takže pro $k < 1$ leží pól $s = 0$ mimo obor integrační a tedy $B = 0$, kdežto pro $k > 1$ leží $s = 0$ uvnitř oboru toho a pak $B = 2\pi i$.

Jelikož $A = \lim_{M=\infty, N=\infty} B$, máme $A = 0$ pro $k < 1$, $A = 2\pi i$ pro $k > 1$.

Pro $k = 1$ obdržíme přímým vyčíslením

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{ds}{s} = \left[\log s\right]_{s=a-\infty i}^{s=a+\infty i} = \pi i,$$

a tedy máme výsledek:

Jsouli a, k veličiny kladné, bude

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} k^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{» } k = 1 \\ 0 & \text{» } k < 1. \end{cases}$$

Podobně bychom nalezli *v případě* $k > 0$, $a < 0$:

$$(7^a) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} k^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{» } k = 1 \\ -1 & \text{» } k < 1. \end{cases}$$

4. Předpokládajíce, že u je pravý kladný zlomek, násobme (4) differenciálem $\frac{ds}{s}$, a integrujme obě strany v mezích $(b - \infty i \ldots b + \infty i)$, kde $0 < b <$ Real. a; uvážímeli, že dle výsledku předešlého odstavce má integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} \frac{ds}{s}$$

jen tehdy hodnotu od nully různou, jeli exponent $\frac{2\pi}{t}(n-u)$ kladný, obdržíme vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nu\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti) \frac{ds}{s}$$

$\alpha)$

$$= \frac{2\pi\,\Gamma(a)}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}.$$

Obecný člen levé strany přetvořme substitucí $s = b + (x - nt)i$, čímž ona obdrží tvar:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nu\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(b+xi)\,\Gamma(a-b-xi) \frac{dx}{b+xi-nti}$$

aneb též

$$\beta) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(b+xi)\,\Gamma(a-b-xi)\,dx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{b+xi-nti}.$$

Nekonečnou řadu zde se vyskytující lze sečísti na základě vzorce

$$(8) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{v-n}=2\pi i\,\frac{e^{2uv\pi i}}{e^{2v\pi i}-1}$$

platného za podmínky $0<u<1$ při všech v.* Bude pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{b+xi-nti}=\frac{2\pi}{t}\,\frac{e^{\frac{2u\pi}{t}(b+xi)}}{e^{\frac{2\pi}{t}(b+xi)}-1};$$

dosadíme-li tuto hodnotu do výrazu $\beta)$ a transformujeme-li integrál substitucí $b+xi=s$, dospějeme srovnáním veličin $\alpha)$ a $\beta)$ k výsledku:

$$(9) \quad \Gamma(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^{a}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\frac{e^{\frac{2su\pi}{t}}}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1}\,ds,$$

$$(0<u<1,\ 0<b<\text{Real. } a;\ t>0).$$

Ve zvláštním případě $a=1$ máme odtud, kladouce $b=\frac{1}{2}$, tedy $s=\frac{1}{2}+\frac{ix}{t}$, a píšíce $\frac{1}{t}$ místo t:

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{tu\pi}}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ux\pi i}\,dx}{\left(e^{\frac{x\pi}{t}}+e^{-\frac{x\pi}{t}}\right)\left(e^{t\pi+2x\pi i}-1\right)}.$$

Integrál tento rozveďme v součet dle schematu

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n}^{n+1},$$

a transformujme obecný člen substitucí $x=n+z$; tím veličina (9) obdrží tvar:

$$\frac{1}{2}\,e^{tu\pi}\int_{0}^{1}\frac{dz}{e^{t\pi+2z\pi i}-1}\left(\frac{2}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2u\pi i(z+n)}}{e^{\frac{\pi}{t}(z+n)}+e^{-\frac{\pi}{t}(z+n)}}\right);$$

* Vzorec ten jest ode dávna znám; konal dobré služby při studiích p. *Kroneckerových* uveřejněných v Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. d. Wiss. Za nedlouho vyjde tiskem autorův elementarný důkaz v portugalském časopisu jornal de Sciencias mathematicas. Jiný důkaz vyvineme níže na str. 21.

uzávorkovaný výraz lze však psáti též

$$\frac{2}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+nti\right)(z+n)}}{1+e^{\frac{2\pi}{t}(z+n)}},$$

a tato veličina má dle (4ᵇ) a (4ᶜ) hodnotu

$$\frac{\vartheta'_1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0\left(-z+\frac{1}{2}+uti\right)}{\vartheta_0(-z)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+uti\right)}=\frac{\vartheta'_1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(z-uti)}{\vartheta_0(z)\vartheta_2(uti)},$$

tak že vzorec (10) obdrží tvar velmi zajímavý:

$$(10^a)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{uti\pi}\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_2(uti)}\int_0^1\frac{\vartheta_3(z-uti)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{ti\pi+2zi\pi}-1\right)},$$

kde elliptické transcendenty ϑ jsou tvořeny pomocí parametru ti.

Integrál v pravo je celistvou funkcí transcendentní vůči u, jmenovatel $\vartheta_2(uti)$ podobně, rovněž levá strana jest jednoznačnou pro všecka u; následkem toho platí vztah (10ᵃ) pro všecky hodnoty proměnné u.

Pravá strana obdrží neurčitý tvar $\frac{0}{0}$ pro $u=\frac{i}{2t}$, a rovná se tedy dle známé věty poměru derivací čitatele a jmenovatele vůči u; obdržíme tedy

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{2nt\pi}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\vartheta'_0(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{ti\pi+2zi\pi}-1\right)},$$

kterýmžto vzorcem řada *Lambertova* uvedena na tvar integrálu omezeného sestrojeného z funkcí elliptických.*

5. Transformujme známý integrál

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(s)}{\Gamma(a+s)}=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{a-1}dx,$$

v němž realné části veličin a, s jsou kladné, substitucí $x=e^{-z}$, abychom obdrželi

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(s)}{\Gamma(a+s)}=\int_0^\infty e^{-sx}\left(1-e^{-x}\right)^{a-1}dx.$$

* Ponecháváme si na jinou příležitosť vyvinouti na základě jednoduššího principu celou řadu analogických výsledků.

V tomto vzorci kladňme $s + nti$ za s (kde t jest opět kladné a realné), násobme $e^{2nu\pi i}$ a utvořme součet vůči $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; i obdržíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)}\, e^{2nu\pi i}$$

$$= \lim_{N=\infty} \int_0^{\infty} e^{-sx}(1-e^{-x})^{a-1}\, \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(tx-2u\pi)}{\sin\frac{tx-2u\pi}{2}}\, dx.$$

Píšemeli v pravo $tx - 2u\pi = 2z$, obdržíme

$$\frac{2}{t} \lim_{M=\infty} \int_{-u\pi}^{\infty} e^{-\frac{2s}{t}(z+u\pi)} \left(1-e^{-\frac{2}{t}(z+u\pi)}\right)^{a-1} \frac{\sin Mz}{\sin z}\, dz$$

kde $M = 2N + 1$ je celistvé číslo liché. Z věty citované na počátku odstavce 1. plyne, že za *supposice* $0 < u < 1$ tento výraz obdrží hodnotu

$$\frac{2\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(u+n)} \left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(u+n)}\right)^{a-1}.$$

Kdyby $u = 0$, bylo by dlužno předpokládati Real. $a > 1$, aby výsledek byl konvergentním; v tomto případě člen prvý $n = 0$ zmizí a věta je správnou. Tímto způsobem dokázán vzorec velmi zajímavý

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)}\, e^{2nu\pi i} \\ \\ = \displaystyle\frac{2\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(n+u)} \left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n+u)}\right)^{a-1} \end{cases}$$

s podmínkami Real. $a > 0$, Real. $s > 0$, $0 < u < 1$, po případě $u = 0$, Real. $a > 1$, Real. $s > 0$.

Věnujme trochu pozornosti případu $a = 1$. Tu obdržíme píšíce $t = 1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{s+ni} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2s\pi(n+u)} = 2\pi\, \frac{e^{-2su\pi}}{1-e^{-2s\pi}}.$$

Vzorec ten dokázán zde pouze pro real. $s > 0$; vyměnímeli však v levo n za $-n$, a násobímeli po obou stranách $e^{2s\pi}$, shledáme, že vzorec je správný též pro $-s$, $1-u$, tedy též pro Real. $s < 0$. Přechodem k mezi Real. $s = 0$ bychom shledali, že platí též pro ryze pomyslná s, jež nejsou tvaru ni.

Tím by bylo dokázáno, že — píšemeli $s = -vi$ — vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{v-n} = 2\pi i \frac{e^{2vu\pi i}}{e^{2v\pi i}-1}$$

uvedený výše pod č. (8), platí pro všecka v, jež nejsou celistvá, a pro realná u mezery $(0 \ldots 1)$.

Píšemeli u vzorci (12) $u = \frac{vt}{2\pi}$, násobímeli t a přejdeme k mezím pro $t = 0$, obdržíme

$$(13) \qquad \Gamma(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+ix)}{\Gamma(a+s+ix)} e^{2vxi} dx = 2\pi e^{-vs}(1-e^{-v})a-1,$$

kde v je realné a kladné, kdežto a může býti komplexní s kladnou částí realnou. Pouze v krajním případě $v = 0$ musí býti Real. $a > 1$. Formalně zajímavým je případ celistvého $a = r$; podržímeli symbol (z, r) výše definovaný, máme pak $\Gamma(r+s+ix) = (s+ix, r)\ \Gamma(s+ix)$ a tedy vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vxi} dx}{(s+ix, v)} = \frac{2\pi}{(v-1)!} e^{-vs}(1-e^{-v})^{v-1}$$

a jeho zvláštní případ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(s+ix, v)} = 0 .$$

Pravou stranu vzorce (1) lze ještě uvésti na tvar poněkud jiný, rozvinemeli obecný člen dle věty binomické, takže (1) přejde v dvojnásobnou řadu

$$\frac{2\pi}{t} \sum_{n\ v} (-1)^v \binom{a-1}{v} e^{-\frac{2\pi}{t}(s+v)(u+n)},$$

a provedemeli sčítání vůči n, v řadu jednoduchou

$$(12^*) \qquad \frac{2\pi}{t} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{a-1}{v} \frac{e^{-\frac{2u\pi}{t}(s+v)}}{1-e^{-\frac{2\pi}{t}(s+v)}},$$

což jest právě hledaný tvar veličiny (12).

Jeli a číslem celistvým, redukuje se tato řada na konečný počet členů, a my obdržíme:

$$(12^b) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(s+nti, a)} = \frac{2\pi}{(a-1)!\,t} \sum_{\alpha=0}^{a-1} (-1)^\alpha \binom{a-1}{\alpha} \frac{e^{-\frac{2v\pi}{t}(s+\alpha)}}{1-e^{-\frac{2\pi}{t}(s+\alpha)}}.$$

V tomto vzorci pišme t', v' místo t, v, položme $s + mt$ za s, násobme $e^{2mv\pi i}$ a utvořme součet vůči $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; i obdržíme předpokládajíce Real. $t' > 0$,

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(mv + nv')}}{(s + mt + nt'i, a)}$$

$$= \frac{2\pi}{(a-1)!\,t'} \sum_{\alpha=0}^{a-1} (-1)^{\alpha} \binom{a-1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2mv\pi i - \frac{2v'\pi}{t'}(s+\alpha+mt)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s+\alpha+mt)}}.$$

Pravou stranu lze opět vyjádřiti elliptickými výrazy. Za tím účelem vyšetřujme řadu

$$(14^a) \qquad \frac{2\pi}{t'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi}{tt'}(vt'i - v't)(s+mt)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s+mt)}} = f(s),$$

v níž dlužno předpokládati realnou veličinu v' v mezích $(0 \ldots ;)$, a která definuje jednoznačnou funkci analytickou proměnné s hovící podmínkám:

$$f(s+t) = f(s), \quad f(s+t'i) = e^{\frac{2\pi i}{t}(vt'i - v't)} f(s);$$

součin $f(s)\,\vartheta_1\left(\frac{s}{t} \middle| \frac{t'i}{t}\right) = g(s)$ je celistvou funkcí transcendentní, jež hoví podmínkám

$$g(s+t) = -g(s), \quad g(s+t'i) = e^{-\frac{\pi i}{t}(2s + 2v't - 2vt'i + t'i)} g(s),$$

kterým hoví také funkce $\vartheta_1\left(\frac{s + v't - vt'i}{t} \middle| \frac{t'i}{t}\right)$; ze známé věty základní z theorie funkcí elliptických plyne, že funkce ty se liši pouze stálým činitelem, takže

$$f(s) = \frac{A\,\vartheta_1\left(\frac{s + v't - vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\right)}.$$

Rozvoj funkce $f(s)$ dle mocností s začíná členem $\frac{1}{s}$ pochodícím z členu $n = 0$:

$$f(s) = \frac{2\pi}{t'} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s+mt)}} + \mathfrak{P}(s) = \frac{1}{s} + \mathfrak{P}_1(s),$$

kdežto pravá strana začíná svůj rozvoj členem

$$\frac{A\vartheta_1\left(\frac{v't - vt'i}{t}\right)}{\frac{1}{t}\vartheta'_1}\frac{1}{s},$$

z čehož nacházíme porovnáním

$$A = \frac{\vartheta'_1}{t}\frac{1}{\vartheta_1\left(\frac{v't - vt'i}{t}\right)},$$

a následovně

$$(14^b) \qquad f(s) = \frac{\vartheta'_1}{t}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s + v't - vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't - vt'i}{i}\right)},$$

kde funkce ϑ_1 je tvořena na základě parametru $\frac{t'i}{t}$.

Dle této věty pomocné obdrží náš hořejší výsledek tvar

$$(15)\begin{cases} \displaystyle\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(mv + nv')}}{(s + mt + nt'i, a)} \\ = \dfrac{\vartheta'_1}{(a-1)!\,t}\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{a-1}(-1)^{\alpha}\binom{a-1}{\alpha}e^{-\frac{v\pi i}{t}(s+\alpha)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha+v't-vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)}, \end{cases}$$

kde součet v levo vztahuje se ke všem soustavám čísel $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a v případě, že by konvergence řady nebyla absolutní, což nastane pro $a = 1, 2$, dlužno nejprvé sečísti vůči n.

Zvláštní případ $a = 1$ vyšetřoval p. *Kronecker*,* jehož vzorec

$$(15^a)\quad \sum_{m\ n}\frac{e^{2\pi i(mv + nv')}}{s + mt + nt'i} = \frac{\vartheta'_1}{t}\,e^{-\frac{2vs\pi i}{t}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s + vt - vt'i}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't - vt'i}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)}$$

ostatně může vésti přímo k výsledku (15).

Je vidno, že bychom podobným rozborem jako u integrálu Eulerova druhu prvého podrobiti mohli množství jiných výrazů, a že bychom tak dospěli ke vzorcům zajisté velmi zajímavým, ač namnoze složitým. Poznamenávajíce toliko, že vzorec

$$\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x}e^{sx}dx$$

* Sitzungsberichte der preussischen Akad. der Wiss. 1890, p. 125.

vede k výsledkům

$$(16)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s+nti)\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\, e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+xi)\, e^{vxi}\, dx = 2\pi\; e^{-e^{-v}}\; e^{-sv},$$

kde dlužno předpokládati Real. $s > 0$, $-\frac{t}{4} < \text{Im. } u < \frac{t}{4}$, a v druhém Real. $s > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \text{Im. } v < \frac{\pi}{2}$, ponecháváme si na příští příležitosť vyvozené zde výsledky z části jiným způsobem vyložiti a je zobecniti.

Contributions à la théorie des fonctions elliptiques, des séries et des intégrales définies.

(Résumé.)

Dans cette note nous avons démontré quelque formules du calcul intégral qui sont semblables à quelques développements connus de la théorie des fonctions elliptiques. Nous établissons en premier lieu la relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\, e^{2nu\pi i}$$

$$= \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a},$$

dans laquelle la partie réelle de a est supérieure à cele de s qui elle-même est positive, tandisque t est réelle et positive, et la partie imaginaire de u est contenue entre $-\frac{t}{2}$ et $\frac{t}{2}$.

Lorsque a est entier, cette quantité s'exprime à l'aide des fonctions elliptiques.

Nous avons remarqué en passant la conséquence

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+xi)\;\Gamma(a-s-xi)\;e^{vxi}\;dx = 2\pi\;\Gamma(a)\;\frac{e^{vs}}{\left(1+e^{-v}\right)^a},$$

et nous sommes bornés à établir la formule

$$\Gamma(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^{a}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma s)\Gamma(a-s)\;\frac{e^{\frac{2su\pi}{t}}}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1}\,ds,$$

où la partie réelle de b est positive et inférieure à la partie réelle de a. Le cas particulier de $a=1$ conduit à la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{utn\pi}\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_2(uti)}\int_0^1\frac{\vartheta_3(z-uti)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)}$$

qui, pour $u=\frac{i}{2t}$, donne cette représentation de la série de Lambert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{2nt\pi}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\vartheta'_0(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)}\;.$$

Les fonctions théta y sont formées à l'aide du paramètre ti. Le reste de la note est consacré à la démonstration des formules

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a)\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)}\;e^{2nu\pi i}$$

$$=\frac{2\pi}{t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2s\pi}{t}(n+u)}\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n+u)}\right)^{a-1},$$

où u est réel et entre 0 et 1, et les parties réelles de a, s sont positives; puis

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(mv+nv')}}{(s+mt+nt'i,a)}$$

$$=\frac{\vartheta'_1}{(a-1)!\,t}\sum_{\alpha=0}^{a-1}(-1)^{\alpha}\binom{a-1}{\alpha}\;e^{-\frac{2v\pi i}{t}(s+\alpha)}\;\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha+v't-vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)},$$

les indices sommatoires m, n devant parcourir les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, les ϑ_1 étant formées à l'aide du paramètre $\frac{t'i}{t}$, et on a posé, pour abréger,

$$(s,\ a)=(s+1)\ldots(s+a-1);$$

enfin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma(s+nti)\,e^{2nu\pi i}=\frac{2\pi}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\;e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}\;.$$

ELEMENTÁRNÉ STANOVENÍ

ASYMPTOTICKÉ HODNOTY LEGENDREOVÝCH MNOHOČLENŮ.

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 10. ŘÍJNA 1891.

1. Maclaurinovským rozvojem funkce proměnné α

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \ldots + X_n \alpha^n + \ldots .$$

definované polynomy $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ slují *Legendre*ovými; je tu totiž X_n celistvou funkcí x stupně n, a sice sudou neb lichou, jak jest n sudé neb liché.

Značí-li ϱ_1, ϱ_2 kořeny rovnice kvadratické

$$1 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0,$$

takže $\varrho_1 \varrho_2 = 1$, bude

$$1 - 2\alpha x + \alpha^2 = (1 - \varrho_1 \alpha)(1 - \varrho_2 \alpha)$$

a rovnici (1) lze psáti

$$(1^a) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \varrho_1 \alpha}\,\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \alpha^n ,$$

kde za odmocniny $\sqrt{1 - \varrho_1 \alpha}$, $\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha}$ dlužno voliti t. zv. hodnoty *hlavní*, jichž části realné jsou kladny.

Úkolem naším bude odvoditi vzorec, kterým se dá X_n pro veliká n sblíženě vystihnouti.

Za tím účelem differencujme rovnici (1) neb (1^a):

$$\frac{x - \alpha}{(1 - \varrho_1 \alpha)^{\frac{3}{2}}\,(1 - \varrho_2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n X_n \alpha^{n-1} = V ,$$

a utvořme rozvoj výrazu

$$\frac{V}{(1 - \varrho_2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x - \alpha}{(1 - \varrho_2 \alpha)^2\,(1 - \varrho_1 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(1 - \varrho_2 \alpha)^2} + \frac{a'}{1 - \varrho_2 \alpha} + U ,$$

kde U jest řada obsahující vesměs kladné mocnosti veličiny $1 - \varrho_2 \alpha$. *Při tom předpokládáme, že* $|\varrho_1| < 1 < |\varrho_2|$, takže U jest holomorfní uvnitř kruhu $|\alpha| = |\varrho_2|$, a řada tamtéž absolutně konverguje. Veličina a, jež jediné nás bude zajímati, má hodnotu

$$\lim_{\alpha = \frac{1}{\varrho_2}} V(1 - \varrho_2 \alpha)^{\frac{3}{2}} = \lim_{\alpha = \varrho_1} \frac{x - \alpha}{(1 - \varrho_1 \alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

t. j.

$$a = \frac{x - \varrho_1}{(1 - \varrho_1^{\,2})^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Funkci U lze rozvinouti v řadu

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \alpha^\nu$$

jež konverguje absolutně uvnitř kruhu $|\alpha| = |\varrho_2|$, a tedy též pro $\alpha = \varrho_1$; binomialní řada $\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha} = \Sigma c'_\nu \alpha^\nu$ konverguje pak ještě na místě $\alpha = \varrho_1$, a sice absolutně, takže součin

$$U\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha} = \sum_{\mu,\nu} c_\mu c'_\nu \alpha^{\mu+\nu}$$

bude dvojnásobnou řadou absolutně konvergentní.

Odtud plyne vůči nerovnosti

$$\Big|\sum_{\mu+\nu=n} |c_\mu c'_\nu|\Big| \leqq \sum_{\mu+\nu=n} |c_\mu c'_\nu|\,,$$

že též mocninový rozvoj

$$U\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$$

konverguje absolutně na místě $\alpha = \varrho_1$.

Poněvadž pak

$$V = \frac{a}{(1 - \varrho_2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a'}{(1 - \varrho_2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} + U\sqrt{1 - \varrho_2 \alpha},$$

obdržíme dosazením rozvojů za jednotlivé členy:

$$\begin{aligned}\sum n X_n \alpha^{n-1} = &\sum \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\, a\, \varrho_2^{\,n-1}\, \alpha^{n-1} \\ &+ \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\, a'\, \varrho_2^{\,n-1}\, \alpha^{n-1} \\ &+ \sum a_n \alpha^n\end{aligned}$$

a odtud porovnáním součinitelů při α^{n-1}:

$$\varrho_1^{\,n-1}\, n X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,[(2n-1)a + a'] + a_{n-1}\, \varrho_1^{\,n-1}$$

Tu jest ale, jak známo,*

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} = \frac{1+\delta_n}{\sqrt{n\pi}}, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

a tedy

$$\varrho_1{}^{n-1}\, n X_n = 2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+\delta_n) + \left[\frac{a'(1+\delta_n)}{\sqrt{n\pi}} + a_{n-1}\,\varrho_1{}^{n-1}\right].$$

Veličina v závorce [ ] blíží se nulle pro veliká n a tedy lze ji psáti ve tvaru $2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\delta'_n$, kde $\lim_{n=\infty} \delta'_n = 0$; bude tedy

$$\alpha) \qquad \varrho_1{}^{n-1}\, n X_n = 2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,(1+\varepsilon_n),$$

kde položeno

$$1+\varepsilon_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+\delta_n) + \delta'_n,$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Klademeli, jak z kvadratické rovnice plyne řešením,

$$\varrho_1 = x - \sqrt{x^2-1}, \quad \varrho_2 = x + \sqrt{x^2-1},$$

takže dlužno předpokládati

$$(4) \qquad |\, x+\sqrt{x^2-1}\,| > 1,$$

bude

$$a = \frac{x-\varrho_1}{(1-\varrho_1{}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(1-\varrho_1{}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde jmenovatel má realnou část kladnou. Avšak

$$1-\varrho_1{}^2 = 2\varrho_1(\varrho_2-x) = 2\varrho_1\sqrt{x^2-1},$$

tedy

$$(1-\varrho_1{}^2)^{\frac{3}{2}} = 2\varrho_1\sqrt{x^2-1}\,\sqrt{2\varrho_1\sqrt{x^2-1}},$$

kde odmocnina má realnou část kladnou. Z toho plyne

$$a = \frac{\varrho_2}{2\sqrt{2}\,\sqrt{\varrho_1\sqrt{x^2-1}}},$$

kde jmenovatel je kladný ve své části realné.

---

* Viz na př. Cours de M. Hermite, 4. vyd., 1891 (Paříž, A. Hermann), p. 116, kde výsledek ten dokázán způsobem velmi zajímavým.

Dle toho obdrží výsledek α) tvar

$$X_n = \frac{\varrho_2^{\,n}}{\sqrt{2n\pi}\,\sqrt{\varrho_1\,\sqrt{x^2-1}}}\,(1+\varepsilon_n),$$

aneb

$$(3)\qquad X_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2n\pi}}\cdot\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}\,(1+\varepsilon_n),$$

s podmínkami

$$\left|\,x+\sqrt{x^2-1}\,\right| > 1, \text{ real. č. } \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x_2-1}}} > 0,$$

při čemž ε_n značí neznámou veličinu, která jest ale pro veliká n velmi malou.

2. Vzorec (3) vyjadřuje t. z. asymptotickou hodnotu funkce X_n (pro veliká n). Výsledek ten lze rozmanitým způsobem zobecniti. Tak na př. můžeme zcela podobnou cestou dospěti k asymptotické hodnotě veličiny Y_n definované rozvojem

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varrho_1\alpha)(1-\varrho_2\alpha)\ldots\left(1-\varrho_p\alpha\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n\,\alpha^n,$$

kde $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ jsou konstanty, z nichž ϱ_1 má největší a ϱ_2 nejblíže menší absolutní hodnotu.

Píšemeli

$$\prod_{\sigma=1}^{p}(1-\varrho_\sigma\,\alpha) = 1 + r_1\,\alpha + r_2\,\alpha^2 + \ldots + r_p\,\alpha^p,$$

obdržíme differencováním ze (4)

$$-\frac{r_1 + 2r_2\,\alpha + 3r_3\,\alpha^2 + \ldots + p\,r_p\,\alpha^{p-1}}{\prod_{\sigma=1}^{p}(1-\varrho_\sigma\,\alpha)^{\frac{3}{2}}} = 2\sum n\,Y_n\,\alpha^{n-1} = V.$$

Podíl

$$\frac{V}{\sqrt{1-\varrho_1\alpha}}$$

jest jednoznačným uvnitř kruhu $|\alpha| = \left|\frac{1}{\varrho_2}\right|$, uvnitř něhož leží též bod $\frac{1}{\varrho_1}$. Ustanovímeli tedy vhodně konstanty a, a', bude rozdíl

$$U = \frac{V}{\sqrt{1-\varrho_1\alpha}} - \frac{a}{(1-\varrho_1\alpha)^2} - \frac{a'}{1-\varrho_1\alpha}$$

holomorfní funkcí uvnitř tohoto kruhu, a dá se tedy vyjádřiti řadou $\Sigma\, c_\nu\,\alpha^\nu$ absolutně konvergentní uvnitř tohoto oboru. Z toho se snadno odvodí, že rozvoj funkce

$$U\,\sqrt{1-\varrho_1\alpha} = \sum a_n\,\alpha^n$$

konverguje absolutně na místě $\alpha = \frac{1}{\varrho_1}$.

Jelikož pak

$$V = \frac{a}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a'}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{1}{2}}} + U\sqrt{1-\varrho_1\alpha}\ ,$$

máme po dosazení rozvojů

$$2\sum n Y_n\, \alpha^{n-1} = \sum \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\, a\varrho_1{}^{n-1}\, \alpha^{n-1} + \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\, a'\varrho_1{}^{n-1}\, \alpha^{n-1} + \sum a_{n-1}\, \alpha^{n-1}\ ,$$

a odtud

$$2n Y_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\, \varrho_1{}^{n-1}\, \left((2n-1)a + a'\right) + a_{n-1}\ ;$$

jelikož

$$\sum \frac{a_{n-1}}{\varrho_1{}^{n-1}}$$

konverguje absolutně, soudíme z toho podobně jako předešle, že bude

$$Y_n = \frac{a}{\sqrt{n\pi}}\, \varrho_1{}^{n-1}\, (1+\varepsilon_n)\ ,$$

kde $\lim \varepsilon_n = 0$.

Avšak

$$a = \lim_{1-\varrho_1\alpha=0} V.(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}} = -\frac{r_1 + 2r_2\varrho_1{}^{-1} + \ldots + p r_p\, \varrho_1{}^{-p+1}}{\prod_{\sigma=2}^{p}\left(1-\varrho_\sigma\, \varrho_1{}^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

a tu

$$r_1 + 2r_2\varrho_1{}^{-1} + 3r_3\varrho_1{}^{-2} + \ldots + p r_p\, \varrho_1{}^{-p+1} = -\varrho_1 \prod_{\sigma=2}^{p}\left(1-\frac{\varrho_\sigma}{\varrho_1}\right),$$

takže

$$a = \varrho_1 \prod_{\sigma=2}^{p}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}}\ ,$$

kde odmocniny jsou kladny ve svých částech realných.

Máme tedy

$$(4^a) \qquad Y_n = \frac{\varrho_1{}^n}{\sqrt{n\pi}} \prod_{\sigma=2}^{p}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}}\ (1+\varepsilon_n)\ ,\ \lim \varepsilon_n = 0\ .$$

Připomeňme, že z rovnice

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r_1\alpha + r_2\alpha^2 + \ldots + r_p\, \alpha^p}} = \sum Y_n\, \alpha^n$$

plyne, že Y_n jest celistvá racionalná funkce veličin $r_1, r_2, \ldots r_p$; ϱ_1 jest reciproká hodnota absolutně nejmenšího kořene rovnice

$$1 + r_1 \alpha + r_2 \alpha^2 + \ldots + r_p \alpha^p = 0 ;$$

z rovnice (4ª) pak máme

$$\varrho_1 = \lim_{n=\infty} Y_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{Y_{n+1}}{Y_n} .$$

3. Abychom naznačili jiný způsob generalisace výsledku (3), uvažujme celistvé funkce Z_n definované rozvojem

$$(5) \qquad \frac{1}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \alpha^n .$$

Differencováním obdržíme odtud

$$2\mu \frac{x - \alpha}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\mu+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n \alpha^{n-1} = V .$$

Jmenovatele levé strany možno psáti

$$(1 - \varrho_1 \alpha)^{\mu+1} (1 - \varrho_2 \alpha)^{\mu+1} ,$$

kde ϱ_1, ϱ_2 mají týž význam jako v odstavci 1. a mocnosti značí hodnotu hlavní (danou rozvojem binomialným).

Funkce

$$U = \frac{V}{(1 - \varrho_2 \alpha)^{1-\mu}} - \frac{a}{(1 - \varrho_2 \alpha)^2} - \frac{a'}{1 - \varrho_2 \alpha}$$

bude za supposice $|\varrho_2| > |\varrho_1|$ při vhodně volených a, a' holomorfní uvnitř kruhu $|\alpha| = |\varrho_2|$ a rozvoj Maclaurinovský funkce

$$U(1 - \varrho_2 \alpha)^{1-\mu} = \sum a_n \alpha^n$$

bude konvergovati absolutně na místě $\alpha = \varrho_1$, předpokládaje, že veličina $1 - \mu$ jest realnou a kladnou. Pak ale máme

$$V = \frac{a}{(1 - \varrho_2 \alpha)^{\mu+1}} + \frac{a'}{(1 - \varrho_2 \alpha)^\mu} + (1 - \varrho_2 \alpha)^{1-\mu} U ,$$

aneb po dosazení řad a porovnání součinitelů:

$$n Z_n = (-1)^{n-1} \binom{-\mu-1}{n-1} a \varrho_2^{n-1} + (-1)^{n-1} \binom{-\mu}{n-1} a' \varrho_2^{n-1} + a_{n-1} .$$

Avšak

$$\binom{-\mu-1}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)\Gamma(\mu+1)} ,$$

$$\binom{-\mu}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{\Gamma(n)\Gamma(\mu)} ,$$

a dále:

$$\frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)} = n^{\mu}\,(1+\delta_n), \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0\ .$$

Následovně obdržíme

$$n\,Z_n = \frac{n^{\mu}\,a}{\Gamma(\mu+1)}\ \varrho_2{}^{n-1}\,(1+\delta_n) + \frac{n^{\mu-1}\,a'}{\Gamma(\mu)}\ \varrho_2{}^{n-1}\,(1+\delta'_n) + a_{n-1}\ ;$$

uvážímeli, že řada

$$\Sigma\, a_{n-1}\ \varrho_1{}^{n-1}$$

konverguje absolutně, a tedy

$$\lim\ a_{n-1}\ \ \varrho_1{}^{n-1} = 0,$$

nalezneme při $\mu > 0$ podobně jako v odst. 1.

$$n\,Z_n = \frac{n^{\mu}\,a}{\Gamma(\mu+1)}\ \varrho_2{}^{n-1}\,(1+\varepsilon_n), \ \lim\ \varepsilon_n = 0\ .$$

Dosadímeli sem za a hodnotu

$$a = \lim_{1-\varrho_2\alpha=0} V(1-\varrho_2\alpha)^{\mu+1} = \lim_{\alpha=\varrho_1} 2\mu\,\frac{x-\alpha}{(1-\varrho_1\alpha)^{\mu+1}},$$

tedy

$$a = 2\mu\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{(1-\varrho_1^2)^{\mu+1}} = \frac{\mu}{\varrho_1}\,\frac{1}{(1-\varrho_1^2)^{\mu}},$$

kde ve jmenovateli přicházející mocnosť značí hodnotu hlavní, obdržíme

$$(5^a) \qquad Z_n = \frac{n^{\mu-1}}{2^{\mu}\,\Gamma(\mu)}\,(x+\sqrt{x^2-1})^n\,\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu}(1+\varepsilon_n),$$

kde

$$|\ x+\sqrt{x^2-1}\ | > 1\ ,$$

a mocnosť

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu}$$

značí hodnotu hlavní.

Jak snadno nalezneme, jest

$$Z_n = (-1)^n \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{-\mu}{n-\sigma}\binom{n-\sigma}{\sigma}(2x)^{n-2\sigma},$$

kde $\left[\frac{n}{2}\right]$ značí buď $\frac{n}{2}$ neb $\frac{n-1}{2}$, jak jest n sudé neb liché. Jinak psáno, bude

$$Z_n = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\sigma}\binom{\mu+n-\sigma-1}{n-\sigma}\binom{n-\sigma}{\sigma}(2x)^{n-2\sigma}\ .$$

Démonstration élémentaire de la formule asymptotique relative aux polynômes de Legendre.

Dans cette note nous avons considéré les polynômes X_n et Z_n donnés par les développements par la série de Maclaurin

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum X_n \alpha^n \ ,$$

$$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\mu}} = \sum Z_n \alpha^n \ , \quad 0 < \mu < 1 \ ,$$

et avons obtenu leur valeurs asymptotiques sous la forme

$$X_n \sim \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2n\pi}} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}} \ ,$$

$$Z_n \sim \frac{n^{\mu-1}}{2^{\mu}\,\Gamma(\mu)} (x+\sqrt{x^2-1})^n \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu} \ ,$$

où l'on suppose $|x+\sqrt{x^2-1}| > 1$, et les quantités

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}, \quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu}$$

représentent les valeurs fondamentales des puissances de la quantité

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

qui est bien définie par la condition appelée ci-dessus.

Nous avons démontré aussi que les fonctions entières Y_n données par le développement

$$\frac{1}{\sqrt{1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\ldots+r_p\alpha^p}} = \sum Y_n \alpha^n$$

ont pour valeur asymptotique l'expression

$$\frac{\varrho_1^{-n}}{\sqrt{n\pi}} \prod_{\sigma=2}^{p} \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}} \ ,$$

ϱ_1^{-1} représentant la plus petite racine, en valeur absolue, de l'équation

$$1+r_1\alpha+\ldots+r_p\alpha^p = 0$$

et ϱ_σ étant les inverses des autres racines de cette équation.

Nos démonstrations réposent uniquement sur la comparaison des coefficients dans les développements, par la série de Taylor, de certaines fonctions très simples.

NOVÉ

ODVOZENÍ LEGENDREOVA VZORCE

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\, nx\; dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} \;=\; a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\, x\; dx}{\sqrt{1-a^2\;\sin^2\, x}}.$$

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 10. ŘÍJNA 1891.

Vzorec nadepsaný odvodil *Legendre* ve svém klassickém spise o integrálech elliptických v II. sv., str. 536. Týmž vzorcem zabýval se dále *Jacobi*,* jemuž podobně jako předchůdci jeho ušla jednoduchá podstata tohoto zjevu nikterak neobyčejného. Ukážeme, že vzorec ten plyne bezprostředně pomyslnou substitucí užitím věty Cauchyovy o integraci v oboru pomyslném, a poněvadž jest jen velmi zvláštním případem obecnějšího theorému, obrátíme se k odvození tohoto.

Budiž $f(t)$ funkce jednoznačná uvnitř kruhu $|t| = 1$ v rovině sloužící ku znázornění komplexní proměnné t, a předpokládejme, že $f(t)$ připouští integraci podél obvodu tohoto kruhu. Nechť má dále $f(t)$ uvnitř kruhu pouze konečný počet míst zvláštních, a to póly stupně prvního $c_1, c_2, \ldots c_m$ o residuích $R_1, R_2, \ldots R_m$, různé od místa $t = 0$; konečně znamenej nám a kladnou veličinu realnou a menší než 1, tak aby mezera $(0 \ldots . a)$ neobsahovala pólů c funkce $f(t)$.

Uvažujme pak integrál

$$J = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{\alpha i \varphi} (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi \ ,$$

kde β má realnou část kladnou, α je celistvé a $\alpha - \beta$ má realnou část větší než -1; mocnina $(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{\beta}$ dána jednoznačně řadou binomialní a značí t. zv. hodnotu hlavní.

Substitucí $e^{i\varphi} = t$ obdrží integrál tvar

$$J = -i \int_{|t|=1} f(t)\, t^{\alpha - 1} (1 - at)^{\beta - 1} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\beta - 1} dt \ ,$$

kde integrace děje se podél kružnice $|t| = 1$ ve směru kladném.

Funkce $f(t)\ (1 - at)^{\beta - 1}\ t^{\alpha - 1}$ jest jednoznačnou uvnitř kruhu $|t| = 1$, ale funkce $\left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\beta - 1}$ jest víceznačnou na místě $t = a$ i na $t = 0$. Vedemeli však *řez* $(0 \ldots . a)$, čímž kruh přejde v obor $[t]$, bude funkce pod

* Formula transformationis integralium definitorum. Crelleův žurnál sv. 15.

znamením integračním v tomto oboru jednoznačnou. Pro $|t| > a$ jest funkce $\left(1 - \frac{a}{t}\right)^{\beta - 1}$ dána binomialním rozvojem a značí tedy hlavní větev mocninové funkce, t. j. je tvaru $e^{(\beta - 1)\log\left(1 - \frac{a}{t}\right)}$, kde logarithmus má pomyslnou část v mezích $(-\pi \ldots \pi)$. Podržímeli tuto definici, bude funkce jednoznačnou v oboru $[t]$, a má v bodech na levé resp. pravé straně řezu $(0 \ldots a)$ hodnoty

$$e^{(\beta-1)\log\left(1-\frac{a}{t+0.i}\right)} = e^{(\beta-1)\left[\log\left(\frac{a-t}{t}\right)+\pi i\right]} = \left(\frac{a-t}{t}\right)^{\beta-1} e^{(\beta-1)\pi i}$$

$$e^{(\beta-1)\log\left(1-\frac{a}{t-0.i}\right)} = e^{(\beta-1)\left[\log\left(\frac{a-t}{t}\right)-\pi i\right]} = \left(\frac{a-t}{t}\right)^{\beta-1} e^{-(\beta-1)\pi i}.$$

Integrál

$$J' = -i\int_{[t]} f(t)\, t^{\alpha-1}(1-at)^{\beta-1}\left(1-\frac{a}{t}\right)^{\beta-1} dt$$

vzatý v kladném směru podél obvodu oboru $[t]$ rovná se dle známé věty Cauchyovy součtu residuí funkce integrované na pólech $c_1, c_2, \ldots c_m$, násobenému $2\pi i$, a tedy značíli $R_1, R_2, \ldots R_m$ residua funkce $f(t)$ na těchto pólech, *které buďtež stupně prvního*, obdržíme

$$J' = 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} R_\nu (1 - a c_\nu)^{\beta-1}\left(1-\frac{a}{c_\nu}\right)^{\beta-1} c_\nu^{\alpha-1}.$$

Avšak integrál J' skládá se z integrálu podél kruhu $|t| = 1$ a podél řezu $(0 \ldots a)$, takže

$$J' = J - ie^{(\beta-1)\pi i}\int_a^0 f(t)(1-at)^{\beta-1}(a-t)^{\beta-1} t^{\alpha-\beta} dt$$
$$- ie^{-(\beta-1)\pi i}\int_0^a f(t)(1-at)^{\beta-1}(a-t)^{\beta-1} t^{\alpha-\beta} dt,$$

takže porovnáním obou hodnot J' máme po jednoduché modifikaci:

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\varphi}\right) e^{\alpha i\varphi}(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ \displaystyle = 2\sin\beta\pi \int_0^a f(t)\, t^{\alpha-\beta}(a-t)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1} dt \\ \displaystyle + 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} R_\nu (1 - a c_\nu)^{\beta-1}\left(1-\frac{a}{c_\nu}\right)^{\beta-1} c_\nu^{\alpha-1}. \end{cases}$$

Volímeli $f(t) = t^n$, kde n je kladné celistvé číslo, odpadají veškery póly c a tedy všecka $R_\nu = 0$, takže nacházíme pro $\alpha = 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{n i \varphi} (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi$$

$$= 2 \sin \beta\pi \,.\, \int_0^{a} t^{n-\beta} (a-t)^{\beta-1} (1-at)^{\beta-1} dt \ ,$$

aneb jinak psáno:

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos n\varphi \,.\, (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi \\ \\ = \sin\beta\pi \,.\, \displaystyle\int_0^{a} t^{n-\beta}(a-t)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1} dt \ ; \end{cases}$$

klademeli zde $\beta = \frac{1}{2}$ a přetvoříme integrál substitucí $t = a \sin^2 x$, obdržíme vzorec Legendreův uvedený v titulu, který se jeví tedy jako zvláštní případ vzorce (2).

Pomocí vzorce (2) snadno nalezneme

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{a} \frac{(1-t^2)\, t^{-\beta}(a-t)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1} dt}{1 - 2t\cos x + t^2} \\ \\ = \dfrac{\pi}{\sin\beta\pi} (1 - 2a\cos x + a^2)^{\beta-1} \ , \end{cases}$$

kde β má reálnou část v mezích $(0 \ldots 1)$.

Ve zvláštním případě $\beta = \frac{1}{2}$ plyne odtud při označení $\cos x = b$ po jednoduché transformaci

$$(3^a) \qquad \int_0^{1} \frac{(1 - a^2 t^2) dt}{(1 - 2abt + a^2 t^2) \sqrt{t(1-t)(1-a^2 t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 2ab + a^2}} \ .$$

Vzorec ten platí pro všecka b, pro něž obě strany existují.

Volímeli dále $f(t) = \frac{1}{t - az}$, kde z je uvnitř kruhu $|t| = a^{-1}$, avšak mimo intervall $(0 \ldots 1)$, obdržíme z (1) pro $\alpha = 0$ vzorec:

$$(4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1} d\varphi}{e^{i\varphi} - az} \\ \\ = \dfrac{2\sin\beta\pi \,.}{a} \displaystyle\int_0^{1} t^{-\beta}(1-t)^{\beta-1}(1-a^2 t)^{\beta-1} \frac{dt}{t-z} \\ \\ + \dfrac{2\pi}{az}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\beta-1} (1 - a^2 z)^{\beta-1} \ . \end{cases}$$

Déduction nouvelle de la formule de Legendre

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n x \, dx}{\sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}} = a^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x \, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}.$$

Dans cette note nous avons établi le theorème suivant dont la formule précédente est un cas très particulier:

$f(t)$ désignant une fonction uniforme à l'intérieur du cercle $|t| = 1$, n'y ayant que des pôles simples différents de zéro $c_1, c_2, \ldots c_m$ avec les résidus correspondants $R_1, R_2, \ldots R_m$, en représentant ensuite par a une fraction positive telle que l'intervalle $(0 \ldots a)$ ne contient aucun des pôles $c_1, c_2, \ldots c_m$ on a la formule

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{\alpha i \varphi} (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi$$

$$= 2\sin\beta\pi \int_0^{a} f(t)\, t^{\alpha - \beta} (t - a)^{\beta - 1} (1 - at)^{\beta - 1} dt$$

$$+ 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} R_\nu (1 - a c_\nu)^{\beta - 1} \left(1 - \frac{a}{c_\nu}\right)^{\beta - 1} c_\nu^{\alpha - 1},$$

dans laquelle α est un entier nul ou positif tel que la partie réelle de $\alpha - \beta$ soit supérieure à -1.

En prenant $f(t) = t^n$, $\alpha = 0$, on a la formule

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \,.\, (1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta - 1} d\varphi$$

$$= \sin\beta\pi \int_0^{a} t^{n - \beta} (a - t)^{\beta - 1} (1 - at)^{\beta - 1} dt$$

qui pour $\beta = \frac{1}{2}$ devient celle de Legendre.

On en déduit

$$\int_0^{a} \frac{(1 - t^2)\, t^{-\beta} (a - t)^{\beta - 1} (1 - at)^{\beta - 1} dt}{1 - 2t\cos x + t^2} = \frac{\pi}{\sin\beta\pi} (1 - 2a\cos x + a^2)^{\beta - 1},$$

et en prenant $\beta = \frac{1}{2}$, cos $x = b$,

$$\int_0^1 \frac{(1-a^2t^2)\,dt}{(1-2abt+a^2t^2)\sqrt{t(1-t)(1-a^2t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ab+a^2}}.$$

On a signalé aussi l'application qui résulte pour $f(t) = \frac{1}{t-az}$, z étant contenu dans le cercle $|t| = \frac{1}{a}$.

La démonstration de la formule fondamentale consiste dans une substitution imaginaire.

Tiskem J. Otty v Praze.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 9.

STANICE
DILUVIÁLNÍHO ČLOVĚKA
U LUBNÉ V ČECHÁCH.

PŘEDBĚŽNÁ ZPRÁVA.

PODÁVÁ

JAN KUŠTA.

PŘEDLOŽENO DNE 16. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1891.

Tiskem J. Otty v Praze.

Zbytky člověka anebo památky práce jeho nebyly posud v českých diluviálních náplavech nikde na jisto dokázány, až se mi poštěstilo nalézti v cihlářské hlíně u Lubné kulturní vrstvičku, kterouž jsem loni ve Věstníku kr. čes. spol. n. (1891 p. 231—239 se 2 tabulkami) popsal.

Památná vrstvička poskytla mi 13 pazourkových nástrojů, 2 parohy sobí, kosti ssavců, rozbité a rozštípané, jak mi hned bylo patrno, člověkem diluviálním a obsahovala dále vypálené desky železitého pískovce a oblásky, které sem člověk, současník soba, jak ze všech okolností zřejmo, původně nanesl.

Z kostí ssavčích určil mi laskavě p. dr Woldřich kromě soba, ještě 3 druhy. —

Letos hledal jsem v Lubenském nalezišti mnohem usilovněji a to od května až do října. Dal jsem odkryti na ploše celkem 25 m^2 kulturní vrstvu, z níž vybral jsem vlastní rukou velice zajímavý a bohatý materiál k historii nejstaršího člověka v Čechách.

Mimo to pozoroval jsem v širším okolí Rakovnickém diluviální vrstvy, zvláště v cihelnách, a nabyl jsem tak přesvědčení, že české diluvium jest dvojího, velmi rozdílného původu.

O svých letošních nálezech Lubenských dovoluji si předložiti slavné České akademii věd předběžnou, stručnou zprávu. Na příští dobu chystám o předmětu tom větší článek s osmi tabulemi, na nichž některé významné kosti živočišné a výrobky i známky práce lidské z útvaru diluviálního u Lubné budou vyobrazeny.

V Lubenském diluviálním tábořišti zvláště překvapujícím jest značný počet a rozmanitosť nástrojů, zhotovených z křesacího cizozemského kamene. Nalezl jsem tu pazourkových nástrojů a hojných úlomků dohromady téměř 750 kusů.

Jsou to zejména škrabadla, jimiž předvěký člověk mázdry koží zvířecích, zvláště sobích slupoval. Škrabadla (mizdřidla), úmyslně po krajích přitloukaná, zúžena jsou často na jednom konci ve špičaté držadlí.

Dále vyskytly se tu nože i hroty, rovněž zúmyslně a účelně otloukané a patrně již upotřebované.

Škrabadlo jedno má délky 14 *cm* a krásný hrot nejdelší 10 *cm*.

Tvarů, šípům podobných, jest celkem velmi málo.

Za to sebral jsem množství malých nástrojů šidlovitých, jimiž člověk kůže zvířecí na oděv si sešíval.

Dále uvésti třeba sekyry, rovněž úmyslně otloukané a vůbec tvary, jaké vidíme na výkresech nejznamenitějších, zvláště jeskynních nálezů západoevropských i moravských.

Kromě toho nalezen i nezpracovaný pazourkový materiál: nucley, četné úlomky, někdy malé jako šupinky a nepodařené nástroje, což jest důkazem, že je člověk na své zatímní »stanici« také fabrikoval.

Lubenské nástroje jsou pokryty známými dendrity a některé z nich bílou »patinou«.

Některé exempláry byly patrně již původně přelámány a daly se i z kousků sestaviti a tu mnohdy jedna část, která asi dlouhou dobu na povrchu zemském ležela, jest vybledlá účinkem vzduchu a slunce, kdežto druhá, k oné přináležející, která hlinou aneb kamenem byla přikryta, jest barvy tmavé.

I ty četné vypálené oblásky křemenné a desky pískovcové, jakož i ty hojné, rozbité úlomky pazourkové, které se v kulturní vrstvě nalezly, dávají též svědectví o práci diluviálního člověka.

Pazourkové úlomky Lubenské, na kterých není viděti žádné úpravy za nástroj, liší se jak povahou hmoty tak i původem svým od úlomků pazourkových, které se již dávno znají v nejsevernějších krajinách českých, kamž ledovci, jimiž v době diluviální severní Německo pokryto bylo, přineseny byly, na způsob bludných balvanů z krajin Rujanských.

Naše pazourky podobny jsou co do povahy kamene francouzským, s nimiž jsou asi téhož původu.

Diluviální člověk činil asi ze západních zemí evropských výpravy na zvěř až do Čech, jejichž severní pohraničné hory a dílem i Šumava byly zlednatělé.

Primitivní kamenné nástroje diluviální rozeznávají se na první pohled a značně od hlazených mlatů a umělých pazourkových šípů doby neolithické (mladší kamenné).

Zajímavé jsou dále kosti zvířecí. Vyskytlo se jich na ploše poměrně malé dosti mnoho, avšak rozmanitosť druhů není velká. Kosti, zvláště rournaté, jsou všechny u kloubů uraženy, podél rozštípány a pomíchány. Člověk z nich vybíral morek a z lebek mozek. Z těchto zůstaly jen rozlomené čelisti a hojnosť jednotlivých zubů.

V kulturní vrstvě Lubenské nalezl jsem dále již loni patrné stopy ohně, kosti zvířecí do černa i do běla vypálené, rovněž kameny vypálené a dřevěné uhlí.

Diluviální a kulturní vrstvou nebylo nikde od dob diluviálních hnuto; je ve svém původním uložení.

Na začátku letošních prázdnin mne navštívil, Lubenské nálezy v mé sbírce a naleziště samo prohlédl p. dr. *Píč*, a o prázdninách pak p. prof. K. *Maška*, který též kosti v mé sbírce laskavě určil. Oba odborníci potvrdili náhled můj o diluviálním stáří objevených předmětů.

Kosti v lidské stanici diluviální u Lubné nalezené patří těmto druhům ssavčím: stepnímu koni, divokému turu, kamzíku, sajce, jelenu, sobu a nosorožci.

Zvěř tuto na lovu zabil a sem přivlekl člověk ku společným hodům. Na předpotopní české tabuli převládala sobí kýta; dle kostí a zejména hnátů z Lubné pocházejících napočetl jsem sobů asi 15.

Paroh sobí, jejž jsem před několika lety nalezl, jest naříznut (dle pana dr. Woldřicha) a též dva parůžky sobí a jedna kost mají zářezy, učiněné pazourkovými noži, jak mne upozornil p. prof. Maška, jenž ještě nalezl v mé sbírce úlomky šidla, zhotoveného ze slonoviny mamutí. Nedávno nalezl jsem též zašpičatělý konec podobného nástroje ze slonoviny fossilní.

Co se týče původu diluviálních vrstev samých, přišel jsem již loni a zejména začátkem letošních svých pozorování k tomuto náhledu: Richthofenova theorie o navátých vrstvách čínských platí též pro naše diluvium.

České diluvium dělí se dle svého původu ve dvé, a to ve vrstvy spodní, naplavené, a ve vrstvy, jež naváty byly větry za doby stepní.

Spodní diluvium jest vrstevnaté, a to buď štěrk, o němž někde se dá dokázati, že je třetihorní, aneb písek a výše hlína, jejíž povaha závisí na panujícím okolním útvaru. V křídovém útvaru jsou hlíny tyto vápenité a úrodné v permu červené, zbarvené permskými tufy porfyrovými, chmelonosné. Hořejší vrstva pak, v níž nalezly se zbytky fauny a zbytky práce lidské u Lubné, jest navátá, žlutá (vůbec v Čechách), nevrstevnatá, a má kolmé pukliny. V ní se daří stebelnatým rostlinám a cukrovce.

Rozdělení toto má i význam praktický, pedologický, o němž jinde promluvím.

Mocné závěje prachu uloženy jsou pravidelně na svazích jihovýchodních a východních, kde chráněny byly před dalšími účinky panujících větrů. Podobně jsou uloženy i u Lubné.

Že náš praobyvatel tolik pazourkových nástrojů, jemu zajisté cenných, v tábořišti poměrně malém opustil, toho mohou býti rozličné příčiny: snad měl materiálu hrubého (nuclei) s sebou velmi mnoho, snad se na něho vyřítila dravá zvěř, snad ho překvapil nepřítel člověk aneb velká nepohoda prachové bouře.

Ať již detaily způsobu života diluviálního člověka určitě vylíčiti nelze, tolik je faktum, že náš člověk s mnohými zvířaty žil, jichž obyčejná historie nezná, jejich masem se živil a kožemi se šatil, že vyráběl primitivní kamenné nástroje a že znal oheň.

Současníci diluviálního člověka Lubenského dokázáni jsou tito:

Equus caballus fossilis minor Woldřich.
Bos primigenius Bojanus.
Antilope cf. rupicapra Pallas.
Antilope sp.
Cervus elaphus L.
Rangifer taraudas Pallas.
Rhinoceros antiquitatis Brdt.

Konečně budiž s reservou jmenován:

Elephas primigenius Blumb.

Zdá se, že Lubenský pračlověk slonoviny používal již co fossilní, podobně jak se děje posud v Sibiři. Dokázalť důvtipně Steenstrup, že v diluviální lidské stanici v Předmostu blíže Přerova nebyl člověk současníkem mamuta, ač tu mnoho zbytků tohoto zvířete, zvláště slonoviny, se objevuje.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 10.

STUDIE
O MONOMAGNESIUMFOSFATU.

NAPSAL

JULIUS STOKLASA.

PŘEDLOŽENO DNE 16. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

L. Schaffner publikoval v »Annalen der Chem. und Pharm.« v roce 1845 (Sešit I. str. 145) o produktech rozkladu magnesiumfosfatu. Podnětem byla auktorovi prácc *Riffaulta* (Annal. de chim. et dc phys. 1845), který poprvé kyselý a zásaditý fosfat získal, použiv dimagnesiumfosfatu. Schaffner isoloval monomagnesiumfosfat smíšený s volnou kyselinou.

Praeparát jeho byl ve formě bílé huspeniny reakce silně kyselé, rozpouštějící se ve vodě. Alkohol rozložil praeparát ve krystallickou hmotu a volnou kyselinu fosforečnou. Moment tento mě opravňuje, abych vyslovil domněnku, že Schaffnerův monomagnesiumfosfat byl nečistý.

Více po dnes o vlastnostech a složení monomagnesiumfosfatu nevíme. Funkce fysiologické látky této v náhradě živin rostlinných opravňují studium látky té se stanoviska chemického.

Příprava monomagnesiumfosfatu. Chemicky čistý kysličník hořečnatý rozpouští se v kyselině fosforečné spec. váhy 1·4 při teplotě vodné lázni.

Přitomno-li 5—7% volné kyseliny fosforečné, vzniká při odpařování na vodní lázni krystallinická sedlina. Za studena vypírá se sedlina v nádobách ledem chlazených étherem.

Krystallické shluky vysušují se a nově opět vypírají, až éther po vypaření nezůstavuje ni stopy volné kyseliny fosforečné. Po té suší se krystallický praeparát v proudu vysušeného vzduchu při 40° C. až do konstantní váhy.

Monomagnesiumfosfat jeví se v drobných krystallkách lesku skelného.

Analysa vykázala následující resultáty:

Formula $MgH_4P_2O_8 + 2H_2O$

	vyžaduje:	nalezeno:		
		čís. I.:	čís. II.:	čís. III.:
MgO	15.74%	— 15.24%	15.38%	15.42%
P_2O_5	55.90%	— 55.60%	55.95%	55·61%
H_2O	28.35%	— 29.00%	28.86%	28.54%

H_2O určena byla žíháním 1·25 *g* látky s páleným CaO ke váze konstantní. P_2O_5 a MgO stanoveny následujícím způsobem:

5 *g* soli rozpuštěno v 1000 cm^3 vody, po hodinném třepání z čistého roztoku 25 cm^3 nasyceno bylo ammoniakem a svařenina vzniklá rozpuštěna v kyselině solné. Po úplném vychladnutí přidán za studena ammoniak až vystoupila reakce alkalická a 10 cm^3 soluce magnesiové. Míchacím přístrojem

uváděn obsah po 10 minut v pohyb. Z váženého $Mg_2P_2O_7$ vypočten P_2O_5. Dále k 25 cm^3 čirého roztoku přidán ammoniak, sraženina rozpuštěna v kyselině solné a za chladu přidán opět ammoniak po kapkách k reakci silně alkalické. Sraženina zvolna se tvořící uvedena v pohyb po 10 minut. Z váženého $Mg_2P_2O_7$ vypočten MgO.

I. *Hygroskopická vlastnost monomagnesiumfosfatu.* 5·246 *g* praeparátu číslo III. přijalo pod skleněným zvoncem v září až do 31. listopadu při temperatuře 1—16° C., 0·2—1·52% vody. Vzduch nasycen vlahou při 5—10° C. i přijal praeparát maximálně 1·2% vody, *při teplotě* 30° C. přijal 2·1% vody po 7 dnech.

Čím více krychlový metr vzduchu tají vodních par — v poměru tomtéž obsahuje monomagnesiumfosfat vláhu vzdušnou. Obsahuje-li vzduch značně méně par, nežli při té které teplotě pohltiti může, zůstává takřka monomagnesiumfosfat nezměněn ve své váze. Ve vzduchu suchém ztrácí rapidně vláhu a přichází během několika dnů v původní stav.

II. *Rozpustnost monomagnesiumfosfatu ve vodě.* Interessantní vlastnosti chová monomagnesiumfosfat vedle monocalciumfosfatu a monoferrifosfatu* v otázce rozpustnosti ve vodě.

Monomagnesiumfosfat s vodou se nerozkládá, kdežto jmenované monofosfaty působením vody se rozštěpují.

Monocalciumfosfat se vodou rozkládá za obyčejné teploty.** V koncentrovaných roztocích jest process energický, v zředěném roztoku ochabuje a při poměru již 1 : 200 jest tak nepatrným, že jej nelze více konstatovati.

Poměry rozkladu řídí se dle různého poměru činných molekul a sice vlivem hmotnosti čili massy. Na množství monocalciumfosfatu ve vodě závisí attrakce molekul. Rozpustnosti přibývá, kde attrakce molekulárné ubývá. Reakce děje se podle provedených rozborů v celé řadě fásí.

Poměr 1 : 1.

$$4CaH_4(PO_4)_2 \cdot H_2O + H_2O =$$
$$3CaH_4(PO_4)_2 \cdot H_2O + CaHPO_4 + 2H_2O + H_3PO_4.$$

Theorie vyžaduje: $CaHPO_4$ . . . . 13·49%
P_2O_5 . . . . 7·04% (ve formě H_3PO_4)

Nalezeno: $CaHPO_4$ . . . . 14·5%
P_2O_5 . . . . 7·51%

Dle theorie rozloží se 25·0% monocalciumfosfatu, nalezeno bylo 26·0%.

Poměry ty postupují dále, až konečně 1 : 200 jeví se rozklad

$$1024CaH_4(PO_4)_2 \cdot H_2O + H_2O =$$
$$1023CaH_4(PO_4)_2 \cdot H_2O + CaHPO_4 + 2H_2O + H_3PO_4.$$

---

* Viz mé studie v Landw. Versuchsstationen. Berlin 1890—91.

** O povaze a vlastnostech monocalciumfosfatu. Sděluje Julius Stoklasa. Zprávy kr. české společnosti nauk. Předložil prof. K. Preis.

Theorie vyžaduje:	Nalezeno:
$CaHPO_4$ 0.05%	Roztok čirý.
P_2O_5 . . . . . 0·021%	Reakce na volnou kyselinu fosforečnou žádná.

Tedy dle theorie rozkládá se při poměru 1 : 200 ještě 0·1% monocalciumfosfatu, množství, které našimi methodami dokázati nelze.

V grafickém znázornění v síti ze čtverců, ve kterém ordináta představuje poměry rozpustnosti a abscissa nalezené množství rozpustného $CaH_4(PO_4)_2 . H_2O$, zříme, že křivka rozpustnosti z počátku jest vypuklou k ose abscissi, pak jeví podobu assymptoty a konečně s osou splývá.

$MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O$ jeví charakter úplně jiný, jak seznáme z následujících pokusů, které děly se při teplotě *15—20°* C.

Poměr 1 : 1.

20 *g* $MgH_4P_2O_8 . 2H_2O$ vpraveno bylo ve 20 cm^3 vody. Nastal velmi slabý zákal. Filtrát odměřen a zředěn v 50 cm^3 a nalezeno v něm analysou:

Stopy volné kyseliny fosforečné.
Veškerý P_2O_5 . . . . 55.49%
MgO . . . . 15.24%.

Vidno, že již v poměru 1 : 1 jest rozklad nepatrným.

Poměr 1 : 10.

10 *grm.* $MgH_4P_2O_8 . 2H_2O$ vpraveno bylo ve 100 cm^3 vody. *Roztok byl čirým.*

Volná kyselina fosforečná nezjevila se ani ve stopách.
Veškerý P_2O_5 . . . . . 55.68%
MgO . . . . . 15.51%.

Uvádím konečně poměr 1 : 25.

4 *grm.* $MgH_4(PO_4)_2$ smíseno se 100 cm^3 vody. Roztok byl úplně čirým a nezjevil ani stopy volné kyseliny fosforečné.

Analysou nalezeno $P_2O_5 = 55.84\%$
$MgO = 15.52\%$

Tím podán důkaz, že voda ve $MgH_4(PO_4)_2 . H_2O$ nepůsobí.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 11.

POKUSY
O POSTMORTÁLNÍM CHOVÁNÍ SE
CHROMOGENŮ MOZKOVÝCH.

NAPSAL
VLAD. RŮŽIČKA.

(Z USTAVU PRO EXPERIMENTÁLNÍ PATHOLOGII P. PROF. DR. A. SPINY.)

PŘEDLOŽENO DNE 12. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

P. Ehrlich [1] použil k vyhledání oněch míst v organismu zvířecím, kde děje se spotřeba kyslíku, injekcí jistých anilinových barviv, vyznačujících se tou vlastností, že byvše v těle zvířecím vydány působení kyslíku se oxydují, zmodrají, kdežto za nepřítomnosti kyslíku se redukují v běl. Ačkoliv základní myšlénka, použiti látek kypy tvořících za indikatory oxydačních a redukčních pochodů, jest velmi šťastna a důležita, přece ukázala se methoda tato býti nedostatečnou k rozřešení otázky položené, a to z různých příčin, o nichž se vyslovil prof. *Spina* a z nichž nejvážnějšími byly asi ty, že pokusná zvířata Ehrlichova nebyla normálními, jelikož jim jedovaté látky injikoval, a že soudil ze zjevů, po injekci nalezených, na pochody, jež se před injekcí v živém organismu odbývají.

Prof. *Spina* [2] eliminoval tyto vady, postaviv proti Ehrlichově chromatické methodě svou methodu idiochromatickou, a došel po pokusech s ledvinami, játrami a plícemi následujících výsledků. Uvádím zde pouze ony resultaty, ku kterým se pojí výsledky mých pokusů.

1. V různých ústrojích obsaženy jsou de norma látky, jež zblednou, jakmile se jim kyslík odnímá působením na redukující látky v organech obsažené zahřátím, a které naopak za přístupu kyslíku působením chladu opět rudou barvu přijímají. Substance prvního druhu označeny jako tkaňové chromogeny a udáno o nich, že se za určitých podmínek chovají jako indychsíran sodnatý.

Vlhký a současně teplý vzduch podporuje působnosť hmot redukujících, neboť ústroje a obsah jejich cev krevních v něm zblednou, kdežto v chladném a současně suchém vzduchu ztemňují.

2. Výminečné postavení zaujímají *plíce*, které v ohřátém fysiologickém roztoku kuchyňské soli (0·6%) zblednou a v chladném i *beze vlivu zevnějšího vzduchu* opět rudnou.

Když totiž — jak prof. *Spina* ukázal — kousek plic králičích červenou plochou lehce na hodinové sklo přitlačíme a nad plamenem mírně ohřejeme, zbledne na přiléhající straně; necháme-li tentýž praeparat plouti na ledové

[1] Das Sauerstoffbedürfniss des Organismus. Berlin. 1885.

[2] I. Pokusné příspěvky k nauce o vnitřním dýchání ústrojí. Časop. lék. čes. 1889. — II. Šablonovité obrazy na povrchu ledvin a jater. Ibid. 1889. — III. Další pokusy o chování se chromogenů v mrtvých ústrojích. Ibid. 1890.

vodě, zpozorujeme, že v krátkém čase zrudne, ač zevnější vzduch naň působiti nemohl. Jest také možno měnu barev přímo pozorovati, obrátíme-li skleněnou tabulku ohřátým, tedy redukovaným praeparatem dolů a pouštíme-li na ni chladnou vodu.

Podobný výsledek se objevil, byl-li oxydovaný kousek plic ponořen do fysiologického roztoku kuchyňské soli na 60° ohřátého. Po několika vteřinách zbledl, zrudl však téměř okamžitě, byv přenesen do roztoku jen 4° teplého.

Plíce oxydují se tedy, i když zevnější vzduch žádného k nim přístupu nemá.

Bylo tedy na snadě se tázati, zdali snad vzduch v plících obsažený změny uvedené nezpůsobuje. Avšak pokusy, které v příčině této [3] prof. *Spina* konal, ukázaly, že se plíce atelektatické chovají právě tak, jako plíce vzduchem naplněné, a že tedy vzduch sklípkový příčinou změn oněch není. Jen ten rozdíl byl pozorován, že se hra barev na bezvzdušných plících dostavuje pomaleji, a že k oxydaci jejich třeba jest nižších, k redukci pak vyšších teplot, než u plic, vzduchem dostatečně naplněných. —

Hned předem chci upozorniti, že chromogeny šedé hmoty hemisfér mozkových — o těchto budiž zde jednáno — chovají se podobně. To přimělo mne věcí se blíže zabývati.

Podnikl jsem pokusy tyto z vybídnutí a vedením pana prof. *Spiny* a provedl je v laboratoři jeho ústavu.

Ještě, nežli pokusy své uvedu, upozorniti chci na to, že konkluse prof. *Spiny*, pokud se vlivu alveolárního vzduchu týče, nabytými zkušenostmi mými se potvrzují, neboť se během pokusů mých ukázalo, že se mozek ceteris paribus chová právě tak jako plíce, okolnosť to, na niž tím větší důraz musím položiti, poněvadž u mozku námitka, že by vzduch obsahoval, jest bezpředmětnou. Chování se mozku vysvítá blíže z následujících pokusů:

Pokus č. 1.

Mozek dvouletého morčete rozloží se v kousky, jež se položí konvexitou na skleněné tabulky. Jeden uloží se na led, druhý do zahřáté světnice. Po nějaké době stane se tento o jemný odstín bledším než onen. Chlazený kousek ohledáván byl pod mikroskopem (Reichert, obj. 4.) ve světle odraženém a jevil diffusní rudé obarvení tkaně a určitě prosvítající kapillary obsahu jasně červeného. Jakmile byl praeparat nad Bunsenovým plamenem slabě nahřát, cévy krevní zhnědly a praeparat nabyl žlutavého, bledšího přibarvení. Když ale přiložen na kraj pod drobnohledem ležícího podložného skla kousek ledu, tu mozek zrudl a s ním také cévy krevní. Toto vyvolávání rudé barvy a její zblednutí dalo se na tomtéž praeparatu několikráte opětovati. Připomenouti sluší, že se obsah kapillar odbarvuje pomaleji, a že naopak rudne rychleji, než vlastní tkaň mozková.

[3] l. c. sub I.

Pokus č. 2.

Udušením zabité morče uloženo na pět hodin do záhřevné skříně (při 40° C.). Při pitvě objevil se mozek bledým, temněl však rychle na chladném vzduchu, přijímaje rudé přibarvení. Část zrudlého mozku pokryta úlomkem krycího skélka a vydána na větší skleněné desce vlivu *chladného* vzduchu. Místo pokryté zbledlo, podobně strana ku skleněné desce přiléhající, kdežto nepokrytá část konvexity byla rudá.

Pokus č. 3.

Mozek dekapitovaného králíka. Dva kousky z něho položeny konvexitou na hodinová skla, jež pak nechána plouti na studené a teplé vodě. Strana praeparatu v teplé vodě plujícího, ke sklu přilehlá, zbledla, kdežto na praeparatu ve vodě chladné plujícím zrudla. Jakmile se změna barev dostavila, přenesen praeparat z teplé vody do chladné, a praeparat z chladné do teplé. Tím docíleno opět differencí zbarvení a sice opačných; praeparat, jenž dříve byl červený zbledl, bledý zčervenal. —

Z pokusů těchto vysvítá částečně analogické chování se barev mozkových a plicních. Jelikož ale, jak pokus č. 2. učí, pokusy s přikrýváním krycími skélky se příčily pokusu pod č. 1 uvedenému, považoval jsem za nutné, nahraditi je pokusy druhu jiného. Methoda modifikována byla způsobem z následujících pokusů vysvítajícím.

Pokus č. 4.

Z povrchu mozku králíka dekapitovaného na chladném vzduchu oxydovaného vyříznou se dva větší kousky. Jeden ponoří se do chladného, druhý do 40° teplého fysiologického roztoku kuchyňské soli. Tu lze pozorovati, že kousek do chladného roztoku ponořený zůstává rudý, kdežto druhý, v teplém roztoku se nalézající, zbledne. Přeneseme-li pak rychle zbledlý kousek mozku do chladného roztoku a rudý do teplého, zdaří se nám opětně vyvolati přeměnu barev. Pokus ten lze rovněž s tímtéž praeparatem několikráte opětovati.

Ačkoliv přenášení praeparatů trvá velmi krátkou dobu, mohlo by se ještě namítnouti, že snad zevnější vzduch přece spolupůsobil. Chtěje námitku tuto seslabiti, upravil jsem přenášení tak, že jsem kousky mozku při zaměňování jejich z vody nevyjímal, nýbrž je i s nádobou, v níž ležely, přenášel do nádoby větší, vodou potřebné teploty naplněné. Pokusy takto upravené měly tentýž výsledek, jako přenášení vzduchem.

Pokus č. 5.

Králík, usmrcený protnutím míchy prodloužené, uloží se do záhřevné skříně na 40° C. vyhřáté, kde několik hodin se ponechá. Následující na to pitva objeví, že jest mozek při otevření dutiny lebečné *bledý*, že však na vzduchu velmi rychle ztemňuje.

Pokus č. 6.

Králík, usmrcený protnutím míchy prodloužené uloží se do lednice a po několika hodinách se pitvá. Mozek jest, ačkoliv kosti lebečné byly neporušeny, *rudý*, třebas ne tou měrou, jak při mozku vyňatém a na atmosférickém vzduchu oxydovaném: --

Z pokusů těchto, zejména z pokusu číslo 4., vysvítá, že mozek obdobně s plícemi i tehdy může zrudnouti, když přístup zevnějšího vzduchu k němu jest zamezen. —

Vzhledem k tomu, že prof. *Spina* dokázal, že ústroje svěží ve chladném a současně vlhkém vzduchu ztemňují, v teplém a zároveň vlhkém že blednou, a dále, že ve vzduchu suchém rovněž ztemňují, uložil jsem si přesvědčiti se, zda zkušenosti ty i na mozek lze přenésti. Pokusy ve směru tom konané měly ten výsledek, že svěží hemisféry mozkové ve vzduchu vlhkém a současně chladném zrudly, v teplém a zároveň vlhkém že však zbledly. Praeparaty z vlhkého a teplého vzduchu ohledány mikroskopem (Reichert, obj. 4.) ve světle odraženém, jevily tkaň mozkovou do bledožluta, krevní cévy do hněda zbarvené, v kontrastu s praeparaty vyňatými ze vzduchu vlhkého a chladného, jež měly parenchym i cévy červeněji zbarveny. Podotknouti třeba pouze, že červeň parenchymu nebyla pod drobnohledem tak nápadna, jako při ohledání prostým okem.

Výsledky tyto souhlasí tedy s resultaty prof. *Spiny*. Pracoval jsem dle těchže method, jichž prof. *Spina* užíval.[4] —

Dále jsem ohledal působení vzduchu suchého a shledal, že ve vzduchu suchém chová se šedá hmota podobně jako ústroje jiné. Ve vzduchu chladném a současně suchém totiž rudne; totéž dostaví se i ve vzduchu teplém a suchém, jen že v tomto případě červeň rychleji se dostaví, než ve vzduchu chladném a suchém.

Příčinou toho jsou, jak prof. *Spina*[5] dokázal, oxydační pochody spojené s odpařováním tekutiny v ústrojích obsažené. —

Nalezl jsem také, že když mozek ve vzduchu suchém ztemňuje, pokryt byv šablonou, pod ní zbledne. Kresba, již takto obdržíme, dá se, podobně jak u šablonových praeparatů prof. *Spiny*, v alkoholu fixovati, stává se však asi po třech měsících úplně neznatelnou.

Z pokusů prof. *Spiny* dále vysvítá, že se indychkarmin i *Ehrlichem* užívaná methylenová modř za jistých okolností chová v tkani zvířecí obdobně tkaňovým chromogenům. I tímto směrem konal jsem pokusy s mozkem.

Vychází již z pokusů prof. *Spiny*, že se indychkarmin chová analogicky jen vůči chromogenům ledvinovým; chromogeny jaterní na př. nejeví žádnou analogii s indychkarminem. Pokud se týče chromogenů šedé hmoty, mohu

[4] l. c. sub III.
[5] l. c. sub III.

o indychkarminu totéž vypověděti. Pokusy mé vztahují se tedy jen na zvířata, jimž vpravena intravenosně methylenová modř, která se osvědčila lépe než indychkarmin.

Pokus č. 7.

Králíku injikovány intravenosně dvě Pravatzovy stříkačky po 2·8 gr. 1% vodnatého a čerstvě připraveného roztoku methylenové modři, načež za několik minut zvíře dekapitováno. Moč je silně modrá. Celá lebka vydána po 16 hodin působení chladného vzduchu, načež vyňat mozek. Mozek *není do modra zbarvený*, jeví se téměř tak přirozeně červený, jako u zvířat chlazených (pokus č. 6.), ač červeň nebyla tak silná, jako obyčejně. Na vzduchu se však téměř okamžitě přibarvuje do modra.

Kdyby oxydace a redukce methylenové modři dála se analogicky chromogenům mozkovým, musila by se v pokusu tomto objeviti modř methylenová jako oxydační produkt, totiž mozek měl by hned při otevření dutiny lebeční býti zbarven do modra, vzhledem k tomu, co výše uvedeno, že totiž mozek zvířat chlazených i bez otevření lebky rudne. V tomto smyslu tedy analogie mezi uvedeným barvivem a chromogeny mozkovými neexistuje. Přes to může se za jistých okolností, jak učí následující pokus, analogie taková objeviti.

Pokus č. 8.

Kousek mozku v pokuse č. 7. použitého, tedy do modra zbarveného, ponořil jsem do nádoby naplněné fysiologickým roztokem kuchyňské soli na ledě chlazeným. I viděl jsem, že onen kousek mozku zůstal v chladném roztoku modrý, ač přístup vzduchu byl úplně zamezen, že však modré barvy své téměř okamžitě pozbyl, když byl přenesen do roztoku zahřátého na 40° C., *a že jí opětně nabyl, jakmile byl do chladného zpět uložen. Pokus tento proveden byl za všech výše uvedených (pokus č. 4.) kautel tak, že vzduch zevnější ani sebe menšího přístupu k praeparatu neměl. Redukce methylenové modři a oxydace jejího leukoproduktu daří se tedy v mrtvém mozku i bez působení zevnějšího vzduchu velmi dobře.*

Pokus tento tedy dovozuje jakousi analogii mezi methylenovou modří a chromogeny; neboť právě tak, jako se methylenová modř v mozku teplým roztokem kuchyňské soli redukuje a chladným zase oxyduje, právě tak zblednou, jak již nahoře dokázáno, i chromogeny mozkové v teplém roztoku, a rudnou opět v roztoku chladném. —

Poukázal jsem již na to, že se při pokusech s plícemi měna barev působením chladných a teplých roztoků rychle dostavuje, jsou-li plíce vzduchem naplněny; že však změna ta i u plic atelektatických, jen pomaleji, se objevuje. K tomu mohu nyní připojiti, že se šedá hmota mozková chová asi stejně jako bezvzdušné plíce. Změna barev, jak již sděleno, se dostaví, potřebuje však delšího času. —

Na intensitu vystupování a měny barev má určitý vliv i *stáří* pokusného individua i *čeled'*, k níž toto náleží. Pokusy konané na zvířatech mladých nedařily se nikdy tak dobře jako na zvířatech starších, i odporučuje se experimentovati s orgány zvířat dorostlých.

Dále seznal jsem, že nejinstruktivnějších měn lze dosáhnouti na mozku psím. Mozek bílých krys jeví je méně jasně, mozek morčat a králíků dosti určitě. I lidský mozek dává, jak z následujících pokusů vyplývá, jasně měny barev na jevo

Laskavostí p. prof. dra. *Hlavy*, jenž mi poskytl potřebný k tomu material, za který mu na tomto místě vzdávám nejpovinnější díky, bylo mi možno i lidský mozek ohledně chromogenů ohledati.

Mozek 30leté ženy, zemřelé nemocí Brightickou (na lebce nacházely se jízvy po syfilis), jevil při pokusu, uspořádaném tak jako pokus č. 2., že chromogeny mozku lidského nechovají se jinak, než chromogeny mozků zvířecích. To pouze rozdílného konstatováno, že na oxydaci a redukci bylo mnohem delší doby třeba, než při mozcích dříve užitých zvířat. Ovšem nutno, pokud se toho týče, poukázati na možnosť, že mozek přetrpěnými nemocemi mohl býti změněn.

Podobný výsledek měl pokus vykonaný s mozkem muže sarkomatosí zemřelého. Pokus spořádán zde jako v č. 6. —

Resultáty uvedených pokusů jsou tedy tyto:

1. Mozek lidský i zvířecí obsahují v šedé hmotě chromogeny, jež za přístupu vzduchu červenají a při zvýšené teplotě neb zamezeném přístupu vzduchu blednou.

2. Přeměna barev chromogenů mozkových podmíněna jejich oxydací a redukcí jeví chování s chromogeny plicními analogické, totiž opětné dostavení se barvy oxydační jest možno i pouhým zchlazením, bez vlivu vzduchu.

3. Methylenová modř do mozku vpravená jeví za jistých okolností chování podobné chromogenům mozkovým, totiž redukuje se teplým roztokem soli kuchyňské a chladným se oxyduje.

4. Mozek zvířat starších jest na chromogeny bohatší. —

Ku konci jest mi milou povinností vzdáti p. prof. *Spinovi* za četné pokyny, jimiž mne v práci této podporoval, nejvřelejší díky.

METHODICKÝ PŘÍSPĚVEK

KU POZNÁNÍ POHYBŮ BUNĚČNÝCH.

PODÁVÁ

JOS. VEJNAR,

STUD. MED.

PŘEDLOŽENO DNE 12. LISTOPADU 1891

Známo jest, že některé buňky těla živočišného, jako bílé krvenky a buňky lymfoidní, ukazují vedle zevního pohybu při silných zvětšeních ve svém protoplasmatu také pohyb vnitřní. Obral jsem si za úkol, učiniti tento vnitřní pohyb patrným a to i v buňkách, ve kterých onen pohyb jen s tíží postřehnouti lze.

Podávám zde výsledek prací svých o pohybu vnitřním v buňkách chrustavky hyalinní. Pokusným objektem byly mi zimní žáby (rana esculenta), na kterých jsem studoval chrustavku tibie a femuru ze kloubu kolenního.

Postup pokusů byl následovní. Chemicky čistou modř methylenovou jsem rozpustil v destilované vodě, filtroval, filtrát odpařil a vysušil. Z takto připravené modři udělal jsem si 2% vodní roztok a zfiltrovav vstříkal jsem roztoku pod kůži hřbetní žáby 1 Pravazskou stříkačku. Žábu dal jsem na to do mísy sklenčné, jejíž dno bylo vodou pokryto, a přiklopil zvoncem skleněným, ponechávaje místa pro přístup vzduchu. Po 24—48 hod. žába zabita, obnažen kloub kolenní, otevřen a ostrým nožíkem, ve fysiologickém roztoku soli kuchyňské (0.6%) namočeným, seříznuty tenké lamelly chrustavek kloubových a vloženy hned do fysiologického roztoku soli kuchyňské na podložkové sklíčko naneseného, přikryty sklíčkem krycím a mikroskopicky vyšetřeny.

Tu shledáme, že buňky této hyalinní chrustavky jsou naplněny jemnými zrnéčky kulatými modrého barviva, velikostí poněkud se lišícími. Počet jich v jednotlivých buňkách je velmi rozdílný, některé nevykazují pražádných zrnek barviva, jiné jsou jimi takřka přecpány. Počet zrníček celkový závisí od toho, jak žába dlouho po injekci žila; po 12 hod. je zrnek těch málo, po 24—48 hod. nejvíce, třetí den zrnka ta počínají mizeti, takže čtvrtého dne jich mnohdy již neznamenáme. Než úkazy ty jsou individuální; tak lze často ve skupině mladých buněk blízko sebe ležících, snad dělením buňky mateřské povstalých, jen jednu zrnéčky barviva naplněnou spatřiti, kdežto ostatní jsou jich prosty. Též jsem pozoroval, pokud byl počet zrnéček barviva v buňce nevelký, že zrnéčka jakoby se jádrům vyhýbala, neboť v nich obsažena nebyla; na periferii jader však hojně se na místě některém nalézala. Ta zrnka, která ve projekci jádra ležela, že nad jádrem jsou, dokázalo řádné uspořádání foku. Za to ve případech, kde tělo buněčné zrnéčky oplývalo, zdála se jádra buněčná často na první pohled diffusně zbarvenými. Bližší ohledání ukázalo, že i zde jsou zrnéčka barviva, jež však tak těsně na sobě leží, že za diffusní syté zbarvení imponují. Chová se tedy jádro buněčné ku barvivu poněkud jinak, než tělo buňky.

Vedle toho viděl jsem též buňky chrustavky slabě diffusně zbarvené, a ty náležejí stadiu buď časnému nebo pozdnímu. Též lze viděti někdy takovéto zbarvení počátečné a konečné (3. neb 4. den) ve hmotě základní; zrnéček barviva jsem však ve hmotě základní nenašel v žádném případě.

Vložíme-li řez chrustavky přímo do takového roztoku modře methylénové, objeví se nám obvyklé zbarvení diffusní, jaké vidíme na histologických mrtvých praeparatech.

Pozorování uvedená vzbudila ve mně naději, že podaří se mi touto methodou označiti cesty, jimiž barvivo do buněk chrustavkových a jiných tkaní vniká, a tím i dráhy proudů výživných. Ohledal jsem tudíž upotřebený roztok barviva, ale nenašel v něm již vytvořených zrnek; taktéž ve plasmatu krve žab, jimž jsem roztok ten byl vstříkl, podobných zrnek nebylo. Proti tomu sluší vytknouti, že červené i bílé krvenky ve svém těle zrnka barviva ve kolísajícím množství a sestavení vzájemném chovaly. *Bylo patrno, že barvivo dostává se do buněk chrustavkových v roztoku a tam se teprve v jemných zrnéčkách vylučuje.* Jsou tedy diffusně zbarvené buňky snad jen předchozím stadiem později v nich vyloučeného barviva. Třetího nebo čtvrtého dne se zase zrnéčka v buňkách mění a to tak, že objeví se nové diffusní zbarvení, jež se ponenáhlu ztrácí. Uvedu později pokus, který poukazuje k tomu, že zde snad jde o rozpuštění a odplavení oněch zrnek.

V ohledu tom udělal jsem pokus následující. Dvacet minut po vstříknutí barviva byla žába usmrcena, manipulací svrchu vytknutou ohledány řezy chrustavek, ve kterých žádná zrnéčka nenalezena, leda jen slabé diffusní zbarvení (stadium to předcházející tvoření zrnek). Pak řezy uloženy byly přes noc do vlhké komory. Zde očekávání svrchu naznačené mne nezklamalo, neboť často nalezl jsem asi po 18 hodinách v buňkách chrustavky vyloučená zrnéčka barviva.

Podařilo se mi dále ona zrnka uměle z praeparatů odstraniti a takto nahoře vytknuté rozpuštění zrnéček a tím povstalé diffusní zbarvení napodobiti. Proužkem ssavého papíru necháme totiž z povýšené nádobky přitékat ke praeparatu na stolku mikroskopickém ležícímu fysiologický roztok kuchyňské soli, jiným proužkem papíru ho pak odvádíme. Povstalý proud tekutiny pak — jak direktní pozorování buněk učí — zrnéčka odplaví, když je byl dříve rozpustil, takže odváděcí proužek papíru modravě zabarven jest.

Dále mohu uvésti, že odbarvení zrnek methylénové modři může se také, jak známo, redukcí barviva docíliti. Pozoroval jsem takové odbarvení po 18 hodinách, když jsem kolem krycího sklíčka udělal rámec z kanadského balsámu a tak přístup kyslíku zamezil. Nelze tedy vyloučiti, že ubývání zrnek v živé chruplavce snad také redukcí neb jiným dalším rozkladem barviva podmíněno jest.

Připravíme-li si chruplavku tak, že 24—48 hodin po injekci ihned po otevření kloubu chrustavku ohledáme, lze spatřiti ovšem po užití silnějších čoček, *že ona barvivová zrnka v těle buněk chrustavkových se pohybují.* Ke sledování pohybu toho volil jsem zrnéčka menší, neboť velká jeví snad pro

tíži pohyb lenivější. Při tom se doporučuje fixovati dvě zrnka sobě zblížená, nebo menší skupiny zrnek, po případě vzájemnou polohu zrnek si označiti na papíře. — Mnohdy netřeba dlouho čekati a pohyb se objeví, jindy trvá to delší dobu, než se konfigurace měnit počne. Často viděl jsem, že některé zrnéčko vzhledem ke druhému fixnímu koná pohyb kývavý. Ač veškeré tyto pohyby jsou váhavé a nikoliv nápadné, přece upjatějším pozorováním dají se snadněji postřehnouti, než na praeparatech bez barviva.

Mnohem intensivnějšími stanou se pohyby ty, užijeme-li dráždění buněk ku př. elektřinou. Za tím účelem přeneseme praeparat chrustavky přímo do roztoku fysiologického na stolek ke dráždění elektrickému upravený.* Co se týká síly upotřebeného proudu faradického, jímž chrustavka tetanisována, byla vzdálenosť cívek 40—60 *mm*, síla stroje vůbec pak taková, že minimální podráždění pro ischiadicus praeparatu žabího vyžadovalo vzdálenosť cívek 230 *mm*. Pohyby se neobjevovaly ihned po uzavření proudu, nýbrž teprve po několika vteřinách, ba někdy až po třetím podráždění. Pohyby pak byly velmi čilé a nápadné, obrazce zrny tvořené se měnily před očima a stále nového a nového vzezření nabývaly, ano některé zrnko se pohybovalo tak prudce, že se zdálo, jakoby poskakovalo; vůbec pohyby zrnéček lze velmi snadno pozorovati. Pohyby tyto, jež daleko jsou rozdílné od molekulárního pohybu Brownova a povahou pohybům rotačním a cirkulačním se blíží, trvají dlouho po dráždění, takže několik pozorovatelů se může vystřídat. Pokus dá se na témže praeparatu opakovati.

Pravidelný tento zjev, jeho in- a extensita, jsou zajisté neklamným důkazem vnitřního pohybu buněčného, neboť že by zrnko leželo mimo protoplasma, nebo že by si jím cestu samovolně razilo, leží mimo pochybnosť. Zvýšený pak pohyb zrnek barviva při podráždění elektrickém svědčí o způsobilosti buněk chrustavkových reagovati na dráždění elektrické jako hmoty živé.

---

* Použil jsem ke dráždění elektrickému skleněné podložky polepené staniolem.

VITÁLNÍ POHYBY NEUROGLIE MOZKOVÉ.

PODÁVÁ

JOS. VEJNAR,

STUD. MED.

PŘEDLOŽENO DNE 12. LISTOPADU 1891.

V kousku vyříznutého mozku žáby živé a tritona do sera krevního žáby uloženém pozoroval prof. *Spina*[1] pohyb neuroglie šedé hmoty, pohyb ten dovedl urychliti mírným proudem elektrickým a k vymizení přivésti usmrcením glie silným proudem.

Opakoval jsem pokusy ty a mohl jsem se přesvědčiti úplně o jsoucnosti pohybů neurogliových a to nejen na mozku v serum krevním uloženém, ale i na čerstvém mozku bez jakékoliv přísady. Kresby neuroglie, zvláště při šikmém osvětlení vynikající, stále se mění, přímky sítě neurogliové se kříví, křivky se narovnávají a jiného zakřivení doznávají, polygony — oka oné sítě — mění se hned ve kruh, hned ve trojhran a v jiný útvar, velké obrazce se zmenšují a naopak malé zvětšují. Tuto zajímavou hru lze po delší dobu sledovati a co zvláštní jest, objevuje se jaksi rhythmicky: glia vždy nějakou dobu odpočívá, aby na novo zase pohyb zahájila.

Ke studiu tomuto přidal jsem ještě pokus jiný. — Vstříkl jsem žábě pod kůži hřbetní Pravazskou stříkačkou 1% methylenové modři a po 48 hodinách vyšetřil opět část šedé hmoty velkých hemisfér. — Vylučuje pak se barvivo po jisté době, jak ve dřívější práci jsem sdělil[2] v různých tkaních ve formě malých zrnéček, často velikosti nejmenších mikrococců. — Také injekcí intravenosní docházíme k cíli, než zde pravidelně diffusní zbarvení tkaní převládá. — Zrnka barviva v šedé hmotě jsou uložena mimo v bílých krvenkách uvnitř cev a potulných buňkách ve tkani, také v neuroglii. — Ve glii na rozdíl od jiných tkaní shledal jsem, že zrnka barviva jsou jaksi fixována, neboť nejeví pohybu, vzájemnou vzdálenosť neměníce. Za to kresby neuroglie kol nich bizarní svoji hru provozují. Tak leží ku př. zrnéčka barviva na některé čáře kresby gliové právě uprostřed její délky; čára počne se pojednou od jednoho konce zkracovati, takže zrnko ponenáhlu dostává se na samý konec, kdežto druhá část čáry se nezměnila, hned zase čára zkrácená se natahuje, a zkracuje konec druhý; leželo-li zrnko na přímce, leží za okamžik na křivce. Jinde vidíme zrnéčko barviva uprostřed obrazce gliové kresby a zase vidíme, jak se kresba kol něho mění, kruhy přecházejí v polygony, ty v ellipsy, aniž by se zrnko hnulo.

---

[1] Medizinische Jahrbücher 1883.

[2] Methodický příspěvek ku poznání pohybů buněčných. Rozpravy I.

Že zrnka sama změny místa nekonají, nasvědčuje, že vzájemná vzdálenosť zrnek mikrometricky měřena zůstala nezměněna, ano lze se přesvědčiti, že také skupiny zrnek jako celek s místa se nepohnuly.

Někdy pozorujeme, jak změny gliové přes zrnka se ubírají, což připomíná maně stín mračen přes dědiny přebíhající, nebo pohyb vlnícího se obilí kolem předmětu z něho vyčnívajícího. Že pak ani tato změna není snad způsobena změnou světla v zrcadle mikroskopu se obrážejícího, nebo snad od pohnutí zrcadla samého nebo padání tubusu odvislou, přesvědčí nás pokus prof. Spinou provedený, totiž že za pozorování náhle silným proudem elektrickým neuroglii usmrtíme. Všecky kresby před očima našima, jak jsem pozorovati mohl, se rozpadají okamžitě v jemnou jakoby drť z malých zrnéček složenou, a pohybům je konec.

Pokus takový úplně přesvědčuje, že nemáme před sebou tkaň mrtvou, ale že neuroglia jest hmotou živou, proměny schopnou. — Pohyb tu však jeví se co do intensity takovým, že není s to sebe jemnějšími zrny s místa pohybovati.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 13.

O SKLADBĚ CHRUSTAVKY

SEPIE OFFICINALIS.

NAPSAL

ALOIS V. VELICH.

(Z ÚSTAVU PRO EXPERIMENTÁLNÍ PATHOLOGII PROF. DR. A. SPINY.)

PŘEDLOŽENO DNE 12. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

VÝKLAD VYOBRAZENÍ.

Obraz I. Ocular 2. Objectiv 8. Reichert.
Chrustavka šíjová sepie v líhu pozorovaná. Řez topografický z periferie. Mohutné pásy bílé chrustavky s buňkami menšími (*a*), v okách žlutá chrustavka (*c*). *b* Buňka bílé chrustavky s výběžky paprskovitými.

Obraz II. Oc. 3. Obj. ponorná čočka. Seibert č. 8.
Elastická chrustavka z boltce koňského v líhu. Buňka scvrklá s četnými nejjemnějšími výběžky. Po stranách buňky dva elastické trámce.

Obraz III. Oc. 3. Obj. ponorná čočka. Seibert č. 8.
Praeparat z téhož objektu v líhu. Dutinka, z níž buňka vypadla; výběžky pouzdrem procházející.

Obraz IV. Oc. 2. Obj. Seibert 8. Ponorná čočka.
Chrustavka z lebky sepie v líhu. Trámce bílé chrustavky (*a*) směřující k cévě, kolmo prohnuté (*b*). *c* buňka chruplavky žluté s paprskovitými výběžky. Praeparat líhový.

Obraz V. Oc. 2. Ponorná čočka č. 10. Reichert.
Chrustavka z lebky sepie v líhu. Buňky s výběžky rozvětvenými glycerinem nezrušitelnými.

Až do roku 1868. téměř všeobecně považována byla chrustavka za tkaň úplně passivní a přisuzována jí proto poměrně malá biologická důležitost. Zmíněného roku však vystoupil Reitz [1] s pokusem, jenž učením o passivitě tkaně této v základech otřásl.

Vstříkl totiž žabám pod kůži roztok rumělky a ohledávaje pak mikroskopicky jejich chrustavku shledal, že zrnka barviva vnikla do základní hmoty, do buněk ba i do jader. I naskytla se tu otázka, jakým způsobem mohlo se dostati barvivo k dotčeným místům?

Otázku tuto hleděli zodpověděti Bubnoff [2], Budge [3] a J. Arnold [4] v tom smyslu, že příčinou tohoto zjevu jest jsoucnost šťávových kanálků v základní hmotě chrustavky. — Proti tomuto náhledu z počátku velice ostře vyslovovali se mnozí badatelé, v čele jich Cohnheim. Však i tento změnil bezpochyby své přesvědčení, neboť později Nykamp, pod jeho vedením pracující, sám existenci podobných drah šťávových potvrdil. [5] Mimo učení o šťávových kanálcích mohly Reitzovy obrazy vysvětlovány býti domněnkou Heitzmanovou. Tento vyslovil totiž náhled, že základní hmota prostoupena jest sítí protoplasmatickou. [6] Avšak ani náhled šťávové dráhy předpokládající, ani domněnka Heitzmanova nedošly víry. Hlavní příčinou zjevu toho byla obtížnost a nespolehlivost method, o něž veškeří již dříve uvedení badatelé se opírajíce, tak různé náhledy vyslovovali. Bylo tedy úkolem pozdějších badatelů najíti novou, pokud možno spolehlivou methodu, která by názor o spojkách mezi buňkami chrustavkovými opodstatňovala. To zdařilo se prof. *A. Spinovi*, [7] pomocí jehož methody obrazy spojek mezi buňkami chrustavkovými *pravidelně* se objevují.

[1] Reitz. Ueber passive Wanderungen von Zinnoberkörnchen. 1868. Sitzungsber. d. Wiener Akademie. Bd. 57. Abt. II.

[2] Bubnoff. Beiträge zur Kenntniss d. Structur d. Knorpels. 1868. Sitzungsber. d. W. Acad, Bd. 57 I. Abt.

[3] Budge. Die Saftbahnen im hyalinen Knorpel. 1877. Archiv f. mikr. Anat. Bd. 14.

[4] J. Arnold. Zur Kenntniss d. Saftbahnen d. Bindegewebes. 1876. Archiv f. pathol. Anat. u. Phys. Bd. 68.

[5] Nykamp. Beiträge zur Kenntniss d. Structur des Knorpels. 1877. Archiv f. mikr. Anat. Bd. 14.

[6] Heitzmann Studien am Knorpel u. Knochen. 1872. Wiener med. Jahrbücher.

[7] A. Spina. Ueber d. Saftbahnen d. hyalin. Knorpels. 1879. Sitzungsber. d. Wiener Akademie. Bd. 80.

Methoda tato, či lépe řečeno studium obrazů jí zjednaných, vyvolalo celou řadu publikací, ve kterýchž výklad prof. Spinou přednesený, že zde totiž běží o buněčné výběžky mezi sebou komunikující a takto výživu chrustavky zprostředkující, různě byl posuzován. — Někteří považovali výběžky prof. Spinou popsané za vazivová vlákna, jiní opět za prostory mezi těmito. Vyskytly se však i práce, které náhled Spinův podporují a mezi těmito především o české práci zmíniti se dlužno, totiž o publikaci Kabrhelově[8] a Heitzmanově,[8a] kterýmižto vývody prof. Spiny úplně jsou potvrzovány. Proti mínění, že by spojky buněk. methodou prof. Spiny se objevující, byly vlákny vazivovými, stojí mimo to příkře náhledy všech zastánců theorie o šťávových kanálcích.

Jelikož otázka o jsoucnosti kanálků neb výběžků buněčných jest pro nauku o výživě chrustavky normální i pathologické velice důležitou, a jelikož otázka tato různých odpovědí došla, obral jsem si za úkol studovati hyalinní chrustavku a to chrustavku sepie officinalis, jejížto buňky, jak všeobecně známo jest, a jak Hensen[9] a Boll[10] nejprve na to upozornili, opatřeny jsou útvary, o nichž nemůže býti ani nejmenší pochybnosti, že jsou výběžky buněčnými.

Při zkoumání svém hleděl jsem předně zodpověděti otázku, jaký jest poměr mezi obrazy praeparatů chrustavky sepie v glycerinu uložených a mezi kresbami na praeparatech, jež methodou prof. Spiny získati lze. Při srovnávání tom hodlal jsem náležitý zřetel míti ku práci Bollově,[10] který čerstvou chrupavku sepie ohledával v jodovém seru a jehož obrazy tedy nejlépe asi skutečnému stavu věci odpovídati mohou.

Druhým úkolem, jejž jsem si vytkl, bylo, srovnati stavbu chrustavky měkkýšů se stavbou chrustavky obratlovců.

Dříve však, než lze mi přistoupiti ku sdělení výsledků mého zkoumání, jest třeba, bych zde načrtl obsah práce prof. Spiny,[11] jednající o změnách, které byl svou líhovou methodou v základní hmotě chrustavky objevil. Považuji sdělení toto za nutné, abych později, pojednávaje o nálezech mnou při studiu chrustavky sepiové učiněných, na zmíněnou práci prof. *Spiny*[11] odvolávati se mohl.

Prof. Spina našel při zkoumání hyalinní části konvovité chrustavky (hrtanové) koně, v absolutním líhu utvrzené, na řezech v líhu pozorovaných překvapující skladbu. Chrustavka jeví se tu složenou ze dvou druhů tkaně. Jeden z nich tvoří bílé trámce a nazývá jej prof. Spina, dle barvy, chrustavkou

---

[8] G. Kabrhel. Příspěvek k nauce šťávových drah v chrustavce. 1887. Sborník lékařský. Svazek I. sešit 4.

[8a] C. Heitzmann. Patholog. Morphologie.

[9] Hensen. Ueber das Aug. einiger Cephalopoden. 1865. Zeitschr. für wiss. Zoologie. Bd. XV. p 15.

[10] Boll. Beiträge zur vergleichenden Histologie des Molluskentypus. 1869. Archiv für Mikroskopische Anatomie. Bd. 5. Supplement.

[11] A. Spina. Beiträge zur Histologie des hyal. Knorpels. 1886. Medic. Jahrbücher.

bílou, druhý pak vyplňuje prostory mezi těmito trámci a sluje rovněž dle barvy své chrustavkou žlutou.

Bílá chrustavka má míň a menších buněk a skládá se proto většinou jen ze základní hmoty. Tvoří brzy silné, rozvětvené trámce, brzy opět tenké nitky. Také desky chrustavky této místy na řezech se objevují. Zvláště řezy z okolí hořeního výčnělu chrustavky konvovité vyznamenávají se hojností trámců bílé chrustavky. V okolí cev lze pozorovati neustálé přibývání tkaně této na úkor chrustavky žluté, i dochází až k tomu, že kolem cev samých často toliko bílou chrustavku nacházíme. Při ohledávání silnými čočkami shledáváme, že jest chrustavka bílá prostoupena jemnými vlakénky, buňky spojujícími výběžky bunččnými.

Charakteristickým pro chrustavku bílou znakem dle Spiny jest, že se základní hmota její nebarví ani haematoxylinem ani methylovou violetí. Působivou reagencí na tuto tkaň osvědčil se býti líhový roztok eosinu. Manipulace s právě uvedeným barvivem jest tato: Řezy líhových praeparatů vloží se do řečeného barviva na tak dlouho, až jsou úplně jím proniknuty, po té přenesou se do 10% roztoku *HCl*. Když tu úplně vybledly, vloží se do vody, kde opět barvy své nabudou; pak konečně ohledávají se v glycerinu. Na praeparatech takto připravených vidíme, že pásy bílé chrustavky se barví do červena. Prostory mezi trámečky chrustavky bílé vyplňuje, jak svrchu řečeno:

Chrustavka žlutá. Barva této tkaně jest v líhových praeparatech vlastně slabě žlutohnědá a buňky její charakterisují se velikostí, hrubou a dosti hustou granulací svého těla, jakož i velkým jádrem a někdy světložlutým pouzdrem svým. Výběžky buněk jsou neobyčejně jemné a nedají se pro tuto příčinu v každém případě dokázati. Místy přecházejí zmíněné výběžky i do bílé chrustavky, kde se spojují s výběžky v této tkani se nacházejícími. Chrustavka žlutá liší se od bílé i chemicky; nebarví se totiž eosinem v líhovém roztoku, za to ale úplně dobře haematoxylinem a methyl. violetí, kterážto barviva, jak svrchu řečeno, bílou chrustavku nezbarvenou nechávají. Zajímavo jest též, že chrustavka žlutá pohlcuje více vody než bílá. Faktum to seznati můžeme, přidáme-li kapku této tekutiny ku krycímu sklíčku, pod nímž praeparat pozorujeme.

Vidíme tu, že chrustavka žlutá mocně naduří, čímž trámce bílé chrustavky značně stlačeny a ztenčeny bývají. Výběžky buněk obou druhů chrustavek při tomto pokusu mizejí úplně.

Tvoření bílé chrustavky děje se na místech těch, kde byla původně žlutá chrustavka. Zdali však tvoření bílé chrustavky podmíněno jest nějakou přeměnou chrustavky žluté, aneb zda tato úplně vymizí a místo její chrustavka bílá zaujme, není posud úplně vysvětleno, tolik však je jisto, že se počíná základní hmota chrustavky bílé tvořiti z buněk chrustavky žluté a to na periferii buněk těchto. Buňky tyto obklopují se znenáhla vrstvou základní hmoty chrustavky bílé a čím více se tato vyvinuje, tím více zmenšuje se tělo buněčné, až konečně na některých místech celá buňka zmizí a zbudou tu jen výběžky

její, jež pak objevují se v chrustavce bílé jako velejemné proužky. U některých buněk se pojednou tento pochod tvoření bílé chrustavky zastaví a buňky na dále vytvořují základní hmotu bílé chrustavky, aniž by samy zanikaly.

Buňky se tedy promění buď úplně v bílou chrustavku neb jen částečně Tím vysvětlíme si předně ten zjev, že buňky v bílé chrustavce jsou počtem skrovnější, a za druhé to, že buňky, které v tkani této zbyly, jsou menší. — Také mezi buněčnými výběžky v chrustavce žluté tvoří se základní hmota chrustavky bílé. Úkaz tento lze nejlépe seznati z té okolnosti, že poloha trámců bílé chrustavky se řídí dle polohy výběžků bunččných; na místech, kde běží tyto v paprskovitém uspořádání ku cévě, jsou též trámce základní hmoty bílé podobně uloženy, a tam, kde výběžky jako štětce z buněk vycházejí, neb kruhovitě probíhají, tam také základní hmota bílá, vyplňujíc prostory mezi výběžky, analogické jeví seskupení.

Poblíže cev jest tvoření chrustavky bílé, jak ostatně již řečeno bylo, nejintensivnější. — Analogické proměny s podobnými poměry, jako jsme je nyní vylíčili u konvovité chrustavky koňské, pozorovati lze dle Spiny též na chrustavkách jiných, tak na chrustavce hřebene lopatkového u mladého štěněte a na kloubové chrustavce starců. Z pozorování těchto soudí prof. Spina, že chruplavky hyalinné jsou tkanivy složitějšími, než by se dle stávajících náhledů očekávati dalo, a že nelze považovati je za tkaně stálé, neměnící se, nýbrž že naopak obdařeny jsou značnou vitalitou.

Tím vyčerpal jsem zhruba obsah práce prof. Spiny, jíž k snadnějšímu porozumění následujícího pojednání potřebí jest, a přecházím k vlastnímu předmětu této publikace.

* * *

Zkoumání mé dělo se dle Spinovy methody líhové, totiž následujícím způsobem. Ze sepie líhem utvrzené, již jsem laskavostí pana prof. *A. Friče*, kterémuž na tomto místě povinný dík skládám, obdržel, vypraeparoval jsem chrustavku a sice šíjovou i lebečnou. Obojí uložil jsem na nějaký čas do 96% líhu. Zkoumaje pak po několika dnech řezy chrustavek těchto, jež jsem si byl mikrotomem připravil, Reichertovou vodní immersí číslo VIII, porovnával jsem především, maje na zřeteli otázky již vytknuté, praeparaty methodou prof. Spiny získané s praeparaty glycerinovými obyčejnou methodou připravenými; ukázalo se, že chrustavka sepie objevuje při užití líhové methody podobné proměny, jak je byl prof. Spina na koňské chrustavce konvovité a i na chrustavkách jiných ssavců popsal.

Předmětem mého zkoumání byla nejdříve:

I. Ztluštělá část chrustavky týlní.

(Cartilago nuchalis.)

Chrustavka této části složena jest ze dvou druhů chrustavkové tkaně, jež podobné uspořádání jeví, jakéž prof. Spina u ssavců byl popsal.

Jeden druh bylo možno analogisovati s chrustavkou bílou, druhý se žlutou. Názvy »bílá« a »žlutá« nehodí se však na chrustavku sepie tak dobře jako na chrustavky ssavců; leč pro obdobu tkaní těch podržuji názvy ty a pojednám nejdříve o t. zv.

a) chrustavce žluté.

Tato nalézá se obyčejně ve středu řezu, lemována jsouc na pokraji chrustavkou bílou, jež vysýlá četné trámce do vnitř. Mezi trámci pak, podobně jako u ssavců, uložena jest chrustavka žlutá. (Viz obraz 1. c.) Buňky této tkaně jsou veliké, nečetné a v praeparatech glycerinových určitým jádrem opatřené. Základní hmota jest tu velice vyvinuta a místy jemně čárkována. Buňky objevují v optickém průřezu vedle známých výběžků protoplasmatických i jiné a to velmi jemné a hustě seřaděné výběžky, které u buňky samé paprskovitě, ve větší vzdálenosti však rovnoběžně uspořádány jsou a základní hmotě ono dříve uvedené proužkování dodávají. Výběžky tyto lze jen nejsilnějšími čočkami a jen na líhových praeparatech postřehnouti. Jsou to obrazy odpovídající paprskovitě seskupeným výběžkům, které možno viděti při užití líhové methody také na chrustavkách ssavčích.

Bych výroku tomuto poskytnul náležitou podporu, dovoluji si zde mimochodem uvésti, že se chrustavka z boltce koňského nejlépe hodí ku poznání oněch nejjemnějších výběžků buněčných, neboť lze je tu, jak z obrazů fig. 2. a 3. vyplývá, se značnou zřetelností viděti, ovšem že toliko při užití methody Spinovy a náležitě silných čoček. Každému, kdo se o otázku spojek mezi buňkami chrustavkovými zajímá, odporučuji chrustavku onu jakožto nejvhodnější objekt ku zkoumání. Při tom však jest třeba toho dbáti, aby řezy byly kolmo na obdélnou osu boltce vedeny. — Leč vraťme se k původnímu předmětu svému.

Uvedli jsme svrchu, že při užití methody prof. Spiny lze kolem buněk žluté chrustavky sepie viděti paprskovitě uspořádané výběžky. Výrok tento třeba doplniti ještě tím, že i ze známých granulovaných výběžků místy na obě strany neobyčejně jemné a taktéž jen v líhu viditelné paprsky vybíhají. Přidáme-li ku praeparatu vodu nebo glycerin, mizejí všechny výběžky paprskovité a zbývají pouze výběžky granulované, již staršími auktory popsané. *Barvivové reakce jsou u žluté chrustavky sepie officinalis tytéž jako u obdobné tkaně ssavců.* Barvíť se tato i haematoxylinem i methylovou violetí.

b) Bílá chrustavka.

Chrustavku tuto, jak již svrchu řečeno, pozorujeme nejčastěji při okraji řezu pod chrustavicí, odkud do žluté chrustavky trámce vysýlá, jež rozvětvujíce se a tím na objemu ztrácejíce, až v tenké nitky vybíhají (fig. 1.). Vůbec chová se tato tkaň chrustavky sepiové co do anatomického uspořádání stejně jako chrustavka bílá ssavců. Pozoruhodno jest však, že na některých místech přecházejí trámečky její z jednoho okraje řezu až na protilehlý druhý okraj a to často tak pravidelně, že tvoří na řezu jakousi řebřinovitou kresbu. Buňky jsou

tu značně menší a jeví, tak jako buňky žluté chrustavky, vedle nečastých výběžků granulovaných, též výběžky jemné, husté a paprskovitě uspořádané (fig. 1. b).

Dále lze konstatovati: Základní hmota chrustavky bílé jest místy prostoupena velice jemnými výběžky řádu druhého (fig. 1. a) a jelikož, jak svrchu řečeno bylo, i žlutá chrustavka místy jemné proužkování jeví, tedy shodují se obrazy moje na praeparatech líhových s Bollovými, jak je po praeparaci s jodovým serum obdržel. Boll[10] praví o těchto výběžcích loco citato na pag. 14.: »Sehr interessante Bilder bot der Kopfknorpel von Sepia. Die ganze Intercellularsubstanz fast erschien bei Betrachtung mit den stärksten Objectiven (Hartnacks Linse IX) fein längsgestreift. Bei näherer Untersuchung ergab sich, dass diese feine Längsstreifung durch die letzte und feinste Verästelung der von Knorpelzellen ausgehenden Fortsätze bedingt wurde. Die Knorpelzellen zeigten eine sehr reiche, jedoch stets nach einer Seite hin gerichtete Verästelung. Die langen Ausläufer verlaufen parallel neben einander und verästeln sich fortwährend unter spitzen Winkeln noch feiner, bis endlich die ganze Intercellularsubstanz ein längsstreifiges Ansehen annimmt.« Obrazy Bollovy, které se ku chrustavce svěží a to v seru uložené vztahují, zajisté daleko více pravdě odpovídají než obrazy, jaké dostaneme složitou praeparací řezů chrustavkových vodou, glycerinem neb nějakými barvivy, jak se to obyčejně při praeparaci chrustavek děje. Jest tedy patrno, že líhová methoda jest, nechceme-li výrok svůj sevšeobecňovati, alespoň pro chrustavku sepie mnohem vhodnější než praeparace obvyklé. Přidáme-li k řezům v líhu zkoumaným něco vody neb glycerinu, *zmizejí, jak následující ohledání nasvědčuje, i v bílé chrustavce nejen ony jemné výběžky, jež líh zřejmými činí, nýbrž i četné výběžky granulované, zejména běží-li o výběžky jemnější.* Jako mikrochemické reagence osvědčují se tu táž barviva jako u bílé chrustavky ssavčí. Líhový roztok eosinu barví totiž i bílou chrustavku sepie. Dále mohu na základě svých pokusů tvrditi, že taktéž řezy v tinktuře jodové zkoumané objevují na místech, kde bílá chrustavka se nachází, poněkud temnější zbarvení. Totéž platí dle mých pokusů o boraxovém karminu.

II. Chrustavka lebečná.

Na řezech celou tloušťkou této chrustavky objevuje se mimo oba uvedené druhy chrustavky, totiž bílou a žlutou, ještě jiná tkaň, která svými histologickými vlastnostmi stává se pozoruhodnou pro histologa. Tkaň tato zaujímá vnitřní část řezu odpovídající ploše obrácené k mozku. Buňky tkaniva tohoto jsou asi tak veliké, jako chrustavkové buňky chrustavky žluté, mají četné tlusté i jemné *výběžky, vybíhající ze všech částí periferie těla* buněčného. (Obr. 5.) Výběžky tyto jsou dále tím charakterisovány, že se rozvětvují *a že ve vodě a v glycerinu nemizejí.* — *Boll* bezpochyby buněk těchto neviděl, ježto ve své práci tvrdí, že buňky chrustavkové sepie *vždy* jen na jednu stranu výběžky vysýlají.

Jelikož výběžky zmíněné jsou rozvětvené a v glycerinu zcela patrné, dělá tato tkaň na pozorovatele dojem, jakoby byla tkanivo kostní. Než další optické vzezření, jako stejnotvárnosť a průsvitnosť hmoty základní a nedostatek listnavosti, ukazují na chrustavku. Nejlépe dala by se tkaň tato označiti jakožto tkaň přechodní od chrustavky ku kosti. Skladba tkaniva tohoto je ještě se stanoviska jiného pro histologii chrustavky důležita. Ohledáme-li totiž výběžky právě vylíčených buněk silnou čočkou ve směru k chrustavce žluté, kdež základní hmota jeví souběžné proužky, lze pozorovati, *že výběžky oněch buněk přecházejí v proužky chrustavky žluté*. Dříve jsem upozornil na to, že souběžné pruhování chrustavky žluté povstává tím, že výběžky buněk chrustavky této z okolí buněk paprskovitě vycházejí a se pak rovnoběžně staví, a že výběžky tyto, tudíž také ono souběžné prozkoumání, jen v líhových praeparatech se jeví a ve vodě neb glycerinu zacházejí. Jelikož pak pruhování toto ve výběžky oné kosti podobné tkaně direktně přechází, tedy s nimi jeden anatomický celek tvoří, nutno souditi, že to, co platí o jednom, platí také o druhém. Obrazy oné kosti podobné chrustavky však se vší určitostí učí, že buňky její mají zřetelné výběžky tak, jako buňky tkaniva kostního. Nemůžeme-li tedy pochybovati, že u těchto kostním buňkám podobných tvarů se nacházejí výběžky pravé, nelze pochybovati též o tom, že anatomické pokračování těchto výčnělků — totiž ono proužkování — taktéž výběžky buněčné repraesentuje. Tím domnívám se, je podán nový důvod pro ono učení, že buňky chrustavky objevují na líhových praeparátech výběžky pravé. Myslím, že tomuto důvodu lze připočísti zvláštní cenu za tou příčinou, jelikož buňky chrustavkové v líhových praeparatech se scvrkují a od základní hmoty vzdalují, tak že důkaz o přesné souvislosti oněch výběžků a těla buněčného podati nelze. Můžeme-li však podati důkaz, že ony záhadné výběžky souvisejí s výběžky, jež jsou co takové s určitostí poznatelné, pak jest nedostávání se důkazu vytknutého nahrazeno důkazem novým.

A nyní musím se ospravedlniti, že jsem užíval výrazu »výběžek buněčný«. Ač jsem si byl toho vědom, že analogické tvary bývají považovány za šťávové kanálky, přece jsem se domníval, že lépe vyhovím skutečným poměrům svých histologických praeparatů použitím významu »výběžek«, neb nikdy jsem neshledal, že by ony nitky z buněk vycházející byly duté. Dokud dutost nitek těchto není dokázána, myslím, že termin »výběžek« méně praejudikuje než termin »kanálek«, ku jehož podstatě jsoucnost průsvitu nutně přináleží.

Chrustavka bílá a žlutá chová se v lebeční chrustavce tak jako v šíjové. Nebudu proto dále o těchto tkanivech jednati, jen tolik bych podotknul, že kolem cev jsou trámce chrustavky bílé paprskovitě seřaděny, jak to Spina u ssavců popsal (obr. 4.).

Nežli pojednání toto skončím, považuji za vhodné poukázati na analogii z těchto zde uvedených pozorování vyplývající, která se mezi ssavčí chrustavkou a chrustavkou sepie, tedy měkkýšů, jeví. Tam i zde vidíme tvoření se žluté i bílé chrustavky, tam i zde jeví se buňky jakožto tvary výběžky opatřené.

Z analogie této plyne, že nelze tak snadno přistoupiti na námitky těch, kteří jako Vogel,[12] opírajíce se o domněnku úplné různosti chrustavky měkkýšů a ssavců, tvrdí, že nesprávno jest, onu okolnost, že na chrustavce měkkýšů zřetelně výběžky viděti lze, uváděti za důvod pro učení o podobných útvarech u ssavců.

Stručný obsah tohoto pojednání tudíž jest:

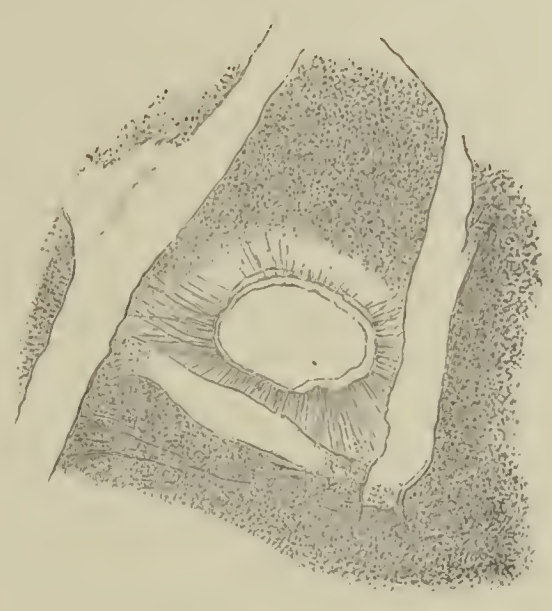
I. Buňky chrustavky sepie offic. mají vedle známých již výběžků granulovaných a v glycerinu viditelných, též velice jemné výběžky paprskovitě uspořádané, jež úplně odpovídají výběžkům, v chrustavkách ssavčích při užití líhové methody. Výběžky paprskovité jsou na místech, kde leží chrustavka kosti podobná, i v glycerinu viditelné.

II. Líhová methoda podává obrazy četnějších výběžků, než praeparaty glycerinem získané.

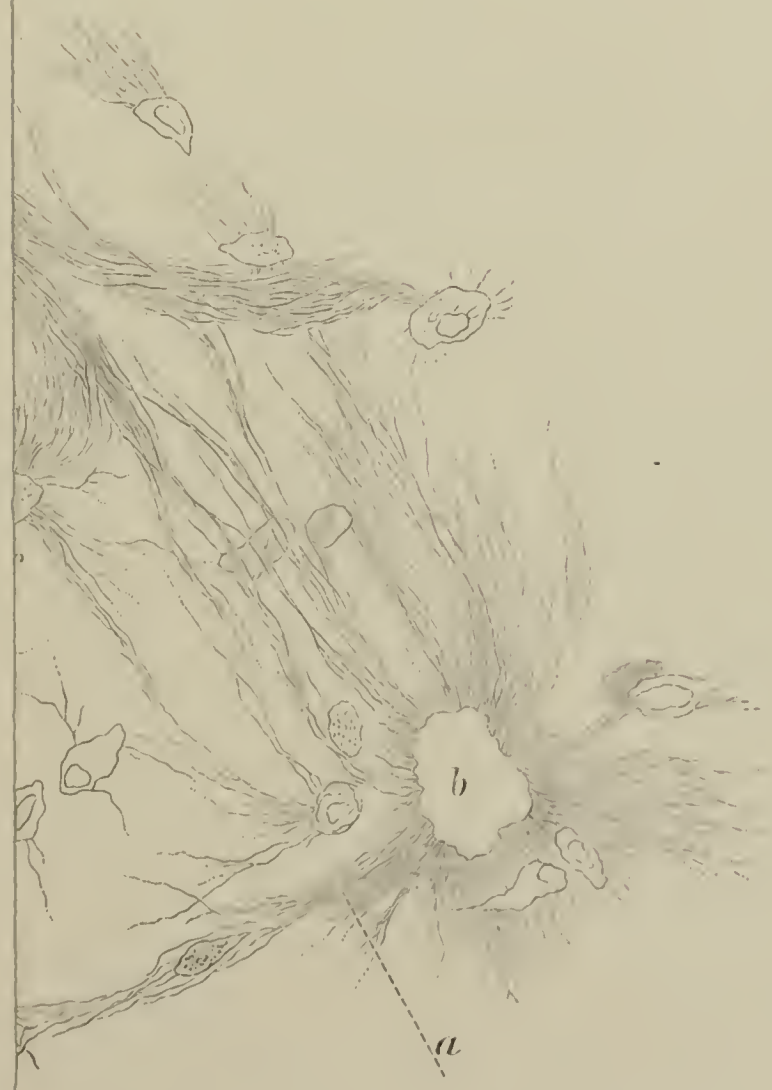
III. Chrustavka sepie offic. doznává analogických změn jako chrustavka ssavčí. Chová totiž v sobě bílou i žlutou chrustavku. Ba i přechod chrustavky ke kosti se tu vyskytuje.

Na konec této práce považuji za svou povinnosť, vysloviti slovutnému pánu prof. dru. A. Spinovi za jeho podporu při této práci upřímný dík.

[12] Vogel, Die Saftbahnen des hyalinen Knorpels. 1883. Dissert. Bern.

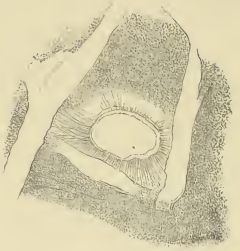


Obr. III.



Obr. I.

Obr. II.



Obr. III.

Obr. V.

Obr. IV.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 14.

GEOLOGICKÉ PŘÍSPĚVKY

K OTÁZCE

O POSLEDNÍCH KONTINENTALNÍCH ZMĚNÁCH EVROPSKÝCH.

PODÁVÁ

DR. JAN N. WOLDŘICH.

PŘEDLOŽENO DNE 17. ŘÍJNA 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892

Tiskem j. Otty v Praze.

Geologické změny, jimž kontinent evropský na konci doby třetihorní a během doby diluvialní podčiněn byl, byly v severozápadní Evropě dosti zevrubně sledovány učenci anglickými, dánskými a jinými. Zvláštních zásluh získali tu sobě *Lyell*, *Wallace*, *Boyd Dawkins*, *Owen*, *Steenstrup* atd. o vypozorování oněch ponenáhlých změn v dotyčných končinách evropských. Výsledkem jejich badání jest dosti rozšířený následující názor: Velká Britanie souvisela s pevninou evropskou na jihu, a sahala až ku čáře stouzlové hloubky (Hundertfaden-Tiefe) na západ; Severní moře tvořilo velké říční údolí, skandinávský poloostrov, zdá se, že rozprostíral se až k ostrovu islandskému a snad až i ku gronskému, jsa s nimi bezprostředně spojen. Jakkoliv domněnka tato zdá se býti mnohými, velmi závažnými doklady dotvrzena, zůstávají tu mnohé věci spornými, jako na příklad sporné jest dosud stáří vrstev »Forest Bed«, obsahujících zvířenu zajímavou, o nichž starší geologové se domnívají, že spadají do diluvia, kdežto mladší, jako *G. F. Newton* a *Cl. Reid* [1] tvrdí, že jsou stáří třetihorního.

I.

Záhadnějšími a neurčitějšími jeví se nám změny, sběhnuvší se za doby diluvialní na jihu, jihovýchodu, východu a severu evropském. Jednak ony změny sledovati, jednak poukázati k tomu, že stává poměr mezi změnami geologickými a změnami v kontinentalním podnebí střední Evropy, jest předmětem předloženého pojednání.

Počněmež otázkou *o pevnině istro-dalmatské.*

Ve svém, v roce 1864 vydaném pojednání, promlouvá *Q. Stache* [2] o slepencích dalmatského pomoří, v nichž našel zbytky »jelena a koně« a jež pozoroval na ostrově Ložíně v Kvarnéru a na Spalmadore nedaleko ostrova Hvaru. I uzavírá *Stache*, že ostrovy zmíněné jsou zbytkem rozsáhlé pevniny istro-dalmatské, která se částečně za doby velmi mladé pod hladinu mořskou ponořila. Názor svůj opakuje *Stache* ještě v roku 1876. [3] Podobné názory vyslovili *Suess*, [4] *Mojsisovics* [5] a *Neumayr*. [6] Za svého, v r. 1873 do Dal-

[1] Geological Magazine 1880.

[2] Österr. Revue, B. 6, p. 174.

[3] Verhandl. d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien 1876, p. 127.

[4] E. Suess: Entstehung der Alpen, Wien 1875.

[5] Dolomitriffe Südtyrols, p. 531.

[6] Neumayr: Über den Bau der Insel Kos. Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss. Wien, B. XL, 1879.

macie podniknutého geologického výletu přesvědčil jsem se, že velká část vrstev eocenových u Splitu ponořena jest pod hladinu mořskou.[7]

Náhledy jmenovaných badatelů, jinak dosti závažné, postrádaly dosud obšírnějších paleontologických dokladů. V minulých letech zaopatřil sobě c. k. geologický ústav vídeňský hojnosť slepenců, bohatých na kosti diluvialních zvířat nejenom z přímoří dalmatského a isterského ale i z ostrovů tamějších, tak z Pulje v Istrii, ze Šibeniku, Oliveto a Starigrodu v Dalmacii, z ostrova Hvaru, z Porto Crivizza a Balvanide na ostrově Ložíně, pak i ze Saone u Verony. Tehdejším ředitelem ústavu, dvorním radou *Fr. ryt. Hauerem* a nynějším ředitelem, dv. rádou *D. Sturem* byl jsem vyzván, vzácný material vědecky spracovati a zprávu o svých pozorováních podati. Ve zprávě své ze dne 6. května 1882[8] poukázal jsem k tomu, že celá řada mnou určených bejložroutů předpokládá rozsáhlých pastvin, že množství zvířat takových na poměrně malém ostrovu Hvaru nalézti dostatečné potravy nemohlo, že souhlasí nálezy ostrovů oněch s nálezy na pevnině isterské a dalmatské učiněných a že tudíž ostrovy zmíněné souviseti musily za doby diluvialní s pevninou dalmatskou a isterskou. Na základě zvířeny slepenců těch vyslovil se *M. Neumayr*[9] takto: »Ze zprávy Woldřichovy vysvítá, že značný počet divokých bejložravců na tak malé ploše, jakou zaujímá ostrov Hvar nemohl se vyživiti. Jest známo, že podobné poměry na žádném ostrově celé zeměkoule se nenacházejí; i ostrovy Falklandské, na nichž kůň a skot zdivočeli, ano i ostrovy Galopagos, na nichž divoký skot žije, mnohem větší jsou než ostrov Hvar. Poměrně bohatá zvířena jeho dokazuje *nyní* s úplnou určitostí, že dalmatské souostroví až do doby diluvialní pevninou bylo, a že nynější podoba Jaderského moře velmi mladého původu jest« S tím souhlasí úplně náhledy *Neumayra* o způsobu a době vzniku souostroví řeckého a východní části pánve moře Středozemního, jak uvidíme dále.

Od roku 1886 až do r. 1890 zasýlal mi prof. *R. Gasperini* ze Splitu kosti k určení, jež vykopal v okolí splitském, dubičském a na ostrově Hvaru. Sledoval jsem současně otázku naznačenou, jelikož i pro výzkumy středoevropské důležitosť má, až konečně dospěl jsem k následujícím výsledkům.

Že za doby eocenové jihozápadní úpatí jihovýchodních Alp (Dinara a Marino) bylo ponořeno pod hladinou mořskou, toho jest důkazem, že v tamějších krajinách eocenové vrstvy[10] jsou vytvořeny. V Istrii a Dalmacii spodní a střední vrstvy útvaru neogenového (pásmo miocenové) scházejí, svrchní vrstvy útvaru toho jsou sladkovodními usazeninami zastoupeny,[11] toť důkaz, že musila pevnina istro-dalmatská již za starších dob neogenových rozsáhlou býti. Zajímavou

---

[7] Woldřich: Geol. Mittheilungen aus Dalmatien. Verh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien 1874. Nr. 4.

[8] Woldřich: Beiträge zur Fauna der Breccien mit besonderer Berücksichtigung des Pferdes, 2 Taf., Jahrb. d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien, B. 32., 4. Heft 1883.

[9] Verh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien 1882. Nr. 9, p. 161.

[10] Porovnej též: Woldřich: Geolog. Mittheilungen aus Dalmatien. Verh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt 1874. Nr. 8, pag. 186,

[11] Porovnej tamtéž p. 188.

jest soustava záhybů *Stachem* v Krasu, v Istrii a na dalmatských ostrovech pozorovaná a poznaná; záhyby ty probíhají zde hornatou krajinu od severozápadu k jihovýchodu. Důležitá jest jižní synklinala, která přes Terst přímo skrz isterský poloostvov směrem jihovýchodním se táhne až k ostrovům kvarnerským. Pohoří toto, složené z vrstev křidových a třetihorních, tvoří záhyby tarasovitě stupňující a jest severovýchodně od Poreče asi 10 zeměpisných mil široké; na protější straně, jihozápadně od Poreče, vyčnívají v dvojnásobné asi vzdálenosti ty samé útvary z hloubky, tvoříce zde předhoří a dílem i velkou část vnitřních vrchů Apenninu. Směr synklinaly krašské a dalmatské jest totožný se směrem Apenninu. *Suess* [12] považuje pomoří dalmatské za okraj velkého koryta, geosynklinaly, ve smyslu Danauově, jejíž protější křídlo v Apenninu vystupuje; pobřeží naše představuje hraničné vrstvy zlomené, jelikož dno jaderského koryta dále upadlo; s tím pak že souvisí nejspíše stupňovitá podoba jihovýchodně od Terstu ležícího pohoří.

Důležité pro otázku tuto jsou výsledky *Stacha*, [13] k nimž dospěl, prostudovav třetihorní vrstvy ostrova *Palagruži*, jihozápadně od Korčuly, uprostřed Jaderského moře ležícího.

V roce 1874 popisuje *Stur* [14] několik měkkýšů z ostrova Palagruži a poukazuje k tomu, že vápenec tamější podobá se vápenci nulliporovému okolí vídeňského. Z badaní *Stacheova* pak vysvítá, že zbytky měkkýšů palagružských odpovídají tvarům, které žijí jen poblíž mělkého břehu mořského v nepatrné hloubce; jsou to namnoze tvary, vyskytující se sice již v středním pásmu neogenovém, jež přechází do svrchních jeho pliocenových vrstev a s nimiž se shledáváme v nynějším moři. Okolnosť ta hlavně se zřetelem na zastoupené zde »Haliotidy« a povaha hornin samých dokazují, že mořské vrstvy na ostrově Palagruži usadily se *v nejbližším sousedství břehu.* Vápenec nulliporový ostrova toho souhlasí, jak *Stache* dokazuje, s nejsvrchnějším z tří pásmen, jež *Fuchs* [15] u *Syrakusy* popisuje. S určitostí tvrdí *Stache*, že ostrov palagružský považovati sluší za zbytek ponořeného břehu mořského, který kdysi pevninu jaderskou starší doby neogenové omezoval, na níž planina Krasu apulského s křidovým územím istro-dalmatským spojena byla; pobřeží to táhlo se od Ston (Stagno) směrem k ostrovu Lastovo (Lagusta) a dále přes Palagruži a Tremiti k území tarentskému.

Proti poslednímu náhledu *Stachem* uvedenému, totiž že by byla pevnina istro-dalmatská za mladší doby třetihorní přímo spojena až s pohořím apulským, poznamenává *Neumayr*, [16] jak následuje. »Za doby pontické a levantské (této s první zvířenou pliocenovou, Mastodon arvernensis) ba i dříve,

[12] Suess: Entstehung der Alpen, 1875, p. 92.

[13] Stache: Geolog. Notizen über die Insel Pelagosa. Verhandl d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien 1876. Nr. 6, p. 126.

[14] Verhandlungen d k. k. geolog. Reichsanst. Wien 1874, Nr. 16, p. 391

[15] Fuchs u. Bittner: Pliocaenbildungen von Syrakus und Lentini. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien I. 1875.

[16] Neumayr: Über den Bau der Insel Kos. Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss. Wien B. XL 1879, p. 41.

byla nejspíše východní část Adrie pevninou, na níž se dosti jezer nacházelo. V celé Istrii a Dalmacii a i na ostrovech od Kvarnérače až k Dubrovníku (Ragusa) scházejí mořské usazeniny již od druhého stupně středomořského (Mediterranfauna), a jen nejjižněji, totiž na Palagruži, vyskytují se stopy pliocenových vrstev přímořských. Východní pobřeží italské bylo, jak známo, za doby svrchního miocenu a pliocenu mořem obklíčeno, jehož zátoka sahala přes rovinu Padu až do Piemontu; východní pobřeží moře Jaderského běželo bezpochyby přes západní ostrovy dalmatské. Od čáry pobřeží toho táhne se mezi Splitem a Dubrovníkem u Korčuly a Lastova podmořský hřbet příč přes moře Jaderské, jehož výška po celé délce nad stouzlovou čáru sahá; hřbet ten nese ostrovy: Šušac (Cazza), Palagruža, Pienosa a Tremiti, končí pak osamělou horou Gorgano na italském pobřeží. Zvířena měkkýšů pozemních vrchu Gorganu nenese charakter italský, nýbrž *dalmatský*.[17] Sahalť tudíž za mladší doby třetihorní poloostrov pevniny istrodalmatské od východu až k vrchu Gorgano; severní část tehdejšího moře Jaderského souvisela s jižní částí průlivem, na rovině západně od Gorgano běžícím.«

Že rozsáhlá pevnina istro-dalmatská mladší doby třetihorní, na jih se šířící, sahala od Terstu až k Dubrovníku, a na západ až k Apenninu a že ještě za doby diluvialní trvala, o tom nemůže býti, jak z předu již všeobecně naznačeno, žádné pochybnosti. Byla-li ale spojena s pevninou italskou po celé čáře, anebo běžela-li úzká a krátká zátoka podél východního pobřeží italského severně od Gorgano, nelze s jistotou tvrditi, zdá se tomu ale tak býti vzhledem na známý nález rašeliny a měkkýšů pozemních ve velké hloubce pod Benátkami. Nález tento poukazuje pak k tomu, že se tu pevnina za nejmladší doby ponořila.

Dříve nežli se ku zvířeně diluvialní istro-dalmatské pevniny, jakožto úplnému důkazu o trvání pevniny té, obrátíme, budiž několik slov o *slepencích*, v nichž zvířena ta objevena byla, podáno.

Slepence pobřeží moře Středozemního skládají se z úlomků hornin, hlavně vápence a z kostí zvířecích stmelených hmotou jílovito-vápenitou; nalézají se, jak známo, v trhlinách a rozsedlinách. Dobývání kostí z nich jest náramně obtížné. Ačkoliv se slepenci vyplněné trhliny a rozsedliny pánve Středozemského moře nacházejí na půdě povahou a stářím rozličné, povstaly přece v téže době geologické, za podobných poměrů a za stejných průběhů přírodních. V nich se vyskytující zbytky živočichů náležejí téže geologické době, totiž diluvialní, a liší-li se seznamy živočichů těch dle místností poněkud, jest toho příčinu hledati jednak v rozsáhlosti trhliny, do které dostati se mohly jen zbytky jisté velikosti, jednak v různosti vedle trhliny právě žijících druhů živočišných. Že zbytky živočichů dostaly se do trhlin nejen náhodou, ale i zaplaveny tam byly dešťovou vodou, a to ze samého okolí trhliny, o tom nelze pochybovati. I na pobřeží dalmatském, isterském a na ostrovech tamějších vyskytují se slepence dosti hojně.

[17] Kobelt: Excursionen in Süd-Italien. Jahrb. d. deutsch. malako-zoolog. Gesellsch. 1879, p. 144.

Z kostí v slepencích obsažených a pocházejících z ostrova *Hvaru* určil jsem:[18] Atelodus Merckii Brandt, Equus C. fossilis Rütim., Bos. spec., Bison priscus Rütim.?, Cervus, dva tvary (Cervus elaphus L.? a Cervus dama L.?), pak Capra neb Ovis. Porovnáme-li šest až sedm bejložroutů těchto s nálezy středoevropskými, tu poznáme, že odpovídá zvířena naznačená zvířeně sudslavické rozsedliny II., ano i oné z Výpustku na Moravě, a že sahá do období, kde diluvialní zvířena lesní u nás šířiti se počala.

Ze slepenců u Pulje určil jsem: Equus Stenonis affinis Woldř. (tvar ten podobá se pliocenovému Equus Stenonis Costi), Equus quaggoides affinis Woldř. (podobá se pliocenovému Equus quaggoides Major), Equus C. fossilis Rütim. (podobá se jedné části našeho koně domácího Equus Caballus L.), Equus spec. (podobá se typu osla), Bos primigenius Boj., Bison priscus Rüdim.? Cervus (elaphus L.?) a Gulo borealis Nilss. Ze Starigrodu v Dalmatii: Bos spec., Cervus elaphus L.; ze Šibeniku: Cervus dama L.; ze Saone u Verony: Cervus elaphus L.; z Porto Crivizza a Balvanide na ostrovu Lošniji: Cervus dama L.

Zajímavým mezi naznačenými tvary jest tu *rosomák* (Galo borealis), který nijak nesouhlasí co do doby s ostatními tvary jmenovanými, nýbrž poukazuje na zvířenu glacialní a důkazem jest, že zástupcové zvířeny glacialní až do jižních krajin těchto se dostali. Vzhledem na nález tento mohl by úlomek lebeční, pocházející z ostrova Hvaru, jejž mi zaslal prof. *Gasperini* a jejž jsem označil »Capra neb Ovis«, náležeti kozorožci, Capra ibex L. Veškeré tvary zbývající a pocházející dílem z ostrovů, dílem z pevniny, souhlasí mezi sebou nejen co do obsahu, ale i co do doby. Jsouť to vesměs bejložrouti, kteří jen na *rozsáhlé istro-dalmatské pevnině* za doby diluvialní dostatečné potravy nalézali a na prostoře její se probíhati mohli. Ano koně jmenované vyžadují i *rozsáhlé roviny*, jaké dnešního dne u Pulje není; na půdě istro-dalmatské bylo dosti příležitosti k dalšímu postupování vývinu koňů pliocenových, z nichž některé druhy, jako Equus quaggoides affinis, na spojení s Afrikou poukazují.[19] Stáda bejložroutů jmenovaných pronásledována byla šelmami, jejichž jednu skrýš jsem nalezl ve sluji Cetině u Vrlika na úpatí Alp dinárských.[20] Z velkého množství, mnou vykopaných kostí, ve sbírkách mých uložených, určil jsem: Hyaena spelaea, Ursus spelaeus, Ursus priscus a Ursus arctos. *Forsyth Major* uvádí medvěda Ursus mediterraneus Major, menšího nežli Ursus arctos ze slepence u Sistiany v okolí terstském.[21]

V roce 1886 zaslal mi prof. *Gasperini* z popelité země, naleziště to předhistorického na ostrově Hronu, několik člověkem rozbitých kostí zvířecích,

[18] Woldřich: Beiträge zur Fauna der Breccien etc. Jahrb. d. k k. geol. Reichsanst. Wien B 32, 4. Heft p. 20, 1883.

[19] Zajímá nás, že tu tvar malého koně, v střední Evropě tak často se objevujícího, totiž Equus C. fossilis minor Woldř., nenalézáme; důkaz toho, ž kůň ten dostal se k nám ze severovýchodu.

[20] Woldřich: Geolog. Mittheilungen aus Dalmatien. Verh. d k. k. geolog Reichsanst 1874. Nr. 8, p. 189.

[21] C. J. Forsyth Major: Remarques sur quelq. mammif. postertiaires de l'Italie. Atti della Società Italiana d. scienze natur. Vol. XV. fasc. V. 1873, pag. 7.

částečně připálených, i psem ohlodaných, z nichž jsem určil: Ovis aries L., Bos brachyceros Rütim., Bos plemene primigenius, Sus a *člověka.* Že zbytky jmenované náležejí alluviu, jest samozřejmo; mohly by spadati do doby neolitické, avšak proti tomu svědčí násadec lebky ovčí kovovým nástrojem seříznutý; náleží tudíž ložiště to do předhistorických časů kovových. Za dob těch nebylo na ostrově více divoké zvěře diluvialní; není pochybnosti, že ostrov ten již byl; člověk pak i s domácími zvířaty dostal se sem za těch poměrně daleko pokročilých časů plavbou a několik kusů domácích zvířat snadno tu mohl vyživiti.

Trvání rozsáhlé pevniny istro-dalmatské za doby diluvialní nelze, jak z předvedených důkazů vysvítá, déle popírati. Jelikož zbytky jednotlivých tvarů zvířeny lesní na ostrovech dalmatských v slepencích zastoupeny jsou, klesla pevnina istro-dalmatská teprve za období lesního, tudíž až ku konci doby diluvialní pod hladinu mořskou.

II.

Obraťmež nyní pozornosť svou k *západní části Středozemského moře*, hlavně k otázce *o sardo-italské pevnině.*

I zde nalézá se hojnosť slepenců, kosti zvířecí obsahujících, za té samé doby a tím samým způsobem v trhlinách uložených. Již *Cuvier* [22] popisoval kosti ze slepenců, a sice z Gibraltaru, z Cette, Nizzy, Antibesu, z Bastie a odjinud, aniž se byl zmínil o nějakých zbytcích člověka aneb o nějaké stopě měkkýšů mořských *E. Chantre* udává, že v slepencích u Nizzy vyskytují se měkkýši: Tritonium, Mytilus a Patella ve společnosti s Hippopotamus, Rhinoceros, Bos, Cervus, Ursus a se želvou. V cestopisu *La Marmory* [23] uvádí *Studiati*, že v slepencích Bonarie, v okolí *cagliarském* na ostrově sardinském nalezl zbytky měkkýše Mytilus edulis s Lagomys Sardus Wagner, s Myoxus glis, Arctomys, Cervus (dema?) a Cynotherium Sardous = Canis alpinus Pall.[24] *Hensel* pak tu ještě udává Mus orthodon Hensel, Arvicola ambiguus Hensel. *Rivière* [25] uvádí z jeskyně *Baoussi-Roussi* nedaleko *Mentone* vedle člověka a výrobků jeho Ursus spelaeus, Bos, Cervus, Sus, Rhinoceros, Glires, Aves a pak měkkýše mořské: Mytilus, Patella, Pectunculus, Cardium a Pecten jacobeus.

Z jeskyně *Levrange u Brescie* uvádí *Forsyth Major*: [26] Felis catus (ferus), Ursus arctos, Meles taxus, Canis lupus, Mustela martes, Foetorius putorius K. et Blas., Foetorius erminea K. et Blas., Foetorius vulgaris K. et Blas., Sorex vulgaris, Crocidura leucodon, Crocidura sp.?, Talpa europaea, Sus scrofa (ferus), Cervus elaphus, Capra ibex (hojně), Arctomys marmotta (velmi hojně), Myoxus glis, Mus sylvaticus, Arvicola glareolus var. Nageri Schinz (velmi hojně), Arvicola nivalis Martins, Arvicola (arvalis?). Učenec ten má za to, že zbytky zvířat

---

[22] Cuvier: Rech. s. l. ossem. foss.

[23] La Marmora: Voyage en Sardigne; 3. part. descrip. geolog. Turin 1857.

[24] Nejspíše to Cuon europaeus Bourguig. Též *F. Major* připisuje tvar ten rodu *Cuon.*

[25] Comptes rendus de l'Académie, 29. avril 1872.

[26] C. Marinoni: Nuovi materiali di Paleoetnologia Lombarda. Atti della Soc. ital d. sc. natr. Vol XV. fasc. III. 1972, p. 7.

jmenovaných byly člověkem nastrádány a do jeskyně zaneseny a že v největším počtu vyskytující se Capra ibex a Arctomys marmotta byly starým obyvatelům jeskyně pokrmem, i považuje zvířenu tu částečně za poměrně mladou. A skutečně ze směsi zvířeny jmenované sám soudím, že zástupcové lesní sáhají tu až ku konci doby diluvialní.

Forsyth Major[27] uvádí dále z jeskyně *Parignana* u Pisy: Canis lupus, Canis vulpes, Foctorius putorius, Foctorius vulgaris, Ursus arctos, Talpa, Rhinoceros leptorhinus Cuv., Cervus elaphus, Cervus capreolus, Capella rupicapra, Lepus variabilis, Lepus timidus?, Arctomys (marmotta?), Arvicola arvalis, Arvicola glareolus, Arvicola nivalis, Arvicola amphibius, Mus sylvaticus, Myoxus glis, Cricetus frumentarius, Aves. *Nesti*[28] uvádí z ostrova *Elby*: Ursus spelaeus a *F. Major* ještě jednoho menšího medvěda; dále zbytky kočky velikosti rysa, zuby rodu Cervus velikosti daňka a zuby rodu Antilope. *Rütimeyer*[29] popisuje Ursus spelaeus ze slepence nepatrného ostrova *Pianosi*, jihozápadně od Elby ležícího; *F. Major* však pochybuje, že zbytky tyto z ostrova Pianosi pocházejí, uvádí za to zbytky rodu Cervus a Sus a z nejmenšího ostrova Giannutri, jen 200 *ha* obsahujícího, zbytky rodu Cervus a ještě jednoho většího bejložravce. Ze slepence *d'Olivola* v Toskáně udávají se Bos (příbuzný Bos etruscus Falc.) Equus caballus, Sus a Arvicola; ze sluje *dei Goti* a *all'Onde* v Toskáně Arctomys. Co se týče smíchané zvířeny z Parignany u Pisy v Toskáně, tu především větší část její, hlavně i šelmy, poukazují na konec doby diluvialní, druhá část odpovídá zvířeně stepní a snad Arvicola nivalis, Lupus variabilis a Capella rupicapra poukazují na období glacialní. Ze zvířeny stepní zajímá nás především Cricetus frumentarius, protože křeček dnešního dne za Alpami nežije a že schází ve Švýcarsku a ve Francii (v diluviu jest tam zastoupen ve slepencích u Montmorency nedaleko Paříže). *Forsyth Major*[30] praví: »V Italii potkáváme se za diluvialní doby s druhy rodu Arvicola, které tam nyní nežijí, známo jest, že rod ten dnes hlavně na severu evropském a v jižní Sibiři se nachází.« Vše to poukazuje na rozšíření zvířeny subarktické čili stepní až do italské pevniny; pravé arktické tvary však, jako Myodes torquatus a Ovibos moschatus v Italii scházejí. Že jedna část, hlavně větších, pohyblivějších tvarů zvířeny severní *předglacialní*, jako Elephas primigenius, Bos primigenius, Bison priscus atd., rozšiřujícími se *ledovci* na jih a jihozápad se ubírajíc, až na pevninu italskou se dostala, jest známo. A když pak za období glacialního temperatura klesla, při čemž podnebí v krajích na jih od Alp položených asi přiměřeně jako dnes mírnějším zůstalo než podnebí severně od Alp ležících zemí, tu mohly ještě druhy, jako Capra ibex, Capella rupicapra, Arvicola nivalis, Lepus variabilis, v polohách nižších se zdržovati; neklesla tu temperatura ale tak daleko, že by se v polohách naznačených jižních byli mohli zdržovati i Myodes torquatus a Ovibos moschatus.

[27] Forsyth Major: Remarques sur quelq. mammif. postter. de l'Italie. Atti della Soc. Ital. de sc. nat. Vol. XV. fasc. V. 1873, p. 6.

[28] Biblioth. univers. d. sc., Belles-Litt. e Arts, Genève XXIV. 1823 p. 206.

[29] B. Castaldi: Intorno ad ulcunni fossili del Piemonte e della Toscana 1866, p. 25.

[30] Na uved. místě p. 17.

Nejdůležitější jsou dále výsledky badání *Arn. Locardova*[31] v slepencích okolí Bastie na ostrově Korsice, kde se vyskytly vedle kostí člověčích, ssavčích a ptačích i skořápky měkkýšů pozemních a mořských, ještě dnes v okolí tamějším žijících. Měkkýši mořští jsou tudíž společní slepencům u Nizzy, u Mentone, i oněm ostrova korsického a sardinského.

V slepencích u *Bastie* uloženy byly kosti příslušející: Homo, Canis vulpes L.?, Lagomys corsicanus Cuv., Lepus, Myoxus glis Schreb., Mus sylvaticus L., Ovis musimon L., Glires, Perdix, Aves, Lacerta, Testudo. Laskavostí nejochotnější zasláno mně bylo ředitelstvím musea »d'Histoire Naturelle« v Lyoně, kde nález Locardův uložen jest, několik kostí k prohlédnutí.[32] V hlodavci neurčeném mohl jsem poznati, tak jako *Gervais*, jen Mus sylvaticus L. (s charakteristickými známkami prvního a druhého třenovce hořejšího), ač to *F. Major* popírá; kosti holenní náležejí velmi *mladému* hlodavci, nejspíše Lagomys corsicanus Cuv., tři čelisti dolejší připisuji Mus orthodon, totiž myši, již popsal Hensel[33] ze slepenců cagliarských v Sardinii, druh to stojící mezi Mus decumanus a Mus sylvaticus; zachovaný, ale silně otřený zub první souhlasí úplně s obrazcem Henselovým tab. XIII. fig. 10.[34]) Kosť holenní ptačí mně zaslaná stojí nejblíže Pyrrhocorax alpinus L. Seznam *Locardův* se musí tudíž doplniti druhy: Mus orthodon Hensel a Pyrrhocorax alpinus L.?

Co se týče pišťuchy, jest nutno podotknouti, že Lagomys corsicanus Cuv.[35] a Lagomys sardus Wagner jsou nejspíše ten samý tvar, jejž popisuje Hensel[36] pod jménem Myolagus Sardus a porovnává jejž se zbytky miocennímí z Oeningena a Steinheimu. *F. Major* k tomu podotýká,[37] že pravé pišťuchy (Lagomys), žijící dnes po Sibiři až k Himalaji, jsou zastoupeny v miocenu württemberském (u Althausen a u Riedu) druhem málo se jen lišícím od Lagomys alpinus a nepalensis; že veškeré dnešní druhy severní ještě dosti známy nejsou, a že as s Myolagus souhlasiti by mohly. Zbývá jen ještě podotknouti, že pišťucha naznačená nejvíce se podobá Lagomys alpinus.

Dále uvádí *Locard* ze slepenců okolí *Bastie* devatenáct druhů *měkkýšů pozemních*, vesměs do dnešního dne žijících, buď přímo vedle slepenců aneb v jiných částech ostrova toho; z měkkýšů slepenců těch uvádíme: Helix vermi-

---

[31] Arn. Locard: Note sur les bréches osseuses des environs de Bastia, Corse. Archiv du Museum d'histoire naturelle de Lyon 1873.

[32] Zaslány byly: Crâne, mandibules et os des membres de rongeur, asi 10 kusů; tibiae de rongeur, 17 kusů; mandibules de rongeur, 3 kusy, a tibia d'oiseau, 1 kus.

[33] Zeitschr. d. deutsch. geolog. Ges. B. VIII. 1856 p. 281.

[34] Při této příležitosti podotýkám, že dle alveol čelistí mně předložených měl každý zub dva kořeny jako Mus sylvaticus a Mus domesticus, kdežto Mus decumanus, Mus rattus vykazují u prvního třenovce dolejšího čtyry a u každého z druhých dvou zubů tři kořeny; o tom se však Hensel nezmiňuje.

[35] Tu má vlastně státi »Giebel« neb od tohoto pochází jméno »L. corsicanus« a

[36] Zeitschr. d. deutsch. geolog. Ges. B. VIII. 1856, p. 689.

nikoliv od Cuviera, který jen zbytky korsikánské popisuje.

[37] F. Major: Remarq. sur qulq. mammif. postertiales de l'Italii. Atti della Soc. Ital. d. sc. nat. Vol. XV. fasc. V. p. 18.

culata Müller, Helix apicina Férussac, Helix Broccardina Dutailly, Helix aperta Müller a Zonites obscuratas Porro. Větší část ve veškerých slepencích četně nalezených měkkýšů žije však dnes na ostrově jen zřídka, tak hlavně Helix Broccardina Dutailly a Zonites obscurata Porro. Toť důkaz, že důležitá změna v podmínkách životních státi se musila, tak že druhy ty, nemohouce se akklimatisovati aneb přeměniti, jeví tendenci vyhynouti na ostrově. Pozoruhodno jest pak, že Helix Broccardina Dutailly dnes ještě žije, ač v malém počtu, na ostrově sardinském a sicilském; Zonites obscuratus Porro žije dnes mimo Korsiky četně na italské pevnině, Helix aperta Müller v Italii, Sardinii a v Alžíru.

Z měkkýšů mořských uvádí *Locard*: Monodonta Olivieri Payraudeau, Patella Bonnardi Payr., Patella Bonnardi Payr. var. alta, Patella vulgata Lamarck, a Venus decussata Lamarck (nachází se dnes v okolí ostrova zřídka, četně však na jihu). Veškeří jmenovaní měkkýši žijí dnes na blízkém pobřeží, jsou jedlí a slouží rybářům za vnadidlo. Zbytky mořských těch měkkýšů vyskytly se s měkkýši zemními a s kostmi hlodavců hlavně v trhlinách bohatých na zbytky pišťuchy. Slepenec, jenž obsahoval kosti lidské, choval množství skořápek měkkýšů těch, nalézajících se i ve výšce více než 100 m. nad hladinou mořskou. Skořápky jejich, ačkoliv tvrdší, tužší a porušení více odporující nežli měkkýšů zemních, jsou polámány a silně porouchány. *Locard* tudíž docela správně soudí, že *člověk*, jenž měkkýše ony pojídal a k jiným ještě snad účelům upotřebil, skořepiny jmenované sem přinesl a je tu pohodil; i byly pak vodou vplaveny a s druhým materialem smíchány v trhlinách uloženy; nastrádání to trvalo prý po dlouhý čas. Když *Pumpelly*[38] objevil na ostrově korsickém v horách Baglia Orba stopy starých ledovců, *Locard* nakloněn náhledu, že člověk tu žil s pišťuchou za časů, když ledovců ubývati počalo a končí otázkou, »jakým způsobem dostal se člověk na náš ostrov za doby, jak se zdá dřívější nežli slepence povstaly, za doby, kdy známosť plavby mohla býti jen nepatrná a přechod člověka z kontinentu na ostrov docela nemožným byl? Otázku tu rozřešiti nemůžeme!«

V pozdějších spisech poukazuje *F. Major*[39] k tomu, že ve sluji u Fogy nedaleko Bastie nalezl zbytky: Myolagus Sardus Hensel (80 individuí), Lepus, Mus othodon Hensel, Mus (malý druh) Capra a Cervus. Poznamenává tu, že ani jeden druh ssavců nalezených na Sardinii a Korsice nesouhlasí s takovým, jenž by buď žil aneb se nalezl v diluviu kontinentu. To však nesouhlasí nijak s listinou zvěře diluvialní, uveřejněné Studiatem a Locardem; poukazujeme tu jen na Myoxus glis, Mus sylvaticus a *Cuon*. Že by však náležel Myolagus Sardus, jehož několik zbytků nalezl *F. Major* ve sluji u San Fiorenzo v severovýchodní části ostrova Korsiky spolu s přihlazenými sekerami kamennými a s hroty jaspisovými a obsidianovými, jakož i se zbytky: Bos taurus, Capra hircus, Sus scrofa, padaly do doby neolitické, sám pochybuje.

---

[38] Raph-Pumpelly: Sur quelques traces de glasiers dans l'île de Corse. Bul. de la Soc. géolog. 2. sèr. t. XVII, Paris 1859, p. 78.

[39] F. Major Dott. Carlo J: Breccie ossifere e statione neolitica in Corsica. Archivo per L'Anthrop. e la Etnologia, Firenze 1880, Vol. X. — »Die Tyrrhenis« Kosmos VII Jahrg. 1883.

Co se týče stop doby glacialní v krajinách, o nichž jednáme, tu dlužno ještě podotknouti, že *Stefani*[40] poukazuje na *severní* měkkýše mořské a klade váhu na Cyprina islandica, vyskytující se ve svrchních vrstvách pliocenu italského, tak na vrchu Mario u Říma, u Figarazzi a na Monte Pellegrino u Palerma na ostrově sicilském; pokládá tudíž vrstvy ty za popliocenní, totiž za glacialní; též *Neumayr*[41]) považuje vrstvy u Figarazzi, obsahující Cyprina islandica, Panopaea norvegica a jiné severní druhy, popsané *March. Monterosatoem* r. 1872, za glacialní. *Musilo tu tudíž býti za časů glacialních spojení s otevřeným mořem.* S tím souhlasí výrok *F. Majorovo*, že úžina messinská ještě za doby pliocenové širší byla nežli dnes; (Tyrrhenis p. 4).

Uvážíme-li veškeré uvedené poměry, dospějeme k názorům následujícím:

Měkkýši mořští, nalezení ve slepencích u Nizzy, u Mentone a na ostrově sardinském s diluvialními ssavci, byli tam tak dobře člověkem doneseni jako na ostrov korsický. Podobně soudí *Neumayr* o Cardium edule, jehož skořápky na pahorcích poloostrova Chalkidike v moři Egejském roztroušené byl nalezl. Z částečně stejného obsahu nálezu cagliarského na ostrově sardinském a nálezu u Bastie na ostrově korsickém vysvítá, že ostrovy ty spojeny byly, což též i *F. Major* předpokládá.[42]

Stopy člověka jakož i více ssavců na Korsice a Sardinii nalezených, jako Myoxus glis, Mus sylvaticus, Arctomys, *Cuon* a snad i jiných, odpovídají nálezům na více místech pevniny italské a francouzské, a poukazují tudíž na někdejší souvislosť ostrovů těch s kontinentem.

Jelikož na ostrově Elbě dva tvary medvědí sotva, na nepatrném ostrově Pianose pak dva druhy rodů Cervus a Sus, a snad i medvěd (Ursus spelaeus) a na nepatrném ostrově Giannutri druhy dvou rodů bejložroutů uživiti se nemohli a jelikož několik druhů těch na blízké pevnině toskánské se nalezly, musily ostrovy ty alespoň s pevninou italskou spojeny býti.

Uvážíme-li dále, že na ostrově Elbě bylo objeveno naleziště diluvialního člověka, obsahující množství nástrojů, zhotovených z pazourku a z obsidianu, že obsidian tam se mohl dostati jen snad z ostrova sousedního Pianosi anebo z ostrova sardinského[43] a pazourek nejspíše z krajů francouzských, že dále stopy člověka doby té nalézáme nejen na ostrově korsickém a sardinském, ale i na protější pevnině italské, a že konečně i diluvialní zvířena toskánská alespoň částečně souhlasí z nálezy na ostrovech Elbě, Pianose, Korsice a Sardinii: tu musíme doznati, *že v jistém období diluvia veškeré ostrovy jmenované souvisely mezi sebou a s pevninou italskou a že tehdy i pevnina, zkrátka sardo-italskou pojmenovaná, existovala.*[44] Nezdá se však,

---

[40] Carlo de Stefani: Sedimenti sottomarini del l'epoca postpliocenica in Italia. Bullet. del Com. geologico, 1876, Nr. 7, 8.

[41] M. Neumayr: Über den geolog. Bau der Insel Kos. Denkschr. der k. Akademie der Wissensch Wien. B. XL 1879.

[42] Forsyth Major: Remarq. s. quelq. mammif. posttert. de l'Italie. Atti della soc. Ital. d. sc. mat. Vol. XV. fasc. V. 1873.

[43] Porovn Woldřich: Die ältesten Spuren der Cultur in Mitteleuropa. Wien 1886. p. 22.

[44] Názor ten pronesl jsem již roku 1886, porovn. spis předběžně citovaný p. 22.

jak z uvedených nálezů souditi lze, tvrditi, že by pevnina ta byla za období glacialního trvala; rozšíření zástupců zvířeny stepní nebo subarktické, hlavně hlodavců, jak je u Perignany na pozemí toskánském nalézáme a s kterými se alespoň částečně i na půdě korsické a sardinské potkáváme, spíše nasvědčuje tomu, že sardo-italská pevnina nepovstala dříve nežli za období zvířeny stepní.

K náhledu poslednímu vede nás i okolnosť ta, že, jak se ukáže, Korsika a Sardinie za doby diluvialní i s Afrikou spojeny býti musily. Spojení to muselo dlouho trvati, než se na ostrovy Korsiku a Sardinii dostali též tam nyní žijící Lepus timidus, Lepus cuniculus, Mustela Martes, Vulpes vulgaris, Cervus doma a j., kteří diluvialním vrstvám ostrovů těch, jak se zdá, scházejí; s tím souhlasí i *F. Major* (Die Tyrrhenis, Kosmos, VII. Jahrg. 1883, p. 104 a 106).

III.

Tím přicházíme *k otázce třetí, týkající se spojení jižní Evropy s Afrikou.*

Wallace[45] tvrdí, že za doby mladší, nežli pliocenní, Evropa nejméně na dvou místech s Afrikou spojena byla. O tom ovšem pochybovati nelze, příbuznosť nyní žijících druhů zvířecích ve Španělsku a v Marokku, hlavně zvířena africká vložená do diluvia skal gibraltarských[46] a na ostrovech Sicilii a Maltě se vyskytující k tomu dosti důkladně poukazují; jest tu však otázka, kde a za kterého období diluvia spojena byla Evropa s Afrikou? *Wallace* dodává, že spojení to bylo přes Gibraltar a pak přes Sicilii a Maltu. To však současně býti nemohlo, nebo západní část Středozemského moře za doby diluvialní nikdy sladkovodním aneb brakickým jezerem nebyla. Tomu odporují ve vrstvách vyskytující se měkkýši mořští severní části Sicilie a na západním pobřeží italském, jak jsme seznali, a ve vrstvách na půdě východní části moře toho, jak uvidíme; jest tudíž nutno předpokládati, že za doby diluvialní, starší i mladší, obě části Středozemského moře nejen mezi sebou, ale i s otevřeným mořem přímo neb nepřímo souvisely. *Falconer*[47] míní, že messinský průliv tehdáž již byl; z toho následuje, že alespoň západní část Středozemního moře, byla-li úžina gibraltarská tehdy uzavřena, s otevřeným mořem na jiné straně souvisela.

Nežli pokročíme k dalším úvahám o otázce této, velmi záhadné, budiž dříve ještě na několik okolností upozorněno. *Suess*[48] poukazuje k tomu, že Sorex etruscus, výhradně italské zvíře, žije v Alžíru, Chamaeleo africanus v Sicilii a ve Španělích, že většina druhů brouků alžírských nachází se v Sicilii a Sardinii, brouků marokkanských pak ve Španělích; hlemýždi španělského pohoří nacházejí se dle *Forbesa* na vrchách marokkanských, širší odrůda druhu Glau-

---

[45] »Die geographische Verbreitung der Thiere«.

[46] Busk: Quaternary fauna of Gibraltar. Zoolog transact. Vol. X. 1877.

[47] On the foscil remains of Elephas melitensis, ect. Palaeontol. memoirs, Murchison. 1868. Vol. II. p. 295.

[48] E. Suess: Über die einstige Verbindung Nordafrikas mit Südeuropa. Jahrb. der k. k. geolog. Reichsanst. Wien, 1863, p. 26.

dina algira žije v jižní Italii, Sicilii a v Alžíru. Celkem nalézá se mnoho tvarů zvířecích, v Marokku žijících, ve Španělích, v Alžíru žijících pak na Sicilii a Sardinii, méně na pevnině italské. *Suess* poukazuje tu k možnosti komunikace na hřbetu nyní podmořském, táhnoucím se od Sicilie k protilehlým břehům alžírským, a má na základě výzkumů *Laurent*ových a jiných v Sahaře za to, že Sahara za doby glacialní pod vodou byla a že východní část Středozemského moře od zálivu u Gabes přes Saharu spojeno bylo s otevřeným mořem na pobřeží senegambském. Téhož náhledu jsou *Forbes* a *Desor.*[49]

Důležito jest pak tu poukázati též na obšírnou a důkladnou, však málo povšimnutou práci *M. J. R. Bourguignata*,[50] v níž popisuje sluje v pohoří alžírském *Djebel-Thaja*. Uvádí odtud následující zbytky zvířat: Pithecus inuus, čtyry tvary *medvědí*, Felis leo, Felis pardus, Lupulus aureus, Vulpes atlanticus Sus scrofa, Equus caballus, Hystrix cristata, dvě antilopy, jednu gazellu, jednoho skota a šest tvarů ovčích, mezi nimiž mimo Musimon tragelaphus též »Musimon corsicus« = Ovis musimon L. Zvíře toto žije dnes jen na ostrovech Korsice a Sardinii, a snad v okolí Bory de Saint-Vincent ve Španělsku (provincie Mursia); v pohoří africkém Thaja se dnes nenachází; z uvedených tvarů žijí tam dnes jen šakal, Hystrix a prase. *Kosti druhu Musimon corsicanus ve slepenicích diluvialních v okolí Bastie na Korsice jsou dostatečným dokladem, že Korsika a Sardinie s Alžírem souvisely.*

Zřetelem ku veškerým uvedeným nálezům, jejichž poměry mezi sebou však podrobně i dnes ještě známy nejsou, lze sobě vysvětliti spojení jižní Evropy s Afrikou v západní části Středozemského moře za doby diluvialní takto:

Za doby glacialní spojeno bylo Španělsko přes Gibraltar s Afrikou (s Marokkem); dále spojeny byly ostrovy Korsika (od Italie oddělená), Sardinie, Sicilie a Malta s pozemím alžírským *v pevninu korsicko-sicilsko-alžírskou*; východní část Středozemského moře souvisela průlivem messinským se západní části a vlny mořské sáhaly k severnímu pobřeží sicilskému u Palerma; východní část Středozemského moře, pak i přes nynější záliv gabesský, přes Tunis a Saharu spojena byla s Atlantickým oceanem. Tu dostali se diluvialní druhy zvěře severoafrické dílem do Španělska, dílem na Maltu, Sicilii, Sardinii a Korsiku, jakož i naopak; mořské druhy borealních měkkýšů dostaly se průlivem saharským jednak do východní části Středozemského moře, jednak průlivem messinským na severní pobřeží sicilské a západní pobřeží italské. V pozdějším období diluvia, totiž za časů, kdy se zvířena stepní čili subarktická po střední Evropě a dále na jih rozšiřovala, otevřel se průliv gibraltarský jakož i sicilský; Sardinie s Korsikou tvořily pak nejspíše s Italií sardo-italskou pevninu, jejíž poměry jsme již popsali; za to průliv saharský přestal a Sicilie musila alespoň po nějaký čas s Calabrií spojena býti, tím se dostaly některé druhy zvěře dříve alžírské do jižní Italie. Na sklonu pak doby diluvialní, když klesla istro-dalmatská

---

[49] Ovšem že v nejnovější době *Pomel* snaží se pochybovati o náhledu tom. (Bull. soc. geol. 1878. Sér. III. V. III p. 216.)

[50] M. J. R Bourguignat: Histoire du Djebel-Thaja et des ossements fossiles, recueillés dans la grand caverne de la Mosquée. Paris 1870.

pevnina a spojovací část mezi Korsikou a Italií pod hladinu mořskou se snížila, otevřel se opět průliv messinský.

Změny naznačené vysvětlují nejen veškerá dříve uvedená fakta, nýbrž i vysvětlují změny podnebí středoevropského. Ovšem by se mohlo namítnouti, tolik že změn za doby tak poměrně mladé! Avšak uvidíme dále, že dle výzkumů *Fuchsových*,[51] *Neumayrových*, *Howorthových* a jiných ve východní části Středozemského moře a i na severovýchodu evropském za doby diluviální závažnější a dalekosáhlejší změny se sběhly.

IV.

Tím obracíme se *ku změnám, povstalým za doby diluvialní ve východní části Středozemského moře, hlavně v řeckém souostroví.*

Asi před pětačtyřicíti lety vyslovil se *T. Spratt*,[52] že řecké souostroví a východní část Středozemského moře byly za doby pliocenové mořem vnitrozemním zaplaveny. Všeobecný náhled ten byl však modifikován a poměry ty důkladně vyšetřeny a popsány v důležitém pojednání *Neumayrově*[53] o ostrově *Kos* v jižních Sporadech ležícím. Neumayr poukazuje k tomu, že za doby pliocenové bylo území nynějšího Jihoegejského moře na souši pevninou s mnoho jezery, spojenou s Malou Asií, Rhodyží a Kretou. Tomu nasvědčuje množství velkých ssavců diluvialních (hlavně Hippopotamus) na Kretě nalezených, jichž kosti dle zpráv *Rautina* a *Spratta* ve vysoko ležících štěrcích se nacházejí. Živočíši ti nemohli vůči nynějším hydro- a orografickým poměrům na ostrově tom žíti; oni poukazují nejen na spojení ostrova s kontinentem, nýbrž zbytky Hippopotamus i na hojný vývin hydrografický krajin těch za doby diluvia.

Na ostrově Kos vyskytují se pukliny na jihu, jsouť částí velikého lomu, který okolí Cykladů na jihu omezuje; jelikož klesání země podél rozpuklin ostrova Kos hlavně do doby mladšího pliocenu pokládati musíme, tudíž i klesání hlavní, jmenovitě krajin mezi Cyklady a Kretou ležících, za velmi mladé pokládati musíme. Na počátku mladší doby pliocenové, praví Neumayr, nalézáme na východní části Středozemského moře přiblížení se poměrům dnešním; během doby diluvialní vyvinula se pak dnešní poloha zemí tamějších. Důležité změny přihodily se tu i v řeckém souostroví

Pánev jihoegejská klesla současně s trhlinou cykladskou, souvislosť malé Asie, Rhodyže a Krety byla přerušena, moře vniklo do severoegejské kotliny, tuto erosí se rozšiřujíc a Dardanelly se otevřely. Za té samé doby, praví dále Neumayr, staly se i v západní části Středozemského moře důležité změny, *souvislost Sicilie a Malty s Afrikou, která až do doby diluvialní trvala*,

---

[51] Fr. Fuchs: Die Pliocaenablagerungen von Zante u. Corfu. Sitzb. d. k. Akad. der Wiss. B 75. Abth. I. — Das Alter der Tertiärschichten von Malta, daselbst, Bd. 70 Abth. I.

[52] T. Spratt: On the Geology of the southern part of the Gulf of Smyrna and the Promontory of Karabouroun. Quart. Journal of the geolog. society 1845, I. p. 67.

[53] M. Neumayr: Über den geolog. Bau der Insel Kos und über die Gliederung der, jungtertiären Ablagerungen des Archipels. Denkschr. d. k. Acad. d. Wiss. Wien B. XL 1879, pag. 213.

přestala. Ano po severním břehu severozápadní Afriky tehdáž táhnoucí se pohoří *povstáním tu Rudého moře*, které za dřívější doby býti nemohlo, kleslo pod hladinu mořskou. Mládí Isthmu suezského vysvítá, jak *Fuchs*[54] dokazuje, z velmi mladého složení jeho; střed skládá se z usazenin sladkovodních, obsahujících *dnes ještě žijící* Conchylie nilské, severně ležící část vykazuje ještě mladší vrstvy se zvířenou středomořskou a jižní část se zvířenou rudomořskou. Co se týče diluvialních vrstev mořských, nalézáme tu v souostroví egejském jen na jihu a sice na ostrově Rhodyži zbytky borealních měkkýšů; *Fischer*[55] uvádí jich odtud několik, mezi nimi Cyprina Islandica. Důkaz to, že východní část Středozemského moře s velkým Oceanem souvisela. Též z druhých období diluvialních velmi zřídka s vrstvami mořskými v souostroví se potkáváme a tu rozeznávati sluší vrstvy starší ve výšce 500' a mladší ve výšce asi 100'; klesla tudíž hladina mořská mezi nimi o 400'; podobně se to má též u Ficarazzi na ostrově sicilském. I okolnosť tato poukazuje na velkou změnu mezi starším a mladším obdobím diluvialním.

Sledovati tu změny podrobně za jednotlivých období diluvia nelze pro nedostatek nálezů diluvialních. Jen tolik lze souditi, že pánev jihoegejská a trhliny cykladské klesly za mladšího období diluvialního, kdy též souvislosť Afriky se Sicilií přerušena byla.

V.

Obrátíme-li konečně pozornosť svou *na východ a sever*, můžeme i zde velmi zajímavých a velmi důležitých změn za doby diluvia sledovati.

Především dlužno tu poukázati na výsledky geologického badání *Traučolda* z Moskvy[56] v *eluviu* ruském. Dle těch jest hlína, povstalá ledovci, i s balvany bludnými nejmladší útvar severoruské roviny; jest tu hlína ta nejsvrchnější vrstvou. Období glacialní předcházelo tudíž přímo době nynější severního Ruska; když toto podléhalo ještě vlivu glacialnímu, bylo jižní Rusko na polohách »černozemě« pokryto travinami, a tudíž dříve přístupno velkým tlustokožcům a přežvykavcům, nežli Rusko severní. »Diluvium,« praví Traučold, »lze v Rusku jako geologický horizont sotva vymeziti, poněvadž diluvialní zvířena jest tu do *alluvia* uložena a do nejsvrchnější vrstvy *eluvia*, totiž do rozpuštěné, vysládlé půdy, kteráž na místě ležeti zůstala.« Z toho vysvítá, že za velmi dlouhých dob, když v střední Evropě ledovce byly ustoupily a kdy největší část mohutných poglacialních vrstev, skládajících se hlavně z hlíny (Löss), se byla utvořila, severní Rusko ještě v období glacialním trvalo.

Důležitou jest dále práce *Modesta Bogdanowa*[57] hlavně po stránce zoografické, ačkoliv po stránce geologické nedůsledná jest, týkající se ptactva a ssavců

---

[54] Th. Fuchs: Die geolog. Beschaffenheit der Landenge von Suez. Denkschr. der k. Akad. der Wiss Wien, 1877. Vol. XXXVIII

[55] P. Fischer: Paléontologie des terrains tertiaires de l'île Rhodus.

[56] Zeitschrift der deutsch. geolog. Gesellsch. 1879.

[57] Модеста Богданова: Птицы и звѣри черноземной полосы Поволжья и долины средней и нижней Волги. (Біо-географическіе матеріалы). Казань 1871. Též: Quelques mots sur l'histoire de la fauna de la Russie d'Europe. Arch. des Scienc. phys. et nat. Vol. 56. Généve 1876.

v území Volhy a ve střední a dolní části údolí řeky té žijícího. *Bogdanow* především uvádí, že známá jihoruská »černozem« povstala rozkladem pozemních rostlin; mohutnosť její, až 1·8 *m* silná, dokazuje, že útvar ten, nikdy níže nežli 170 *m* se rozkládající, již ku konci doby třetihorní, ne-li dříve, nad hladinou mořskou se nacházel. *Köppen*[58] ovšem míní, že *černozem* pochází z dob meziglacialních, což však s geologickým vývinem krajů oněch nesouhlasí, neboť na půdě balvanů bludných, jakož i v poušti aralo-chvalinské se nenalézá. Nebylyť pak krajiny balvanů bludných, jak se *Bogdanow* domnívá, ještě za mladé doby pod vodou mořskou,[59] nýbrž byly pokryty sněhem a ledovci od severozápadu se táhnoucími až pod hřbet uralo-baltický; výběžky jejich sáhaly i za hřbet ten na jihovýchod, zanechávajíce i zde naznačené balvany. Tající led dodával vodu Volze. Aralo-chvalinská poušť byla pokryta mořem až do středu Asie sáhajícím a do toho Volha odtékala. Jestli *druhá doba* glacialní skutečně byla a dlouho trvala, jak tvrdí mezi jinými hlavně *Penck* a *Bruckner*,[60] pak *alespoň* v Rusku tomu tak nebylo. *Hj. Sjögren*[61] uvádí, že za dob, do kterých se druhá doba glacialní klade, za hřbet uralo-baltický žádný led nesáhal a tudíž i moře aralo-chvalinské dále se nerozšířilo. Podotýkám, že oscillace glacialního období nezdá se býti všude stejná a že snadno jednotlivý lokální objev její může se státi příčinou ku zevšeobecňování neoprávněnému. H. *Keilhack*[62] dokazuje, že pohoří baltické podléhalo *oscillaci* ledovců poměrně velmi dlouho. To však nepoukazuje ještě na dvojí glacialní období, dlouhým časem od sebe oddělené. Osudným stal se omyl *K. Keilhacka* při prozkoumání *rašelinového ložiště* západně od Lauenburku nad Labem se rozkládajícího[63] tím, že tu dokázati se snažil a illustracemi dokazoval náhled o *meziglacialním* stáří ložiště toho Tím hlavně byl náhled o dvojím období glacialním podporován a rozšiřován a přešel pak do všech spisů literatury o diluviu jednajících. Avšak *H. Credner*, *E. Geinitz* a *F. Wahnschaffe*[64] prozkoumali ložiště to znovu a prohlašují: »že rašelinové ložiště lauenburgské jest *poglacialního stáří* a nikoliv meziglacialního, že pak veškeré úsudky zakládající se na meziglacialním stáří ložiště toho žádného významu dále nemají«. Dlužno tu ještě podotknouti, že i geologové vídeňského ústavu ani v Haliči, ani na Moravě, ani v Dolních Rakousích doposavad žádných stop druhého období glacialního nenalezli. Jest tudíž theorie o druhém období a tudíž i o období meziglacialním alespoň na severu velmí pochybná.

---

[58] Holzgewächse des europäischen Russlands II.

[59] Bogdanov drží se ještě staršího náhledu o rozsáhlém moři glacialním, na jehož hladině kry donášely balvany exotické do vzdálených krajů.

[60] Das Klima der Eiszeit. Verhandl. d 73. Jahresvers. d. Schweizer. Naturforscher Ges. in Davos 1890—91.

[61] Hj. Sjögren: Über das diluviale uralo-kaspische Meer und die nordeuropäische Vereisung. Jahrb. d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Wien 1889.

[62] H. Keilhack: Über die Lage der Wasserscheide auf der baltischen Seenplatte Mitth. 1891, Heft 2.

[63] Jahrbuch d. k. preuss. geolog. Landesanst. 1884, p. 211—238.

[64] H. Credner, etc; Ueber das Alter des Torflagers von Lauenburg an der Elbe. N. Jahrb. f. Mineralogie ect. 1889, B. II. p. 194—199.

Bogdanow předpokládá za období glacialního středoevropského na rovinách ruských, tehdáž výše ležících, kontinentální podnebí nejvyššího rázu. *Černozem* tu byla pokryta stepami s jejich charakteristickou zvířenou: Alactaga jaculus, Spermophilus rufescens, Spermophilus guttatus, Aractomys boibac, Lagomys pusillus, Cricetus frumentarius, Otis tarda atd. S geologickými a s palaeontologickými výzkumy, jakož i s fysikálními proměnami srovnává se však více, jak dále shledáme, že hlavní část kontinentálního podnebí, zvláště nejvyšší stupně jeho, s rozmnožováním se zvířeny stepní po střední Evropě padá až za období glacialní středoevropské. Docela mylný jest náhled *Bogdanův*, že žádné zvěře sibiřské do západní Evropy se nedostalo proto prý, že uralské pohoří ledovcem pokryto bylo. Uvádím jako protidůkaz sibiřská zvířata u nás se vyskytující: Myodes torquatus, Myodes lemmus (obensis), Lagomys hyperboreus, Arvicola gregalis, a více jiných tvarů hrabošů, jež jsem byl určil z jeskyň štramberských na Moravě.[65] V pohoří uralském pak, které se svým příkrým pokrajem východním podobá se více přešinutí vrstev s kleslým křídlem východním, nežli pásmu horskému, nepotkáváme žádných stop ledovců, a *Howorth*[66] nedávno dokázal, že pohoří toho za období, když skandinavské hory ledovci pokryty byly a balvany bludné roznášely, *vůbec ještě nebylo.*

Bogdanow dále podotýká, že průběhem kontinentalního podnebí poměry se na rovinách ruských hlavně v *černozemi* částečně pozměnily, že mírnější, vlhké podnebí nastalo a tehdy že se lesy rozšiřovati začaly, tak že listnaté stromoví dostalo se do západních stepí ruských a některé, jako Quercus pedunculata, Tilia europaea, Acer platanoides a j., dostavilo se až k západnímu úpatí uralskému, kdežto jiné, jako Fraxinus excelsior, Carpinus betulus, Quercus ruber, Fagus sylvatica tak daleko nepostoupilo. Zvěř brala se týmž směrem. *Nehring*[67] poznamenává k tomu, že snad by mohlo *Bogdanowem* naznačené období vlhkého podnebí souhlasiti s *druhým* obdobím glacialním. Mělo-li však býti druhé období glacialní středoevropské příznivým rozšiřování se listnatého stromoví, třebas i jen v sousedních krajinách, musilo by býti i první období příznivé tomu, a takových důkazů neshledáváme. Pravdivější bude, že naznačená doba mírnějšího podnebí souvisí s mírnějším a vlhčím podnebím středoevropským dob poglacialních, které sledovaly kontinentálnímu podnebí středoevropskému, kdy se tu lesy rozšiřovati začaly a naše poglacialní zvířena pastvin postupovala před hustými lesy směrem k Uralu.

Lesní vegetace, vykládá *Bogdanow* dále, nemohla na rovinách ruských vytlačiti zcela vegetaci stepní, jak dokazují na *černozemi* roztoucí, step vyznačující rostliny; zvěř tam žijící nebyla s to později proniknouti pouští aralo-chvalinskou do dnešní Rusi. Potom prý pozdvihnul se sever ruský a oblasť aralo-chvalinské pouště, ledovce Uralu roztály a Ural nepřekážel dalšímu postupu zvěře a rostlinstvu sibiřskému na západ; nastoupila prý kolonisace půdy

---

[65] Woldřich: Diluviale Arvicolen aus den Stramberger Höhlen in Mähren. Sitzber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien, I. Abth. Dec.-Heft 1884.

[66] Geological Magazine, October 1890.

[67] Nehring: Die geograph. Verbreitung der Säugethiere in dem Tschernosem-Gebiete. Zeitschrift d. Gesellsch. für Erdkunde. Berlin 1891. B. XVI. Nr. 4. p. 342.

balvanů bludných dílem ze Skandinavie, dílem ze Sibiře a dílem z černozemě a kolonisace oblasti aralo-chvalinské ze zemí okolních. Že se na Rusi za mladých dob diluvialních tektonické změny udály, nelze pochybovati, a že kolonisace naznačená alespoň částečně způsobem uvedeným státi se mohla, může býti možné. Avšak příčina změny té byla docela jiná; hledati ji třeba ve zdvihnutí se Uralu ku konci doby diluvialní, kdy u nás lesy se již rozšířily a diluvialní zvířena lesní v nich zastoupena byla. Mamut a nosorožci byli *před* tím táhli severovýchodně, sledujíce krajiny pahorkovité, kde po travnatých rovinách a pahorcích, dříve rázu stepního, křoví a skupiny lesnaté rostly, až konečně dostaly se tlustokožci opět do Sibiře, aniž jim byl Ural překážel.

Severní část Ruska i Sibiř měly ještě na počátku doby diluvialní svah na jih. *Howorth* soudí z totožnosti dnešní zvířeny ssavců v Sibiři a v západní Americe, že země ty za doby mamutů (předglacialní) byly spojeny a že následkem toho výše ležely; velké řeky západní Sibiře, které dnes tekou k moři arktickému, nuceny byly ubírati se do velkého moře středoasijského; Ob a Jenisej ubíraly se tím samým směrem, jako dnes řeky Ural, Volha a Don. Podotýkám, že skutečně i směr balvanů bludných na území ruském, ze Skandinavie pocházejících, odpovídá domněnce, že severní Rus a Sibiř ležely výše nežli dnes. *Howorth* uvádí dále, že *černozem*, jak se přesvědčil, není původu mořského, nýbrž pozemního; z té okolnosti, že vyskytuje se černozem na obou stranách Uralu, jako že i stejné rostlinstvo a živočišstvo po obou jeho stranách roste, dále i ze směru, jejž sledují uralské zlatonosné vrstvy štěrku a zbytky mamutů, usuzuje, že Ural zvedl se v nejnovější době (totiž ke konci doby diluvialní).

Howorth souhlasí dále s *Murchisonem*, když předpokládá, že nynější svah sibiřského území po vzniknutí Uralu povstal, a že před tím nejspíše ohromná plocha, podobná prériím, od Visly a Karpat více méně na jih se klonící, až k řece Jeniseji se rozkládala; z té pak veškerá voda ubírala se do velkého moře středoasijského, z něhož zbyly toliko: Černé, chvalinské, aralské a balkašské moře. Když Ural se byl vyzdvihnul a tím plocha severní Sibiře naklonila se na sever, velká část vody moře toho hrnula se po nížinách směrem severním, překvapila mamuty a nosorožce, jejich těla pískem a štěrkem pokryla.

Podotýkáme, že s náhledem právě uvedeným souhlasí více okolností jiných. Někteří badatelé, hlavně *Schaaffhausen* (i sám jsem se podobně byl vyslovil), poukazují k tomu, že doba, kdy mamut na severu zahynul, nemůže býti velmi vzdálena; od toho času pak, kdy mamut naznačeným způsobem na severu byl vyhynul, totiž od posledního období diluvialního (u nás), as velmi mnoho tisíců let neuplynulo. Jelikož za těch časů naznačených již člověk v Evropě žil, lze sobě vysvětliti snadno mezi lidem severoruským kolující povídky o neznámých velikánech zvířecích. Pravděpodobno je, že i pověst o velkých povodních spadá do oněch dob.

Jak jsme byli dříve poznamenali, uvádí *Neumayr*, že velká rozsedlina rudomořská, od Suezu až k Adenu sáhající, jest původu *velmi* mladého a že skoro v té době, kdy povstala, zmizelo pohoří severoafrické a klesla jiho-

egejská pánev. Ze všeho dříve uvedeného zdá se vysvítati, že změny tyto staly se současně s vyzdvižením se Uralu.

Zbývá nám ještě pojednati o spojení Černého se Středozemským mořem úžinou Dardanellskou. Uznává se, že za doby starších třetíhor Černé moře se Středozemským souviselo; a že tomu tak ještě za doby sarmatských vrstev nejspíše bylo, poznamenává *Andrussow*;[68] později spojení jmenované přerušeno bylo. Tentýž badatel udává pak dále, jak z výzkumů Černého moře r. 1890 ruskou společností zeměpisnou provedených vysvítá, že ještě za doby čtvrtohor bylo Černé moře brakické, jako jest dnes moře chvalinské a moře to pak teprva za *pozdějších* dob se Středozemním mořem spojeno bylo. Spojení to mohlo se tudíž státi až *na* konci doby diluvialní aneb na počátku doby alluvialní, což s výzkumy zoologickými tamějšími částečně souhlasí. Objevující se na dně Černého moře, počínaje hloubkou 137 *m*, sírovodík v značné hojnosti, jehož přítomnosť ovšem *Andrussow* hnilobě zbytků zvířecích připisuje, pochází nejspíše ze solfatarů podmořských, které se zřetelem na mladé stáří Uralu a na vulkanické horniny východního boku jeho velmi lehko v souhlas uvésti se dají.

VI.

Přehledneme-li zběžně hlavní kontinentalní změny evropské za doby diluvialní, o nichž jsme pojednali, vidíme, že některé z nich jsou dosti správně objasněny a vyloženy, jiné jen pravdě podobně dokázány a že dosti zůstalo nám nesrozumitelných. Změny, o nichž pojednáno bylo, měly se asi takto:

Za období glacialního, kdy Skandinavii a severoněmeckou rovinu, jakož i část střední Evropy ledovce pokrývaly, spojeny byly: Španělsko s Marokkem; Korsika, Sardinie, Sicilie a Malta s Alžírem; východní část tehdy malého Středozemního moře jednak přes Saharu s Oceanem, jednak průlivem messinským se západní částí středomořskou souvisela; Rudého moře a uralského pohoří ještě nebylo; severní Rusko a severní část Sibiře sněhem a ledem pokryty byly, z nichž voda odtékala do rozsáhlého moře středoasijského. Druhého období glacialního alespoň na severu nebylo. Když ledovce ustoupily ze střední Evropy, souvisela rozsáhlá země britská s Francií, dalmatské ostrovy tvořily s Dalmacií rozsáhlou istro-dalmatskou pevninu, též Elba, Korsika a Sardinie nejspíše s Italií sardo-italskou pevninu a Sicilie s Maltou a Italií sicilsko-italskou pevninu; Gibraltar byl otevřený, západní část Středozemního moře souvisela průlivem sicilským s východní částí, poušť saharská povstala, severní část ruská byla ještě pod ledem, středoasijské moře trvalo. Po poměrně dlouhém času otevřel se ku konci doby diluvialní průliv doverský (Calais) a messinský, klesla adriatická pánev, jakož i spojení mezi Korsikou a Italií vzalo za své a pánev jihoegejská a rudomořská rozsedlina se ponořily, Ural dospěl za to své nynější výše, severní Rusko a Sibiř ztratily ledovce a naklonily se k severu, moře středo-

[68] Tiefseeuntersuchungen im Schwarzen Meere im Jahre 1890 durch die russische geogr. Gesellsch. Peterm. geogr. Mitth. 1891. Heft 2.

asijské odteklo a zůstaly zbytky jeho: Černé, chvalinské, aralské a balkašské moře. Na konci doby diluvialní otevřel se konečně i průliv dardanellský.

Že jsme malý brali zřetel na *podnební* poměry balkánských zemí, příčinou jsou nedostatečné výzkumy balkánského poloostrova. I *Neumayr* doznává, že v nejlépe prozkoumaných zemích evropských diluvium jejich dostatečně prozkoumáno není, tím méně jsou studie povšechné, týkající se diluvia Orientu způsobilými, umožniti názor o změnách udavších se v balkánských zemích v dobách, ve kterých tolikrát poměry podnební, rozdělení vod a rozšíření zvířeny a květeny se proměnily.

VII.

Zůstává nám již jen úkol, alespoň všeobecně poukázati na *vliv, jejž měly na poměry středoevropské ony změny uvedené, o jejichž průběhu pochybovati nelze.*

Zde zajímavy jsou pro nás především diluvialní poměry *v Čechách* a v sousedních zemích. Ze spisů mých, týkajících se doby diluvialní vůbec a české zvláště, kde až do toho času o zvěři doby té mimo několik zpráv *A. Fričových, Laubeových* a *Krejčího* velmi málo známo bylo, vysvítá, že jsem název *Nehringův* pro *zvířenu stepní* a název *Liebeův* pro *zvířenu lesní* přijal, že pak rozeznávám v době diluvialní od konce ledovců až ku konci její *čtvero* zvířen, totiž zvířenu *glacialní* čili *arktickou*, zvířenu *stepní* čili subarktickou, zvířenu *pastvin* a zvířenu *lesní* Pokusil jsem se na základě nálezu sudslavického a na základě nálezů jiných, hlavně *Nehringových* a *Liebeových* a na základě obšírné literatury dokázati, že za doby poglacialní na *místech* ledovci opuštěných zvířeně glacialní mohla jen sledovati zvířena stepní, pak zvířena pastevní a po této zvířena lesní, která po vymření lva a druhých větších koček v krajích našich zakončuje dobu diluvialní a vede nás do doby alluvialní se zvířenou lesní podiluvialní. Poukázal jsem dále k tomu, že skutečně žily nedaleko sebe současně zvířena glacialní a stepní, zvířena stepní a pastevní, zvířena pastevní a lesní, a doložil jsem náhled svůj doklady o nálezech smíšených zvířen takových.

Ve článku »O svištích diluvialních hlin v Čechách«, který nepovažuji za úplný, poněvadž není brán v něm ohled na veškeré do té doby uveřejněné práce týkající se zvířete toho v Čechách nalezeného, uvádí *Kafka*,[69] že v okolí pražském vyskytuje se v nejhlubších vrstvách hlíny diluvialní zvířena pastevní a glacialní, a sice napřed mamut, nosorožec a dravci, na to že sleduje zvířena lesní a nad tou pak zvířena stepní, nejmladší. Známo jest mi sice, že tu podzemní roury sviští sáhají až pod ornici, jako tomu je u Ústí nad Labem a zejména i u Hostomic blíže Teplic;[70] že by však sáhaly zbytky tarbíka stepního (Alactaga jaculus) do vrstev nad zbytky zvířeny lesní, o tom dovoluji si silně pochybovati. *Kafka* soudí, že po zvířeně stepní v Čechách

[69] Kafka: Die diluvialen Murmelthiere in Böhmen Sitzb. d. k. böhm Ges. d. Wiss. Prag, 8. März 1889.

[70] Woldřich: Steppenfauna bei Aussig in Böhmen. Verhandl. d. k. k geolog. Reichsanstalt. Wien 1888. Nr. 4, pag. 108.

sledovala zvířena lesní, že jí předcházeli tlustokožci a že jest vůbec nejmladší zvířenou diluvialní. Náhledu Kafkovu odporuje nález *sudslavický* mnou přesně popsaný[71] z rozsedliny I., obsahující smíšenou zvířenu glacialní a stepní, a z rozsedliny II., obsahující smíšenou zvířenu pastevní a lesní. I namáhá se badatel vysvětliti to jinak, aniž by jen jeden ze spisů mých, týkajících se nálezu sudslavického, jak odborníky uznáno, nejdůležitějšího v Evropě, byl uvedl! Uznává sice mlčky čtyry mnou do vědy uvedené zvířeny diluviální, nahoře naznačené, ne však postup jejich. Míní totiž, že obě rozsedliny sudslavické trvaly současně a docela nepravidelně vyplněny byly buď střídavě, buď současně. Zvířena stepní do rozsedliny I. tenkráte prý se dostala, když již rozsedlina II. zvířenou pastevní naplněna byla a zbytky zvířeny lesní se v ní nashromažďovaly. Vysvětlení to odpovídá ovšem náhledu *Kafkovu*, nahoře uvedenému, výborně, ale má tu chybu, že jest neuvěřitelno. Dle vysvětlení badatele toho byla by se musila napřed rozsedlina I. naplniti zvířenou glacialní, na to vyplnila se rozsedlina II. zvěří pastvin (mezi tím musila tudíž býti rozsedlina I. uzavřena aneb něčím pokryta, aby se do ní zbytky zvěře pastevní nedostaly), pak se naplnila rozsedlina I. zvěří stepní (do rozsedliny II. se však dostati nesměla) a současně s ní neb dříve naplnila se rozsedlina II. zvířenou lesní! Z mých zpráv vysvítá, že v rozsedlině I. zbytky zvěře glacialní nebyly *dole* uloženy a zbytky zvířeny stepní *nahoře*, nýbrž že byly promíchány; pak vykazují veškeré kosti rozsedliny I. rozhodně větší geologické stáří, nežli kosti rozsedliny II., což odborníku na první pohled poznati lze. Mám za to, že bylo by zbytečno dále se s vysvětlením *Kafkovým*, týkajícím se nálezu sudslavického, zabývati a poukazuji na odůvodněné své vysvětlení jednoduchého a přirozeného postupu ve spisech mých obsaženého.

Badatel ten uvádí pak následující výrok (p. 206): »Můžeme s úplnou určitostí tvrditi, že nedlouho po glacialní době, kdy kraje naše skýtaly obraz parku podobný, kde lesů přibývalo a několik území tundrám podobných se tu nalézalo, dostali se sem nosorožec a mamut s druhými representanty zvířeny pastvin, s velkými dravci a s člověkem, a že *potom* také zvířena stepní od východu se sem dostavila; protož mezi tím poměry podnebí a půdy se byly změnily a zatím mezi většími lesy skutečné stepní území povstalo.« Neznám příkladů a důkazů, že by na půdě od ledovců opuštěné napřed prospívaly traviny, parky a lesy a po nich sledovala step. Pravý opak dokázal známý botanik *Engler*,[72] totiž že u nás po květeně glacialní sledovala květena stepní, pak teprve rozmohly se v údolích poříčních traviny, drn tvořící, a skupiny křů a lesního stromoví, šíříce se *potom* po stepích dále; po travinách (a parcích) následovaly lesy. S tím souhlasí úplně i výzkumy *Bogdanowa* ve stepích volžských, jak jsme nahoře poznali.

---

[71] Woldřich: Diluviale Fauna von Zuglawitz in Böhmerwalde. Sitzb. d. k. Akademie d. Wiss. Wien, I. Ber. B. LXXXII 1880; II. Ber. B. LXXXIV, 1881; III. Ber. B. LXXXVIII. 1883. — Diluvialní fauna u Sudslavic. Zpr. zased. kr. české společ. nauk. Praha, I zpr. 1880; II. zpr. 1881; III. zpr. 1883.

[72] Engler: Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Pflanzenwelt seit der Tertiärperiode. Leipzig 1879.

Pozoruhodnějším zdá se mi býti co do obsahu výrok ***Kafkův*** (na str. 206), jenž zní: »*Woldřich* soudí *z nálezu sudslavického*, že zvířena stepní tak zvané zvířeně pastevní, totiž velké zvěři tlustokožné předcházela, čemuž úplně odporují ve skutečnosti pravidelně utvořené vrstvy hlíny v okolí pražském.« K tomu jest mi především podotknouti, že badatel ten spisy mé jen velmi zběžně čísti musil, jinak by se byl dočetl, co kolikráte opakuji a zvláště ve spisech »O diluvialní zvířeně středoevropské«[73] a »O diluvialní evropsko-severoasijské zvířeně ssavců«[74] uvádím, totiž že nejen na základě nálezu sudslavického, nýbrž i na základě rozsáhlých studií, týkajících se různých nálezů evropských, náhled svůj jsem pronesl, a že dále poukazuji k tomu, jak zástupci severní prazvířeny *před* ledem, jižním směrem postupujícím, na jih a jihozápad se ubírali, a že to hlavně byla zvěř větší, pohyblivější, která začala se stěhovati, jako mamut a nosorožec, obrové to zvířeny pastvin; uvádím, že zvířata ta k nám dostala se dříve nežli zvířena glaciální. O zvířeně této předglacialní jsem však ještě podrobně nepojednával. Že by pak na půdě od ledovců zanechané, totiž na holé půdě beze prsti, na štěrku, na písku a na hlíně byly se ujmuly traviny a parky a v těchto ihned se usadila zvířena pastvin, to je přece rozhodnou nemožností. Uvedl jsem již, že *Engler* dokazuje tu dříve rostliny stepní, mezi které dostala se, jak míním, na rozsáhlé »černozemi« vyvinutá zvířena stepní; když pak u nás na pokrajích stepní půdy traviny a křoví se uchytily a počala tu vegetace parku podobná, mohli teprve velcí bejložrouti se zde rozšiřovati, kteří zatím na jihu neb v krajinách před ledovci chráněných se zdržovali; toť jest má *zvířena pastvin* poglacialní, jejíž zbytky nalézáme v hlinách, o nichž dokázáno jest, že jsou poglacialní. Že pak zbytky *typické zvířeny stepní* zachovaly se a žijí v našich krajích porůznu až podnes, jako na př. u Felixdorfu a u Oberweidenu v D. Rakousích přímo na písku a štěrku *staršího* diluvia, kdežto nedaleko Oberweidenu uložená hlína (Löss) se zbytky mamuta od všech geologů dávno za *mladší* uznána jest, *dokázal* jsem v jednom ze spisů svých.[75] Že dále jednotliví zástupcové diluvialní zvířeny stepní, jako Spermophilus a Cricetus, zachovali se až po dnes ve střední Evropě, jest známo.

Co se tudíž týče geologických poměrů nálezů okolí pražského, mají-li se tak, jak je *Kafka* udává, tu možným se mi zdá jen dvoje vysvětlení: buď spodní vrstvy se zvířenou pastvin jsou předglacialní a nejmladší část poglacialní tu schází, anebo svišť stepní (Arctomys primigenius Kaup čili Arctomys bobac Schreb., jak *Kafka* uznává) se tu zachoval až do konce doby diluvialní; saháť zvíře to ještě dnešního dne od Uralu na západ až po Dněpr a do jihovýchodních krajin starého království Polského.

---

[73] Woldřich: Die diluvialen Faunen Mitteleuropas und eine heutige Steppenfauna in Niederösterreich. Mitth. d. Anthrop. Ges. Wien B. XI. Heft 3 u. 4, 1882.

[74] Woldřich: Diluv. europäisch-nordasiatische Säugethierfauna, auf Grundlage hinterl. Manuscripte. F. J. Brandt's. Mém. de l'Acad. Imp. d. scienc. St. Petersbourg 1887, T XXXV. p. 11.

[75] Woldřich: Die diluv. Faunen Mitteleuropas. Mitth. d. Anthrop. Ges. B. XI. 1882

Jak vidno, bude tu ještě podrobného badání dalšího třeba, než se otázka tato definitivně rozřeší. Že však by *zvířena stepní*, která vyžaduje *kontinentalního podnebí*, u nás až na *konci doby diluvialní* snad současně se zvířenou lesní, byla žila, tomu odporují zkušenosti, jež nám ne snad poměry jednoho, k tomu třeba ještě nedostatečně prozkoumaného naleziště, nýbrž veškeré geologické, palæontologické a zoogeografické výzkumy vykazují. Naopak *Nehring* v nejnovějších publikacích svých[76] přichyluje se k náhledu, položiti zvířenu stepní středoevropskou až do *doby meziglacialní*.

Ať již zvířena tato, o jejíž existenci ve střední Evropě na základě výzkumů tak četných, hlavně *Nehringových, Liebeových* a *mých*, pochybovati nelze, žila u nás hned na konci a po období glacialním, jak dosavade za to mám, aneb po hlavním období glacialním, jisto jest, že nabyla největšího rozšíření za období, kdy kontinent evropský největší rozsáhlosti se těšil, kde tudíž balkánské, jakož i britské země rozsáhlejší byly, kde istro-dalmatská a nejspíše i sardo-italská a sicilo-italská pevnina existovaly. *Tato rozsáhlosť kontinentu evropského, kterou, jak jsme poznali, hned po glacialním období předpokládati můžeme, vysvětluje pak s dostatek bytosť kontinentalního podnebí evropského a tím existenci zvířeny stepní u nás.*

S tím souvisí ještě otázky jiné, neméně důležité. Mezi sudslavickými hlemýždi rozsedliny I. nalézá se též druh Hyalina hydatina Rossm. i Hyalina pseudohydatina Bourguigt. Hlemýžď ten žije dnes ve Španělsku, v Italii, v Dalmacii a sáhá jeho oblasť až ku Korfu, pak až ku Smyrně v Malé Asii. Zajímavou okolností jest tu, že druh ten i v slepencích na ostrově *Korsice* se vyskytnul; *A. Locard*[77] uvádí ho pod názvem Helix hydatina Férussac = Helix hydatina Rossm. = Hyalina hydatina Rossm.[78] Poukazuje tudíž hlemýžď tento na souvislosť zvířeny české se zvířenou jižní. Vedle hlemýždě Hyalina hydatina Rossm. žil pak na Korsice, jak Locard udává, i Helix vermiculata Müller, též druh jihoevropský, ten nachází se také mezi hlemýždi diluvialními, jež nalezl *Neumayr* u *Amphissy* v Řecku a jež popisuje *V. Hilber*.[79] Poukazuje i tato okolnosť na souvislosť jižních částí kontinentu evropského a svědčí pro velmi *dlouhou dobu poglaciální*, v níž se hlemýždi jmenovaní rozšířiti mohli po tak daleko od sebe vzdálených zemích. Pro dlouhou dobu tuto svědčí i vodopád v parku *yellowstonském* v severní Americe, který za poglacialní doby délky 60 *m* dosáhnul! Jen doba taková způsobilá je vysvětliti značnou mohutnosť ložisk písků, štěrků a hlavně hlin poglacialních, ať již původu vzdušného, jak *Richthofen*[80]

---

[76] A. Nehring: Tundren u Steppen. Berlin 1890. — Verbreitung der Säugethiere in dem Tschernosem-Gebiete. Berlin 1891.

[77] A. Locard: Note sur les bréches osseuses d. env. de Bastia. Arch. de Museums d'Hist. nat. de Lyon, 1873 p. 9

[78] S. Clessin: Molluskenfauna Österreichs-Ungarns u. der Schweiz. Nürnberg 1887.

[79] V. Hilber: Diluviale Landschnecken aus Griechenland. Denkschrift d. k. Akad. der Wiss. XL. 1879.

[80] Richhofen: China, I. Berlin 1877.

poučuje, neb eluvialního, jak *Traučold*[81] udává, neb vodního, jak *Jentzsch* tvrdí, aneb vzdušnovodního (aërohydatiného), jak sám se domnívám.[82]

Mnoho práce bude ještě třeba, než hlíny tyto, diluvialní zvířeny obsahující, jakož i hlíny glacialní a předglacialní budou důkladně prozkoumány a mezi sebou jakož i s hlinami všech končin porovnány, než bude poměr zvířen jednotlivých období diluvialních podrobně vypozorován a stanoven. Na základě dnešních výzkumů o diluviu a jeho *zvířeně* jsou úsudky pravděpodobnosti možny a o těchto jen málo kdy »s úplnou určitostí« mluviti nám lze.

Objasniti stanovisko geologického badání moderního o diluviu, poukázat na změny tektonické a klimatické, udavší se za doby diluvialní, stanoviti poměr zvířen ku fysikalním změnám tehdejší pevniny a přispěti k dalšímu řešení záhadných otázek o době této, jsou pohnutky, které mne nutily sepsati práci předloženou.

---

[81] Traučold: Zeitschr. der deutsch geolog. Ges. 1879.

[82] Woldřich: Beiträge zur Geschichte des fossilen Hundes nebst Bemerkungen über die Lössbildung. Mitth. der Anthrop. Gesellsch. Wien B. XI 1881.

PŘEHLED.

Strana

Předmluva, týkající se změn kontinentalních na severozápadu evropskem 3
Otázka o istrodalmatské pevnině 3
Otázka o sardoitalské pevnině 8
Otázka o spojení jižní Evropy s Afrikou 13
Změny ve východním Středozemském moři 15
Změny na východu a severu evropském 16
Přehled změn 20
Vliv změn kontinentalních na střední Evropu 21

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 15.

O VZTAZÍCH RUDISTŮ K OSTATNÍM MLŽŮM.

PODÁVÁ

DR. **FILIP POČTA.**

PŘEDLOŽENO DNE 13. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Ve svém pojednání »O rudistech, vymřelé čeledi mlžů z českého křídového útvaru«* dotkl jsem se již některých bodů, které zdály se mi býti důležitými ku přirovnání této čeledi s ostatními mlži. Odvažuji-li se názory tehdy naznačené dále prováděti, činím to jednak z té příčiny, že mám za příhodnější myšlénky takové snésti ve článek samostatný, v němž odpadá popis jednotlivých tvarů, jednak i proto, že od té doby vyskytly se následkem nových vědomostí o rudistech cizích nové zkušenosti, názory i otázky, o nichž zde míním ve stručnosti pojednati.

Jest ovšem zřejmo, že jest nazírání na celou třídu mlžů se stanoviska jediného, na základě poznatků, jichž dobyli jsme v jediné čeledi vymřelé, jednostranným a že změní se snad dosti značně, změní-li se základ jeho.

Tu však zdá se mi býti čeleď rudistů v té příčině tak důležitou a pro podobná přirovnání tak příhodnou, že odvažuji se poukázati na vztahy tyto, byť by i později třeba bylo opraviti některé z uvedených myšlének.

V rozpravě své míním se dotknouti hlavně šesti bodů, jež jsou:

1. Nestejnosť misek.
2. Tloušťka misek.
3. Skladba stěny skořápkové.
4. Otisky svalové.
5. Zámek.
6. Předkové rudistů.

V odstavcích těch pojednám ve stručnosti o znacích rudistů a o poměru, v jakém jsou v tom směru ke znakům ostatních mlžů.

1. Nestejnosť misek.

Tělo mlžů jest souměrné dle plochy vedené středem a procházející mezi oběma miskami. Následkem toho i misky u tvarů úplně pravidelných jsou sobě opačně stejné, to jest jedna rovná se obrazu v zrcadle misky druhé. Stejností misek vyznačuje se většina zkamenělých i žijících mlžů a zvláště nejstarší zástupci třídy této velkou většinou honosí se stejností misek. Ano u těchto nejstarších mlžů nalézáme stejnosť misek i v případech těch, když misky samy jsou velice nestejnostranné a když posunutím vrchole v jistý směr aneb zvláštním naduřením jistých míst misky nabyly tvaru nepravidelného. Dobrým příkladem pro takový podivný tvar jsou nám rody Dualina a Antipleura z českého silur-

* Pojednání král. české společnosti nauk VII. řada 3. sv. 1889.

ského útvaru. Přímka spojující dvě nejvíce vyklenutá místa na obou skořápkách zove se, jak známo, tloušťkou a stojí u velké většiny mlžů kolmo na miskách. Při uvedených dvou rodech není však přímka ta postavena kolmo, nýbrž šikmo, a tvoří buď napřed aneb do zadu s miskou ostrý uhel. Rod Leda, který z mlžů jest nejstarší a který má hlavní své rozšíření ve druhé zvířeně silurské dle Barrandea, jest podobně jako ostatní starší silurské rody Modiolopsis, Nucula, Synek a j. stejnomiskatý; avšak záhy poměrně vyskytují se již některé druhy rodu Avicula se skořápkami sobě nestejnými.

O původu nestejnosti misek byly náhledy rozličné a jeden nikoli z nejposlednějších byl ten, že z příčiny neznámé jedna polovina těla zvířecího mohutněla a že následkem toho i miska tuto polovinu kryjící počala se více klenouti. Vysvětlení toto ovšem není správné, poněvadž nelze pochopiti příčinu, proč by jedna polovina těla, tudíž jedna polovina všech ústrojů pojednou rostla v míře větší než polovina druhá a mimo to nikterak nezakládá se na zkušenostech dobytých při zkoumání těla nynějších mlžů.

Nestejnosť misek tvoří u čeledi rudistů znak velmi vyznačný a lze tu, dle mého zdání, nejlépe dokázati původ růstu jedné misky na úkor druhé.

Nejstarším zástupcem rudistů jest nade vši pochybnosť rod Diceras, který pochází, jak později uvedeno bude, z rodu Megalodon, úplně stejnomiskatého. Ač rod Diceras má svrchní skořápku vždy menší zpodní, přece nejsou rozdíly ty tak značné, abychom nemohli za typ rodu toho považovati tvar s miskami úplně stejnými, nehledě ani ku příbuznosti jeho s rodem Megalodon. U některých jedinců hojného druhu Diceras arietinum pozorujeme misku levou zcela obdobně tvořenou, jako miska pravá jest, a jen o málo menší. Tíže skořápek u rudistů většinou velice značná, způsob potravy a pak také i mocný pohyb vln mořských byly příčinou, že původně stejnomiskatý tvar ten přirůstal vrcholem jedné skořápky ke dnu mořskému, aneb ke skále pobřežní. Rod Diceras neměl ještě zákona ustáleného, kterou miskou přisedati, nýbrž přirůstal tu pravou, tu levou a tato okolnosť zřejmě svědčí tomu, že stejnosť misek byla původní a jaksi v plánu rodu toho. Utkvěním jedné skořápky tíhlo tělo zvířete do skořápky zpodní a pohyb misek omezil se úplně na misku svrchní. Kdežto otevírání dělo se původně pohybem podobným otevírání knihy, mohl nyní proud vodní s potravou vniknouti k tělu nejlépe tehdy, když svrchní miska byla vyzvednuta do výše. Následkem toho tedy, že tělo zvířecí již tíhou svou skořápku svrchní opouštělo a ve zpodní se ukládalo, stávala se svrchní skořápka menší a opustivši původní svou úlohu, chrániti celou polovinu zvířete před vlivy zevnějšími, přejímala čím dále tím více během rozvoje úkol pouhého víčka.

A tento zde ve stručnosti načrtnutý pochod zobrazen jest zúplna ve vývoji rudistů, pokud se týče vnějšího tvaru misek a jím jen lze, dle mého mínění, vysvětliti nestejnosť misek u mlžů. Za typ mlže možno proto považovati měkkýše se dvěma úplně stejnými miskami a máme v tom ohledu obdobu také u ramenonožců, mezi které patří, jak známo, nejstarší zkameněliny vůbec. Dokud tato zvířata měkkýšovitá byla volná, aneb přisedala stvolem, jsou úplně

stejnomiskatá, anebo aspoň nejsou rozdíly mezi oběma miskami veliké, přirůstala-li však skořápkou, nastaly značnější rozdíly ve velikosti obou skořápek, které zároveň s rozlišným uložením těla daly podnět ku rozeznávání misky břišní a hřbetní.

Pochod hořeji vypsaný lze velice dobře u rudistů pozorovati. Rod Diceras, nejstarší zástupce čeledi této, má misky, jak již bylo pověděno, poměrně málo nestejné; u některých, a to zvláště mladších tvarů, jsou již rozdíly mezi oběma miskami dosti značné. Tak rod Toucasia z urgonien, který zdá se býti přímým potomkem rodu Diceras sensu strictiore, má nestejnosť misek již značně vyvinutou. Podrod Heterodiceras se svými potomky rody Requienia a Matheronia rovněž jest již dosti nestejnomiskatý. U oddělení tvarů s uspořádáním zvráceným dosahují pak rozdíly obou skořápek nejvyššího stupně. Jsou to hlavně rody Caprotina, Polyconites, Radiolites, Biradiolites a Hippurites. U posléze vytčeného rodu jest nepoměr obou skořápek tak značný, že měří-li zpodní skořápka velikého druhu jednoho v délce 40 *cm*, jest svrchní víčkovitá miska pouze 3—5 *cm* vysoká.

Jsou ovšem některé žijící tvary, které plují volně v moři a přece se vyznačují nestejností misek, jako na př. některé druhy rodu Pecten; u těch můžeme předpokládati, buď že dříve přirůstaly, aneb že plovouce měly stále jednu a touž misku dolů obrácenou, tak že se opakoval pochod, který jsme vylíčili u druhů s miskami přirostlými.

2. Tloušťka misek.

Domněnka, že tloušťka misek u mlžů, jakož mocnosť zevnějšího příkryvu u mořských živočichů vůbec jest v obráceném poměru s hloubkou moře, uznává se nyní všeobecně a nalézáme pro ni čím dále tím zřejmějších dokladů. Ve velikých hlubinách, kde panuje klid a není žádných proudů a vírů vodních, netřeba zvířeti misek tlustých, avšak v mělčinách, blíže u břehu, kde vlny mocně na břeh narážejíce nesčetné množství zbytků živočišných s sebou unášejí a kde tedy pohyb vody vůbec jest mocnějším, jest zapotřebí pevných, ochranných přikrývek pro útlé tělo mlžové. Nejstarší zástupci mlžů mají misky nad obyčej tenké a následkem toho i svaly, které těmito jemnými miskami pohybují, jsou slabé a zanechávají jen velice nepatrné otisky po sobě. Obě tyto okolnosti nasvědčují tomu, že staré usazeniny, jako na př. náš silurský útvar, povstaly z moře poměrně hlubokého a klidného.

Jinak se to má u tvarů, které žily na stanovišti pobřežním. Ony mají misky tlusté, velmi pevné a obyčejně ke dnu přirostlé. Takovými miskami vyznačují se přede všemi jinými hlavně rudisté. U nich dosáhl vývoj stěny skořápkové a to hlavně v misce zpodní stupně takového, že vzhledem k mohutnosti stěny možno nazvati místo určené pro zvíře nepatrným. Je-li na př. průměr obústí některého druhu rodu Diceras as 7 *cm*, tu připadají z něho ani necelé 3 *cm* na dutinu pro zvíře a více jak 2 *cm* po každé straně na stěnu skořápkovou. A podobný poměr jeví se i u ostatních rodů a jen snad některé menší rody, jako Simacia, Gyropleura a j. mají skořápky poměrně tenčí, ježto

nemohl na jejich nepatrný vnější povrch náraz vln tak mocně působiti jako na druhy veliké. U rodu Hippurites a Ichthyosarcolithes setkáváme se se zvláštním zjevem, který rovněž nám dosvědčuje, že rody ty měly nutně zapotřebí pevných schránek. Zvíře vytvořovalo si totiž během růstu čas od času na zpodu skořápky zpodní zvláštní příčky, kterými přebytečný prostor pod sebou oddělovalo, tak že povstaly dutiny, které nazvány byly v němčině před léty komorami vodními (Wasserkammern). Jest zde obdobný pochod, jaký nalézáme u hlavonožců, ač rozdíl mezi oběma těmito třídami měkkýšovými jest v tom ohledu patrný, neboť skořápce nautilové dodávají vzduchové komůrky nadobyčejné lehkosti, kdežto zdají se sloužiti obdobná opatření u rudistů ku rozmnožení pevnosti a mohutnosti skořápky.

Dále ovšem není u rudistů sifo vyvinuto a komůrky samy nejsou pravidelné, nýbrž v odstavcích nestejných a často šikmě položené.

Zdali zvíře přidržovalo se jen pláštěm svým aneb jiným nějakým zvláštním způsobem (jako připínací páska u hlavonožců) na zpodu dutiny, není známo a nelze nalézti ve skořápkách nijakých stop, jež by v té příčině nám podávaly o tom zprávy.

Samo přidržování svaly, zdá se, že by u rudistů nebylo dostačilo, neboť svaly byly poměrně krátké a omezené téměř na obústí skořápky, kdežto tělo zvířecí šinulo se jaksi pochodem nahoře líčeným doleji pod plochu, ve které svaly působily.

U rodu Ichthyosarcolithes pozorovány i také na našich českých druzích podobné, často dosti pravidelné příčky; než bohužel jest stav, v jakém se nám zbytky tohoto rodu zachovaly, tak nepříznivý, že nelze odvážiti se bližšího vysvětlení.

Byly-li komory ty vzduchem neb vodou naplněny, nelze rovněž nyní již zjistiti.

Ve skořápkách hippuritů bývají komory nyní zachovány tím způsobem, že obyčejně krystaly čistého vápence pokrývají jejich stěny, kdežto uvnitř rozkládá se tmavší nekrystalisovaná hmota, která vnikla do vnitř bezpochyby infiltrací.

U rodu s miskami velice tlustými setkáváme se se zvláštním zjevem, totiž s jednoduchými chodbami aneb i také s celou soustavou chodeb takových ve stěnách skořápky, o nichž později bude blíže mluveno.

Účel zařízení toho zdá se býti patrný a jest ten, malými prostředky vytvořiti pokud možno misku tlustou a silnou, která, zvláště jedná-li se o skořápku svrchní, mimo to musí býti také ještě lehkou, aby mohla býti svaly snadno nadzdvihována.

3. Skladba stěny skořápkové.

Skořápka u rudistů složena jest podobně jako u jiných mlžů ze dvou vrstev obyčejně zřetelně od sebe oddělených. Vnitřní vrstva jest perleťová a složená z jemných lístků k sobě přidružených a vnější skládá se z hranolků

hustě k sobě seřaděných. U ostatních mlžů jsou postaveny tyto hranolky kolmo na vnitřní perleťovou vrstvu, u rudistů stojí na ni šikmo, ano, ač zřídka, jsou uloženy s vnitřní lístkovitou vrstvou rovnoběžně.*

Skladba stěny skořápkové jest však u rozličných druhů a rodů rudistových rozličná a přichází někdy ve tvarech, které nelze si ničím vysvětliti. Rod Hippurites, který vysokým svým vývojem může býti považován za velice pokročilý typ rudistový, má, zvláště v některých druzích, ústrojnosť stěny skořápkové dosti pravidelnou, tak že velice se podobá v tom ohledu recentním druhům rodu Chama, ač ovšem směr jeho hranolků ve vnější vrstvě skořápkové jest šikmý na misku. U rodu Radiolites jest však skladba skořápkové stěny podivuhodná, nemající nikde obdoby. Zde dosahují totiž tyto hranolky značných rozměrů, jsou duté a vodorovnými příčkami rozdělené, tak že tvoří tkaň buničině podobnou, která snad za živa organickou látkou byla vyplněna. Byl také náhled, že hranolky tyto nejsou ničím jiným než zjevem mineralogickým při processu fossilisačním, ježto vůbec skořápky mlžů vykazují, pokud se chemického složení týče, zajímavé rozdíly; než domněnce této nelze víry přiložiti, poněvadž nalézáme hranolky u uvedeného rodu při všech dosud pozorovaných způsobech zkamenění. Vůbec zdá se, že skladba skořápek mlžových není dosud definitivně prozpytována, vzdor mnohým pracím a zvláště krásné a základní publikaci Carpenterově.** Tak nalezl pisatel těchto řádků u některých druhů rodu Pectunculus z třetihorní vídeňské pánve vnější vrstvu skořápkovou zvláštním způsobem uspořádanou. Byla v paprskovitě seřaděné proužky rozdělená a v těchto proužcích klonily se jednotlivé hranolky šikmo k sobě a nestály tudíž kolmo na vnitřní perleťové vrstvě.

Jiný zjev dosud pouze u rudistů pozorovaný jsou chodby ve stěně skořápkové. Chodby ty probíhají ve vnější vrstvě stěny skořápkové, jsou různého tvaru a počtu a nalézají se buď jen ve skořápce svrchní aneb ve skořápce svrchní i zpodní.

Pokud se týče chodeb ve skořápkách svrchních, tu nalézáme nejpravidelnější uspořádání u rodu Hippurites. Svrchní skořápka rodu toho jest víčkovitá, dosti souměrná, s vrcholem téměř ve středu; od tohoto vrcholu probíhají chodby rourovité tu i tam se rozdvojující a po obou stranách slepě končící k obvodu. Typ tento jest nejpravidelnější, ovšem ale již jaksi pokročilý stupeň, který již jest i pravidelností víčkovité skořápky podmíněn. Neboť není-li vrchol uprostřed misky, nýbrž silně mimostředný, až snad přímo na obvodu skořápky, tu nelze se ovšem nadíti takové pravidelnosti. Obdobnou pravidelnosť pozorujeme v rodu Polyconites, který ve svrchní skořápce chová 4 až 6 chodeb, které jedním směrem míří ku vrcholu, druhým pak rozestaveny jsou po obvodu misky.

* Jest tedy mylné tvrzení, které ve všech příručních knihách všeobecné palaeontologie čísti možno, jako by hranolky u rudistů *vždy* stály rovnoběžně ku vnitřní lístkovité vrstvě.

** Reports of the british Associaticn for the advancement of sciences. 1843 str. 71, 1844 str. 1 a 1817 str. 93.

Počátek chodeb ve svrchní misce pozorujeme u rodu Stenopleura, kde od dutiny pro zvíře určené táhne se krátká a dosti objemná roura k vrcholu. Tento počátek, chodba pod vrcholem slepě končící a v dutině pro zvíře vnitřní perleťovou vrstvou uzavřená, vyskytuje se jen ještě u rodu Caprotina z našeho křidového útvaru. U rodu posléze jmenovaného přistupuje ještě 4 až 5 chodeb obloukovitě zahnutých, které berou počátek svůj na patě zubu zadního a násadce svalového a rovněž směřují k vrcholu a před ním slepě končí. U druhů z francouzského křidového útvaru nalezeny dosud pouze chodby 2.

Rod Bayleia, který možno považovati za větev, jež daleko odloučila se od hlavního kmene rudistů, má ve svrchní skořápce 2 až 3 objemné chodby.

Rody Caprina a Plagioptychus mají stěnu svrchní skořápky jaksi složenou ze dvou listů, které mezi sebou spojeny jsou nesčíslnými kolmými lištami, čili chodby ve stěně skořápkové jsou sobě téměř stejné a tak hustě vedle sebe položené, že příčky mezi jednotlivými chodbami jsou velice úzké. Největšího vývoje v tom směru dosáhl rod Caprinula, jehož průřez hoření skořápkou nabývá rázu bublinatého pro nesčetné množství chodeb k sobě hustě seřaděných. Podobný pochod jako u misky svrchní můžeme pozorovati u skořápky zpodní. První počátek chodby na zpodní skořápce možno nalézti na problematickém rodu Cryptaulia z českého křidového útvaru. Rod ten podobá se vnějškem rodu Caprotina a má ve vnější vrstvě podél rýhy svazové jednu až dvě chodby, za kterými ještě 2 až 3 záhyby v podobě zvlnění stěny skořápkové leží. U rodu Caprina jest ve zpodní skořápce řada otevřených chodeb pod zadním svalovým otiskem a pak u předního otisku svalového 2 až 3 objemnější chodby. Největšího stupně dosahuje vývoj chodeb i pokud se zpodní skořápky týče u rodu Caprinula, u něhož vnější vrstva na zpodní misce skládá se vůbec ze samých chodbiček.

Tuto řadu stále hojnějších a hustších chodeb ukončuje pak rod Radiolites, jehož obě skořápky složeny jsou z mřížoviny, jak o ní bylo již mluveno.

Chodby ve svrchních miskách možno vysvětliti nutnou lehkostí těchto víček, aby mohly svaly snadno býti nadzdvihovány. Nesnadněji jest však vysvětliti chodby ve skořápkách zpodních. Jediný rozumný důvod jest ten, že skořápky měly být pevnými, ale zároveň mělo šetřeno býti hmoty stavební. Námitka, že jednomu a témuž úkazu, t. j. chodbám jednou ve skořápkách svrchních, podruhé těmže chodbám ve skořápkách zpodních dostává se jiného výkladu, zde není místnou, poněvadž u rudistů obě skořápky, jakož i chodby ve stěně jejich se obyčejně značně od sebe liší. Jen rod Caprinula má, pokud se chodeb týče, skořápky sobě téměř, rod Radiolites pak úplně stejné. Jakým pochodem chodby ve zpodních skořápkách povstaly, možno si snad takto znázorniti. Rudisté přirůstali ke dnu mořskému různými miskami, jednou dvouzubou a jindy jednozubou, jako vůbec u nich v jisté doby zvláštní, nyní nevysvětlitelné poměry panovaly, které až ku tvarům zvráceným vedly. Na počátku křidového útvaru totiž povstaly tvary zvrácené čili inversní, při nichž původně pravá dvouzubá miska stala se pojednou levou. Mysleme si, že nějaký druh rodu Caprotina přirůstal levou dvouzubou miskou, která nyní u tohoto rodu

veskrze jest svrchní víčkovitá. Během dob se víčko to prodlužovalo, tvořilo se v něm místo pro tělo zvířecí a dříve kuželovitá pravá miska se umenšovala. V levé dvouzubé skořápce však byly původně již chodby, ty ovšem nezmizely rázem, nýbrž zůstaly, ač ovšem doznaly rovněž změn jako skořápka celá. A zde máme ono stadium vývoje, které nám asi představuje rod Cryptaulia. To byl asi původ chodeb těch ve zpodní misce a snadno možno si představiti, že později počet chodeb vzrostl, poněvadž mezi tím se dobře osvědčila ona jakási šetrnosť, kterou pevné stavby prováděny byly prostředky malými. Proto klademe na konec řady v tom směru postupující rod Radiolites, který vždy dříve za blízkého příbuzného rodu Hippurites považován byl, který ale v skutku s ním velice nepatrné podobnosti má. U rodu Hippurites, nejmladšího zástupce rudistů, shledáváme se pojednou s ústrojností skořápkovou opět zcela jinou, normální ústrojností nynějších mlžů velice příbuznou. Tento zjev vysvětliti jest věcí velice obtížnou. Ústrojnosť stěny skořápkové, jak u nynějších mlžů jest, není však výsledkem těchto pochodů, které odbývaly se ve vymřelé čeledi rudistů; ona byla v téže podobě již v prastarých útvarech a dlužno tudíž i v tomto směru považovati rudisty za větev mlžů odloučenou. Rod Hippurites jest nejlépe postaviti v této příčině (nikoliv však v kusech jiných) stranou a říci o něm, že jest to rudist se stěnou skořápkovou téměř normální, t. j. takovou, jaká vyskytuje se vesměs u mlžů nyní žijících.

4. Otisky svalové.

Svaly připevňující se na skořápky mlžů zanechávají na nich patrné stopy čili otisky, jež zvláště u mnohých zkamenělých zřetelné bývají. Je-li sval pouze jediný, zanechává zvláště na zpodní skořápce mlžů přirůstajících, jako na př. ústřic zkamenělých, otisk velice patrný, obyčejně v podobě prohlubené a nepravidelně rýhované jamky. Celkem seznáváme, že tloušťkou skořápky roste i síla svalu, neboť čím tlustší a větší skořápky, tím třeba silnějšího svazu ligamentu, který skořápky otevírá a přirozeným způsobem tím mohutnějšího svalu, jehož úlohou jest, čeliti činnosti ligamentové. Nejstarší mlžové, jako na př. rodové v našem kambrickém a silurském útvaru, nemají na svých tenkých jemných miskách obyčejně žádných zřetelných otisků svalových na důkaz, že svaly byly velice slabé a že nebylo třeba v moři silurském silných provazců svalových, jakými se někteří druhové nyní žijící vyznačují.

Pokud se umístění svalů týče, připínají se buď naplocho na skořápky aneb někdy, jak již pověděno, tvoří prohlubinu. U rudistů povstává však a jimi zase úplně zaniká zvláštní způsob inserce svalové. Již rod Megalodon má k umístění svalu zadního zvláštní vyvstalou lištu, která však dosud je v dutině pro zvíře a teprve u některých rodů rudistových posouvá se do plochy zámkové poblíže zadního zubu. Rod Diceras nemá lišty, nýbrž dvě vyvstalé polštářovité vyvýšeniny, na nichž se mocné svaly ukládaly na plochách zdrsněných nepravidelnými ryhami zajisté proto, že sval spíše zachytiti se mohl na ploše drsné než na ploše hladké. Rod Diceras rozkládá se ve 3 podrody,

z nichž jeden a to Diceras sensu strictiore již opět jakousi obdobu lišty pro zadní sval má.

Rody Bayleia, Apricardia, Requienia a Toucasia rovněž vykazují lištu určenou pro inserci zadního svalu. Silně vyvstalou lištu téhož účelu má rod Valletia a u rodu Caprotina konečně jest na svrchní skořápce pro zadní sval mocná, zubu podobná vyvýšenina tak zv. násadec svalový. Zadní zub u rodu toho jest rozdělen nízkou ryhou ve dví, přední část jest vyšší a o něco širší, zadní pak užší a nese na své vnitřní ploše otisk svalový, na zkamenělých jedincích zřídka dobře zřetelný. Tato druhá část zubu zadního jest násadec svalový, který ukládá se na zpodní skořápce do jamky mnohem širší než násadec sám jest, ježto v této jamce upevněn jest sval zadní. Násadec má tudíž dvojí účel, on poskytuje předně místo zadnímu svalu k upevnění a vykonává za druhé úlohu zubu, poněvadž nad místo, kde sval jest připevněn, vrcholem svým vyniká. Poměry tyto dosahují největšího vývoje u rodu Hippurites, kde násadec svalový obyčejně přesahuje, pokud se výšky týče, přední část zadního zubu a jen zpodinou svou poskytuje místo k inserci zadního svalu. Ve skutečném případu byla u druhu Hippurites cornu vaccinum míra zubů: přední hlavní zub 5 *cm*, přední část zadního zubu 3·2 *cm*, násadec svalový 4·1 *cm*. Násadec svalový jest u rodu Hippurites úzký, plochý, zubu úplně podoben a od přední části zadního zubu úplně oddělený.

Zvláštním zjevem, s nímž u rudistů se setkáváme, jest, že poměry, jak svaly se upevňují u rodů sobě velice příbuzných, jako na př. Hippurites, Radiolites a Biradiolites, jsou velice různé. O způsobu upevnění svalu u rodu Hippurites bylo již mluveno; u rodu Radiolites není vlastně žádného násadce pro svaly, nýbrž svaly upínají se na svrchní skořápce na vyvstávající lem kolem dutiny pro zvíře, který se až k zubům prodlužuje na obě strany. Jest to ovšem také silně vyvstávající lišta, než jí neodpovídá na zpodní misce žádná jamka, ano naopak svaly ve skořápce té inserují na vyvstalých polštářích. U rodu Biradiolites jsou všecky otisky svalové polštářovité a jen někdy vyvstávají silněji otisky na miskách svrchních.

Pokud se ostatních hlavních typů rudistových týče, tu má rod Caprinula a Caprina dosti slabé lišty pro zadní sval na svrchní, a nezřetelné lišty pro týž sval na zpodní misce; Polyconites silný násadec pro zadní sval na svrchní misce a rod Gyropleura rovněž na svrchní misce slabší násadec pro zadní sval.

Pozoruhodno jest, že vždy jest to zadní sval, který upíná se na násadci aneb na liště vyvýšené. Význam zařízení toho a účel násadce nelze nyní dobře si vysvětliti. U některých typů rudistových jest zadní sval vzdálenější od ligamentu než přední, tak že při otevírání misek ve směru, v jakém kniha se otevírá, zadní sval více natahován a napínán býval než přední. A v tom možno, že by bylo lze nalézti příčinu, proč sval inserci svou vyvyšoval. Avšak u velké většiny ostatních rodů jest poměr právě opačný, a sval zadní blíže jsa posunut ku ligamentu než sval přední napínal se při otevírání méně. U rodů s dlouhými rovnými zuby mohla se svrchní skořápka otevírati jen kolmým pozdvihováním skořápky svrchní. Tu zdálo by se, že násadec souvisí jaksi s tímto způ-

sobem otevírání misek a že sval svou inserci zvyšoval; názoru tomu svědčily by snad také i poměry u rodu Hippurites, který má ze všech nejdelší kuželovité zuby a také ze všech nejmocnější násadec, avšak tu dlužno připomenouti, že u všech druhů, kde jest násadec, sval zadní upínal se na zpodní skořápce v dutině, tak že poměrná vzdálenosť obou insercí na zpodní a na svrchní skořápce zůstala touže.

5. Zámek.

Účel zámkového ústroje, totiž zubů a jamek u mlžů, není dosud zcela zřetelně vysvětlen. Jest otázka, která není dosud právoplatně rozřešena, slouží-li zuby zvířete k tomu, aby uzavření skořápek bylo pevnější, čili aby svaly, které misky uzavírají, byly jimi podporovány ve své činnosti. Jen u některých nečetných rodů jsou zuby tak zařízeny a v podobě háčku zahnuty, že zapustivše se určitým krátkým a vodorovným pohybem do jamek skořápky drží pevně pohromadě. Obyčejně zapadají volně a nepřekážejí nikterak při otevření, nepůsobí-li zároveň zavirači. V tom případě zdá se, že zuby jsou jen proto, aby řídily pohyb při uzavírání tak, aby po uskutečněném pohybu skořápky obě přišly do vzájemné polohy k sobě takové, při které uzavření jest úplné a nikde po straně otvor nezeje.

A tak by vyplňoval zámek u mlžů dvojím směrem účel svůj a obojí tento směr vidíme u rudistů. Jsou některé rody a to obyčejně starší jako Diceras, pak také ale i Requienia, Toucasia, Apricardia a j., u nichž přední zub na svrchní skořápce jest plochý a šikmě položený, tak že zapadnutí do jamky na skořápce zpodní nemůže se díti pohybem kolmým, nýbrž šikmo-vodorovným a jsou-li jednou skořápky uzavřeny, nelze je opět pohybem kolmým otevříti, nýbrž zub vysouvá se z jamky jen při jistém, určitém pohybu šikmo-vodorovném. Jest zřejmo, že v případech těch zub zřejmě přispívá ku pevnému uzavření misek. Dlužno zde podotknouti, že u rodů jmenovaných zadní zub bývá vždy více neb méně zakrsalý.

U druhé řady rudistů jsou zuby dlouhé a rovné a kolmo na skořápku postavené, tak že zavírání i otevírání může se díti jen způsobem tím, že svrchní skořápka kolmo nahoru neb dolů se pohybuje. Při miskách zavřených nepůsobí zuby, neodporují nikterak při otevírání a lze je tudíž míti jen za jakési stěžeje, podél kterých miska svrchní pohybovati se musí, aby na pravé místo přišla a zpodní skořápku úplně uzavřela. To vidíme u rodů Caprotina, Monopleura, Polyconites, Petalodontia, zvláště pak u Hippurites, Radiolites a Biradiolites, kteréž rody vynikají zvlášť mocnými a dlouhými zuby.

Při rozpravě o důležitosti a účelu zámku dlužno na zřeteli míti, že nejstarší tvary nemají buď zubů žádných anebo jako nejstarší zámkový typ zámek řadozubý č. taxodontní (Leda, Nucula), který rovněž nepřispívá k upevnění obou skořápek. Četné rody mlžů (na př. Pectunculus) mají na svých, předním, zadním i také zpodním, okrajích ještě hrboulky, které rovněž vydatně pomáhají při uzavírání misek v tom směru, že všinouce se mezi sebe uzamykají

misky úplně, tak že nikde nezeje ani malý otvor. Hrboulky ty mají velikou podobu se zuby zámku taxodontního a liší se od nich nikoli svou podobou ani účelem, nýbrž pouze a jedině místem. Zuby jsou na tak zv. ploše zámkové, tedy na svrchním okraji misky, hrboulky pak na okrajích ostatních. Bylo by tudíž možno vývoj zámku mysliti si tím způsobem, že v jistém stadiu mlže, jehož vrcholy byly dosud nevyvinuté, aneb alespoň pravidelně soustředné, byly po celém okraji hrboulky rozestaveny, které řídily otevírání a uzavírání misek dosud svazem nespojených. Otevírání misek ve stadiu tomto provádělo tělo zvířecí samo, snad bobtnáním. Později ustálil se pohyb kolem jednoho bodu a tím vznikly mimostředné vrcholy a pod nimi ku snazšímu otevírání rohovitý svaz. Následkem toho nebylo třeba hrboulů na okrajích předním, zpodním a zadním a zůstaly pouze hrboule na okraji svrchním v podobě zámku řadozubého. Tento typ zachován jest u rodů nejstarších. Rostla-li skořápka nestejnoměrně, tak že stávaly se misky nestejnostrannými, vadily některé zoubky, zvláště vzdálenější od vrcholu, jakožto bodu, kol kterého se otáčení děje. I zanikly některé z hrboulků původního zámku řadozubého, jiné mohutněji se vyvinuly, do délky v podobě lišten ve smyslu pohybu otáčivého prodloužily, tak že povstaly pak rozličné typy zámkové, jak nyní je u mlžů nacházíme.

Typický tvar zámku u rudistů skládá se na skořápce jedné ze dvou zubů, mezi nimiž leží jamka, na skořápce druhé z jednoho zubu, který na obou stranách má po jamce. Nejlépe a nejpravidelněji jest tento typ vyvinut u rodu Monopleura, nemůže zde však zván býti původním, ježto rod ten jest poměrně mladý a má značné příbuzenské vztahy ku staršímu podrodu Heterodiceras, z něhož bezpochyby povstal. Vůbec pozorujeme, že pravidelnosť zámku u rudistů kráčí stejně se změnou praktického účelu zámku, za kterýž účel považujeme přidržování misek u sebe. U rudistů se během dob zámek tomuto účelu svému stále více vzdaloval tím, že zuby stále zřejměji na sebe braly úlohu pouhých ukazovatelů směru.

S postupem zcela podobným setkáme se, budeme-li pozorovati chronologický vývoj jamek zámkových, určených ku přijetí zubů. Jamky tyto bývají u starších rodů Diceras, Valletia a j. takových rozměrů, že zuby úplně do nich se hodí a celou jamku vyplňují. U těch rodů, které mají zuby ploské a na zad silně zahnuté, jsou i jamky ovšem šikmé, ano až téměř vodorovně uložené pod vrcholem plochy zámkové, tak že zuby vsouvají se do nich se strany.

U rodu Toucasia jest však již jamka na svrchní skořápce mnohem širší a objemnější než zub sám, tak že v jamce po uzavření misek zbývá prázdného místa po jedné straně. U rodů Caprina a Plagioptychus jest pak jamka na svrchní skořápce tak rozšířená, že rovná se, pokud se objemu týče, dutině zvířeti vykázané. Zub vtěsnává se zde mezi dvě stěny jamky a zůstává svou třetí stranou úplně volný. Z toho zřejmě vysvítá, že zub mohl směr při zavírání sice říditi, nikdy však přispěti ku pevnějšímu uzavření obou misek. Jaký účel pak měla tak značně rozšířená jamka a byla-li vyplněna tělem zvířecím, nelze dnes již rozhodnouti.

6. Předkové rudistů.

První vyskytnutí se nejstaršího tvaru rudistů, a sice rodu Diceras, připadá do jurského útvaru. Před tím není po pravých rudistech žádné stopy a jest zajisté pochopitelna snaha, která ve starších vrstvách hledá typ, který by se mohl pokládati za předchůdce rudistů. Názory o tom jsou rozličné a dosud nejsou sjednoceny, jak tomu ani jinak býti nemůže ve věci tak eminentně spekulativní. Přece však domníváme se, že rod Megalodon, který počíná devonem, v triasu nabývá největšího rozšíření a končí černým jurou, by mohl zván býti takovým předchůdcem, poněvadž setkáváme se u něho se znaky, které potom u rudistů zmohutněly a typickými se staly.

Rod Megalodon má skořápky — jsou-li uzavřené — obrysu srdcovitého, velice tlusté a sobě téměř stejné. Jest litovati, že struktura stěny skořápkové u rodu toho nebyla dosud dostatečně prozkoumána. Zámkový ústroj rozkládá se na široké ploše zámkové a zuby bývají u některých druhů obloukovitě na venek zahnuty, tak že misky mohou se uzavříti jen zvláštním pohybem šikmo-vodorovným. Zámek sestává ze 2 zubů na každé skořápce. Zadní otisk svalový upíná se na zvláštní lištu.

To jsou hlavní znaky rodu Megalodon, pokud jsou vhodny ku přirovnávání se znaky rudistů. U rudistů, které původně rovněž byly stejnomiskaté, vyrůstaly vrcholy v silnější míře než u rodu Megalodon, avšak rostly ve stejném smyslu a směru aspoň pokud se starších zástupců, jako Diceras a podrodů jeho týče. Plocha zámková jest u rudistů vždycky široká a prostorná a oblouk-kovité zahnutí zubu zadního jest právě u rudistů typickým zjevem, jímž vyznačují se četné rody, jako Diceras, Matheronia, Requienia Toucasia a j. Zuby u rodu Megalodon byly značných rozměrů a pokračovaly v tom směru i u rudistů. Původní značka zámku u rodu Megalodon jest 2 : 2, t. j. na pravé i levé skořápce po 2 zubech. Megalodon z útvaru devonského má tyto zuby na obou miskách mocné a téměř sobě stejné, mladší tvary z triasového útvaru, které nyní také do zvláštního podrodu Neomegalodon se kladou, ukazují v levé skořápce zadní zub slabě vyvinutý, ano až na nepatrnou lištu zakrsalý. U rodu Diceras naopak nalézáme u některých druhů slabé stopy po druhém zubu ve skořápce levé, které již před léty vykládány byly od některých za zakrsalý zub, od jiných za nahodilou naduřeninu. Mladší tvary rodu Diceras a pak i všickni jeho potomci nemají ovšem po tomto druhém zubu již stopy pražádné. Můžeme tudíž vším právem míti za to, že na sklonku rodu Megalodon a na počátku vývoje rodu Diceras přeměnil se ve vývojové řadě rudistů zámek v tom směru, že ze dvou zubů, na levé skořápce druhdy mohutných, zakrsal zub zadní.

Zadní sval u rodu Megalodon upínal se na vyvstávající lištu a tím objevil se u mlžů poprvé nový znak, který pak u rudistů tak pokročil, že lišta, původně pod zámkem uložená, přesunula se na plochu zámkovou a zmohutněla až ve značně vynikající násadec svalový.

To jsou hlavní znaky rodu Megalodon, které u rudistů sesílené znovu se vyskytují a vyvíjejí, a z porovnávání těchže můžeme spatřovati v tomto rodu předchůdce rudistů. Mimochodem budiž zde podotknuto, že dle Boehma chová rod Megalodon značné příbuzenské vztahy ku čeledi Cardiaceae.

Na základě těchto pozorování sáhají rudisté počátky svými až do útvaru devonského, nabývají značného rozšíření v jurském a zvláště křidovém útvaru a vymírají pak úplně na konci doby křidové.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 16.

PŘÍSPĚVKY
K TECHNICE AMPUTAČNÍ.

PÍŠE

E. ALBERT,

ŘÁDNÝ ČLEN.

PŘEDLOŽENO DNE 1. PROSINCE 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

I.

Bude tomu hned 100 let, co operace Chopartova se pěstuje; Chopart uveřejnil prvou svou publikaci r. 1792 (Fourcroy, La medécine éclairée par les sciences phys. Tom. IV). Případů, ve kterých se operace tato vykonala po celém světě, snad je na tisíce. Jesti však málo operací, o kterých by se úsudky znalců tak velice rozcházely, jak se to dělo s operací touto. A právě chirurgové francouzští to byli, kteří se proti methodě slavného krajana svého vyslovovali co nejrozhodnčji.

Všechny námitky točí se okolo jedné věci, že totiž člověk dle methody Chopartovy amputovaný obyčejně na pahýlu choditi nemůže. Příčina toho hledala se v t. zv. retrakci paty. Zkušenosť ukazuje, že se pahýl schýlí velmi časně ve smyslu flexe plantární, jinými slovy, že nastane truncus equinus. Přihlížíme-li blíže, shledáme, že se brzy dostaví i jistý stupeň pronace; z pahýlu se stane truncus equino-valgus. O faktu samém nebylo a není pochyby.

Proč se tak děje, o tom bylo velmi mnoho psáno a mluveno. Rozvláčné o tom diskusse jsou odborníkům známy a není tuším nikoho, kdo by se ještě nyní domníval, že onen truncus equino-valgus záleží na pouhém porušení antagonistických poměrů svalových. Zvláště pitváním pahýlů, na kterých majitelé jejich mnoho let chodili, dokázáno, že 1. nebylo žádného zkrácení šlachy Achillovy; 2. že articulatio tibio-tarsalis je trvale v maximální flexi plantární; 3. že calcaneum i astragalus nejsou nad sebou, ale za sebou, astragalus napřed, calcaneum za ním. Souděno z toho, že tato poloha kostí nastává nevyhnutelně z mechanických poměrů pahýlů, a že jinak ani býti nemůže, jakmile při chůzi tíže celého těla na pahýlu spočívá.

A poněvadž lidé s touto nevyhnutelnou deformací pahýlu choditi mohli a dlouhá leta chodili, plynul z toho úsudek, že v retrakci paty nelze hledati příčiny toho, proč mnozí na pahýlu choditi nemohou. Již slovutný Vincenc v. Kern, jak mi předchůdce můj baron Dumreicher vypravovával, znal člověka, jenž, byv amputován dle methody Chopartovy, cestu z Vídně do Paříže vykonal pěšky. Nebožtík professor Linhart měl vzácnou příležitosť, že mohl pitvati pahýl člověka, jenž r. 1843 od Karla Textora po methodě Chopartově byv amputován, sloužil v nemocnici würzburské a všechny služby vykonával až do r. 1865. Na pahýlu tom dokázány byly ony změny, o kterých právě promluveno.

Retrakce paty nezabraňuje tedy tomu, aby amputovaný na svém pahýlu namáhavě a trvale choditi mohl. Nemůže-li choditi, musí příčina toho vězeti jinde.

A tuť není pochyby a je všeobecné přesvědčení, že valná část amputací Chopartových příznivého výsledku neměla proto, poněvadž bylo amputováno v částech nezdravých a nemoc důkladně vyhubena nebyla. Většina amputací Chopartových stala a stává se k vůli tuberkulose a tuť netřeba dokládati, že vyhubení nemoci je bohužel až přečasto nedokonalé.

V případech takých tedy operace nebyla na místě a mělo se již ihned amputovati na místě výše položeném. To však, co pronáším, jest nám všem jasno teprve od let právě minulých. Není tomu pradávno, co nebožtík G. Simon, muž jinak neobyčejně jasných náhledů, tvrdil, že právě ona tkaniva, jež se shledávají ve stavu chronického zánětu — a dle celého kontextu mínil tím především chorobu fungosní — jsou nad míru schopna, aby srostla t. zv. první intencí. Víme, že se tak děje na kratičkou dobu, recidiva ale že je brzce v zápětí. Opakuji tedy, že ve valné části těch případů, kde amputace Chopartova vykonána byla, mělo se amputovati výše.

Předchůdcové naši však, opojeni jsouce theorií o porušeném antagonismu, vymýšleli nové modifikace původní methody.

Když se Jobertovi (de Lamballe) přihodilo, že omylem vykonal enukleaci, která, nejsouc ani Chopartovou ani Lisfrancovou, byla vlastně methodou novou a potkala se s výsledkem dobrým, jal se Laborie, přítel Jobertův, o věci přemýšleti a přišel na modifikaci ještě jinou.

Jobert byl totiž vniknul do kloubu mezi člunkem a mezi třemi klínovitými (articulatio scaphoideo-cuneiformis) a pak vedl řez dále mezi os cuboideum a dvěma posledními metatarsy. Odstranil tedy celý metatarsus + ossa cuneiformia. Francouzi nazývají tuto methodu: Désarticulation antéscaphoïdo-cuboïdienne (ou désarticulation de Jobert). Laborie však navrhl, aby se prováděla operace i tak, by odstraněny byly: metatarsus + ossa cuneiformia + os cuboideum. Methodě této říkají Francouzové: Désarticulation anté-scaphoïdo-calcanéenne (ou désarticulation de Laborie). Methoda Jobertova blíží se více methodě Lisfrancově, methoda Laborieova více methodě Chopartově. Od chirurgů mnohých bylo uznámo, že methoda Laborieova vyniká nad Chopartovu hlavně tím, že je zachována inserce svalu holenního (M. tibial. ant.) a tím, že pahýl je schopen vykonávati i flexi dorsální, což při operaci Lisfrancově i při Jobertově samo sebou se rozumí.

Zbývala ještě jedna možná modifikace. Operuje-li se podle Joberta, je pahýl na předním svém konci nerovný; os cuboideum vyčnívá do předu na straně laterální. Operuje-li se dle Laborie, je pahýl na svém předním konci také nerovný; tu vyčnívá zase scaphoideum na straně mediální. Aby se stal pahýl na předním svém konci úhlednějším, možná přeřezati os cuboideum ve stejné čáře s kloubem člunko-klínovitým, tak že v kloubu tomto se vykoná enukleace, os cuboideum však se amputuje. Modifikace této se chytili Bona, Baudens, v Německu Pauli.

Přidáme-li k tomu, že Blasius, vykonav enukleaci Chopartovu, vyčnívající konce obou zbylých kostí tarsálních (talus et calcaneum) uřezal, jakmile byly poněkud podezřelé, máme modifikaci pátou.

Na všecky modifikace tyto uhodili autorové doby minulé, dokud totiž antiseptika chirurgií neovládala. Jim běželo hlavně o to, aby se utvořil pahýl, jenž by nepodléhal rozšířenému hnisání a s jakýmsi podivením poznávali, že i tehdá, když pahýl skytá nerovnosti a tím se lecjaké skuliny a sluje tvoří, ve kterých by se hnisání zahnízditi mohlo, přece se rána dobře zahojila. V chirurgii nynější obavy takové naprosto není, a kdyby jiného ohledu nebylo než k tomu, aby se rána zahojila rázem, mohli bychom prováděti amputace a enukleace ve směru libovolném, nehledíce kudy pilka řeže a otevře-li se kloub kterýkoli. Proto se netřeba diviti, že se za posledních let vyskytlo také celé hejno nových modifikací amputace osteoplastické, již zavedl druhdy Pirogov. Nemíním tu právě ony modifikace, jež se zakládají na rozličném směru, ve kterém se calcaneum a kosti holenní přeřežou (Sédillot, Günther, Lefort, P. Bruns) neboť tyto vznikly už před Listrem; míním zde spíše methody Tauberovu Quimby-ho, Hancockovou, Kranzfeldovu, Keetly-ho a Rydygierovu, jež vznikly z vědomí antiseptického. Rovněž se netřeba diviti, že i enukleace Malgaigneova (enucleatio subtalica) zase se několikráte provedla, ano že se dožila i jakéhosi zdokonalení v methodě Tripierově (amputation mixte calcanéo — sous — astragalienne).

Co chirurgie nynější má více na zřeteli, jesti výsledek quoad functionem, Nemajíce, ať tak dím, čeho se báti, hledíme k tomu, aby se nemocnému dostalo pahýlu co možná nejzpůsobilejšího. I předchůdcové naši k tomu, seč byli, hledívali. Tak na př. amputace Malgaigneova skytá nemocnému pahýl docela podobný obyčejnému pahýlu amputačnímu, avšak chůze je patrně pružnější. Nemocný, ať tak dím, pahýlem svým nedupe, ale po něm stoupá. Předchůdcové naši však i v této příčině měli po ruce jen to, že mohli modifikovati místo a směr řezu.

Nám v době antiseptické jsou po ruce prostředky ještě docela jinačí.

Chci o dvou z nich promluviti.

Jak už dříve pověděno, chirurgové dřívější mnoho o tom přemítali, proč lidé, na nichž enukleace Chopartova byla vykonána, na pahýlu svém často choditi nemohou, a též podotknuto, kde příčina vězela; tuberkulosa pokračovala v pahýlu. Avšak byly případy, kde tuberkulosy nebylo a pahýl nicméně nebyl bez bolesti. Kdo si výborné výkresy Linhartovy prohlédne, přesvědčí se, že pahýl Chopartův musí podlehnouti jistým statistickým proměnám. Pahýl, jejž Linhart pitval, sloužil nemocnému skorem 30 let, a sloužil dobře. Shledalo se, že talus ležel přímo před calcaneum; obě kosti nebyly tudíž nad sebou, ale ležely za sebou. Talus byl v maximální flexi plantární, tak že hlavička jeho, jež ční ku předu, čněla přímo dolů. Tato situace je nevyhnutelná. Skelet nohy vhodně se přirovnává nízkému klenutí. Enukleací Chopartovou však se odřízne tolik, že zbývá jen zadní polovička klenby. Jakmile amputovaný na svůj pahýl vstoupí, ihned tíže těla tuto polovičku klenby spáčí dolů. Že to nevadí, tomu

právě nasvědčuje zkušenosť; veliká část amputovaných chodila na pahýlu takto přetvořeném výborně. Avšak poněvadž někteří, ač pahýl jinak zdravým byl, choditi nemohli, musíme za to míti, že v některých případech nastávají zvláštní obtíže statické. I poukázáno velmi trefně k tomu, že i celá noha často podléhá anomálním statickým obtížením, jichž representantem jest klassický pes valgus. K této myšlénce zřetel maje, chopil se Helferich zvláštního prostředku. Aby talus do flexe plantární stlačen býti nemohl, učiní se umělá ankylosa v kloubu. Helferich tudíž originálně a v duchu zcela moderním přenesl základní myšlénku arthrodese na pole amputační techniky, začež jsem mu vděčen, poněvadž jsem se sám, arthrodese vymysliv, ani nenadál, že by se myšlénka ta i sem hodila. Nyní ovšem sám si myslím, že nejsme u konce. Zdá se mi, že tuto myšlénku možno i dále pěstovati. Tak na př. enukleace Lisfrancova skytá sice pahýl výborný, avšak prodlením času stává se, že pahýl upadá do pronace, stává se truncus valgus, někdy i valgo-equinus. Příčinu toho hledati třeba bezpečně v tom, že pahýlu tomu nedostává se onoho třetího bodu, o nějž se noha normální opírá. I mám za to, že by se tomu předešlo, kdyby na pahýlu Lisfrancovu byla vykonána arthrodesis articul. scaphoides-cuneiformis, avšak tak, že by z kloubu toho vyříznut byl klín hrotem dolů hledící, tak aby tu nastala plantární flexe přední části pahýlu a tím cuneiformis I. se o půdu více opíralo.

Methody *arthrodetické* užívati při formaci pahýlu, to jest první prostředek, jehož bych ctěným kollegům odporučil.

Druhý prostředek leží v oboru *tenoplastiky*. Chci jej objasniti konkretním případem operativním.

Dne 23. října 1891 operoval jsem 44letou M. S.....ovou stiženou tuberkulemi v articul. metatarsea hallucis. Fungósní nádor rozbujel se do zadu tak, že jsem si netroufal methodou Lisfrancovou odstraniti vše, co chorého anebo podezřelého bylo. I ustanovil jsem se na tom, provésti operaci, již pěstovali Bona, Baudens, Pauli: enucleatio scaphoides-cuneiformis a amputatio cuboidei. Avšak předsevzal jsem si, poskytnouti pahýlu tolik aktivní pohyblivosti, pokud možná. K tomu cíli umínil jsem si, přeříznouti šlachy dorsálních flexorů daleko před čarou amputační, vyvrtati v os cuboideum aspoň dvě díry, jdoucí šikmo se shora a ze zadu do předu a dolů, některé šlachy flexorů dorsálních tuto protáhnouti a stehem upevniti v laloku plantárním. K tomu se hodí šlachy extensoris digitorum communis výborně, a poněvadž tuberkulosa jen na mediální straně se rozbujněla, nebylo se obávati, že by šlachy tyto, obzvláště ty, které jdou k prstům zevním, byly chorobou dotknuty. Vyřízl jsem tedy kratičký lalok dorsální jen z kůže, střeže se, abych neporušil šlach co málo. Pak jsem přeřízl šlachy as o 4 *cm* blíže ku předu a odpraeparoval jsem soubor všech měkkých částí od kostí. Po té jsem vykloubil a přeřezal, jak naznačeno ipso termino operationis, vyřízl tlustý lalok plantární a zastavil krvácení. I vyvrtal jsem vrtákem v os cuboideum s hora a ze zadu do předu a dolů dvě, ať tak dím, trouby, abych jimi provlékl dvě šlachy. Tyto jsem uvázal, každou o sobě, na nitku hedvábnou, kterou jsem dříve provlékl; za nitku táhna, provlékl jsem šlachu a připevnil několika stehy k masu laloku plantár-

ního. Překvapilo mne, že svaly, o něž běží, při provlékání vzdorovaly, ač byla narkosa dosti hluboká. Když pak lalok plantární byl přišit k dorsálnímu, dal jsem udělati obvazek tuhý v levné flexi dorsální. Rána se zahojila téměř všude per primam. Nemocná nyní pohybuje pahýlem ve smyslu flexe dorsální velmi praecisně a jest pozorovati, že šlachy do kosti zašité při tom silně vyvstávají a sval v tom okamžiku tvrdne. Šlachu při tom možno stopovati až tam, kde do kosti byla ponořena.

V případě tomto jsem tedy sáhl k technice, jíž posud nebylo užito, vyvrtav pro šlachy úplny kanálek, aby se šlacha v kosti usadila a v ní přirostla. Posavadní tenoplastické operace záležely v tom, že se šlacha sešila se šlachou jinou a sem především patří tenoplastika, jíž prof. Nicoladoni provedl při léčení t. zv. pes calcaneus paralyticus. Podobně si počínali především někteří chirurgové francouzští při poraněních, užívajíce šlach neporušených k tomu, aby přišity byvše na místo patřičné, hýbaly částmi, jež přirozených šlach svých byly zbaveny poraněním. Hledě ke svým vlastním zkušenostem, musím prohlásiti, že výsledky operací tenoplastických nejsou stále zaručeny. Tak zejména v jednom případě tenoplastiky provedené dle prof. Nicoladoniho zpozoroval jsem, že se šlacha M. peronaei, zašitá do šlachy Achillovy, během času vysouvla ze svého zamýšleného upevnění, a že tím výsledek operace byl jen počasný. Naopak ale jsem měl právě tyto dni před sebou děvče 10leté, jemuž jsem tutéž operaci vykonal před osmi lety s výsledkem trvalým. Děvče toto provádí flexi plantární s obratností a silou úplně uspokojivou. Při tom se spatřuje, že jízva operační je se šlachou pevně srostlá, tak že při akci svalstva se smršťuje vzrůstem částí se zároveň vysoko pošinula, tak že je zšíři tří prstů nad patou. Zajímavo při tom jest, co mi pověděl p. prof. Lorenz. Výborný tento orthopéd, jenž na všech polích svého oboru klestí nové dráhy, vykonal v případě spastické paralyse několik tenektomií, t. j. vyřízl celé šlachy, aby zničil vliv jistých svalů na klouby skrčené. I zpozoroval, že centrální konce svalů takto zkomolených srostly pevně s jízvou operační a že se při každé akci svalů těchto jízva smršťovala. Proto se mi zdá, že by v příčině té, o kterou mi běží, snad i dostačilo, šlachy extensorův dorsálních pouze přeříznouti, aby vrostly v jízvu, ve které se lalok plantární s dorsálním spojuje. Avšak potom by byla účinnosť šlach těchto přece jen slabá, a proto se mi zdá, že jsem volil prostředek vydatnější. I se stanoviska theoretického bylo by dosti zajímavo, přesvědčiti se pokusy na zvířatech vykonanými, jakým způsobem šlacha, kostí provléknutá, se tkanivem kostním sroste.

Končím touto úvahou: Noha lidská, pokud rozboru mechanickému podrobena byla, vyniká tím, že jsou v ní vtěleny dva principy: princip pevnosti a princip pohyblivosti. Obé objasnil prof. Lorenz ve své práci o noze ploské. Chirurgové, kdykoli jsou přinuceni amputovati v oboru kostry nohové, nechť mají na mysli oba principy, aby nemocnému se dostalo pahýlu, jenž takořka imituje nohu normální, aspoň ohledem k oběma principům. Moje arthrodese a moje tenoplastika, již nazývám *tenopexis*, snad sem tam malou službičku při tom vykonají.

II.

Amputatio subtalica (Malgaigne) čítá se k operacím nejřidším. Několikráte byvši s dobrým výsledkem vykonána od Lignerollesa, netěšila se souhlasu odborníků, poněvadž se vytýkati mohlo, že tulus se svou nerovnou plochou spodní se nehodí dobře ke stoupání a poněvadž passivní pohyblivosť jeho nepřipovídá výhody značnější. Kdokoli však měl příležitosť operaci jen jedenkráte vykonati, spřátelí se s ní. Chůze operovaného je pružná, vypadá naprosto jinak, než chůze amputovaného v holeni. Pročež pochopitelno, že Malgaigne, Nélaton a i B. v. Langenbeck se stali jejími příznivci. Zvláště prvý doporučoval operaci tak vřele, že se po něm obyčejně zove.

Příčina, proč operace provádí se tak zřídka, vězí v tom, že se obyčejně případ hodí buď k enukleaci Chopartově, anebo že se provésti může operace, kterou Pirogov udal Jen sem tam se naskytne případ, kde měkkých částí je tak málo, že ani onu, ani tuto operaci provésti nemožno.

Vzdor tomu, že operace je nad míru řídká, vymyšleno několik method. Vedle klassické methody Malgaigneovy vznikla methoda Textorova, Güntherova, Linhartova.

Už tomu mnoho let, co jsem tuto operaci provedl na klinice inšprucké přesně po způsobu Malgaigneově; i byl jsem s výsledkem velmi spokojen.

Teprve po mnoha letech vyskytl se mi zase případ, ve kterém operaci bylo možná provésti.

M. S . . . ová, žena přes 30 let stará, přišla na kliniku dne 21. ledna 1891 se sarkomem, jenž se rozprostíral nad metatarsem a na vnitřním kraji nohy až k patě, jsa s kostmi srostlým. Nebylo možná ani podle Choparta ani podle Pirogova operovati; ba nebylo možná ani původní methody Malgaigneovy, ani modifikace Textorovy, ani Güntherovy se držeti, poněvadž zhoubný novotvar sáhal až přes onu čáru, kde řezy tyto se vedou. Avšak bylo možné, vykloubiti podle Malgaignea, ovšem jen tím způsobem, že se utvořiti musil lalok laterální. Malgaigne vymysliv svou methodu laloku mediálního kladl váhu na to, že tu je po ruce mohutné ložisko částí měkkých, které tvoří silný polštář, na němž amputovaný směle stoupati může; dále lalokem tím běží A. tibial. post., tak že o výživu laloku není strachu.

Výhod těchto neposkytuje lalok laterální. Avšak, ohlížeje se k tomu, že veliké laloky z pouhé kůže utvořené při suprakondylární amputaci stehna a i jinde se výborně osvědčují (Beck, Bruns. sen.), odhodlal jsem se provésti operaci s lalokem laterálním. Řez je pravý opak řezu Malgaigneova. Běží od inserce šlachy Achillovy přes patu prostřední čarou chodidla, ale obrací se ke kloubu Chopartovu směrem laterálním. Lalok byl všade stehy pečlivými přišit. Operace vykonána dne 23. ledna; první obvazek sundán dne 2. února, a ježto rána všade per primam zahojena byla, stehy vyňaty. Už dne 18. února jsme zkoušeli s nemocnou, jak umí choditi. I byli jsme radostně překvapeni, vidouce, že nemocná stoupá beze vší bolesti a velmi obratně. Při tom jsme pozorovali, že nemocná pahýlem svým aktivně hýbati může. Patrně srostly šlachy svalů

dorsálních s jízvou tak pevně, a jízva zase s kostí, že dorsální flexe byla možnou za pomoci této jízvy. Musím ovšem přidati, že jsem s hlavičky talu chrupavku oškrábal a nerovnou plochu spodní téže kosti pilkou srovnal. Modifikace, již přítel můj prof. Tripier v Lyoně navrhl, a o níž v předešlé stati vzpomenuto (ponechání části calcanea pod talem), mohla v tomto případě také býti provedena; běželo mi však o to, přesvědčiti se, jak vypadne věc, prostěji byvši provedena.

Linhart, měv příležitosť pitvati pahýl, jejž byl dvě léta před tím utvořil a přesvědčiv se, že sloužil výborně, pronesl o této operaci Malgaigneově úsudek velmi nadšený: »Jsem toho přesvědčení,« dí, »že operace tato, ač vykoná-li se za indikací pravých, je skvělým obohacením chirurgie.« Přidávaje se k tomuto úsudku podotýkám, že moje zkušenosť svědči, že operaci tuto s výborným výsledkem možno provésti i tam, kde na straně mediální není dostatečné látky k vyříznutí laloku, tak že je třeba sáhnouti k laloku laterálnímu.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 17.

NĚKOLIK POKUSŮ
O PŮSOBENÍ TUBERCULÍNU
NA MORČATA
TUBERCULOSNÍMI LÁTKAMI NAKAŽENÁ

PODÁVA

PROF. DR. A. SPINA.

PŘEDLOŽENO DNE 15. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem j. Otty v Praze.

Z pokusů kliniky na nemocných konaných, lze tvrditi, že při tak zvané zevní tuberkulose, zejména však při ulcerosních tvarech lupu, Kochův tuberculín léčivě působí. Vředy luposní se tak rychle zacelují, jako doposud vnitřním léčením docíliti se nedalo. Že však základní nemoc tuberculínem odstraniti nelze, tomu nasvědčují recidivy brzo se dostavující. Dále vyplývá ze zkušeností při léčení lupu, nejvhodnějším to objectu pro klinická pozorování, že hojení vředů neděje se, jak Koch za to měl, necrotickým pochodem, nýbrž zánětem, jenž po vstříknutí tuberculínu v nemocném tkanivu se dostavuje.

O působení tuberculínu na tak zvanou chirurgickou tuberculosu, lze taktéž souditi, že v některých případech — tuberculosní mízní žlázy, píštěle a j. — taktéž zlepšení se dostavila, avšak příznivé výsledky léčení nepřiházely se tak pravidelně jako při lupu.

S největší jistotou lze se vysloviti o vlivu tuberculínu na tuberculosu plic pokročilou. Zde panuje jediné mínění, totiž že tuberculosa ta po injekcích se nemění, ba že stav nemocného se zhorší. Pokud se týče méně vyvinuté plicní tuberculosy, nelze s určitostí doposud žádného úsudku pronésti. Dvě skupiny kliniků stojí zde ostře proti sobě. Jedna tvrdí, že po injekcích tuberculosa se nápadně lepší, ba že i zaniká, druhá skupina má za to, že zde běží o nápravy, jichž staršími therapeutickými methodami právě tak docíliti lze, jako tuberculínem. »Tuberculín patří do laboratoří,« ozývalo se často na congressích a sjezdech lékařských, neb jen pokusem zvířecím dá se rozhodnouti, zda ono polepšení u souchotinářů pozorované jest tuberculínem podmíněno čili nic.

Z uvedeného patrno, že se jevilo naléhavou potřebou pokusy na zvířatech konati. Toť bylo také pro mne pohnutkou, že jsem milerád příležitosti použil, jež se velkomyslností neznámého dárce, věnujícího značný obnos II. třídě Akademie císaře Františka Josefa ku prozkoumání methody Kochovy, naskytla a jež pokusy tak nákladné umožnila.

Pokusy byly vesměs provedeny na morčatech, jelikož experimenty Kochovy, na základě kterýchž tvrdil, že tuberculosu možno tuberculínem léčiti, na týchž zvířatech konány byly. Taktéž jsem upotřebil téže methody léčivé, jak byla Kochem stanovena pro tuberculosu lidskou. Jen v jednom bodě jsem se odchýlil. Nenakazoval jsem zvířata čistými culturami, nýbrž tuberculosním materiálem zvířecím neb lidským. Příčiny, proč jsem tak jednal, jsou následující. Koch infikoval morčata culturami a léčil je tuberculínem. Pokusy tyto Koch

po dnes neuveřejnil. Nebyl bych tedy s to podati věcnou kritiku pokusů neznámých. Než to nebylo jedinou příčinou, že jsem methodu poměnil. Jak z Berlínských zpráv souditi lze, provedl Koch své pokusy na ohromném množství zvířat — mluví se dokonce o tisíci pokusů.

Jsou-li Kochovy pokusy správné, neprospělo by vědě, když bych ještě několik pokusů dodal. A že by ony pokusy tomu nenasvědčovaly, co Koch tvrdil, toť jsem váhal předpokládati. Byloť by ve vědeckém světě neslýchanou událostí, že by badatel tisícem zvířecích pokusů se zklamati dal, neb že by na základě nesprávných pokusů tak hluboko do socialních poměrů lidstva zasahující thesi byl pronésti mohl. K methodě Kochově vzhledem ku tuberculose *lidské* neměl jsem ovšem velké důvěry a dal jsem také ve svých přednáškách nedůvěře této výraz. Nepovažuji toto místo za vhodné, abych blíže vyložil, na čem mé pochybnosti spočívaly. Než popírati správnost pokusů na zvířatech konaných a pokusů tak často opakovaných, k tomu nebylo věcné příčiny. Bohužel vychází nyní publikací E. Pfuhla*) — jednoho ze spolupracovníků Kochových — na jevo, že také ony základní pokusy Kochovy nepotvrzují důvěru v ně kladenou.

Uvedené okolnosti opravňují dostatečně změnu v pokusech mnou konaných.

Než nejhlavnější příčina, že jsem zvířecím a lidským materialem pracoval, byla tato. Dle příčinosloví tuberculosy Kochem zbudovaného povstává tuberculosa tím, že zvíře nebo člověk zvířecí neb lidskou tuberculosní látkou se nakazí. Že by tuberculosa z nákazy čistými culturami svůj původ brala, o tom netřeba mluviti, neb cultury takové v přírodě se nenacházejí, cultury ty jsou výrobkem laboratoře, o kterém ani vůbec s určitostí tvrditi nelze, že by přesně odpovídal onomu agens, jež zavdává de natura podnět k tuberculosním pochodům lidským. Považoval jsem za vhodné studovati změnu tuberculosních processů takových, o kterých se domnívati můžeme, že asi stojí přirozené tuberculose nejblíže, a proto jsem nakazoval zvířata tuberculosní hmotou zvířecí neb lidskou.

Měl jsem nahodile v oné době, když se mi tuberculínu dostalo, v záloze tři nakažená morčata již v pokročilém období tuberculosy. Léčení tuberculínem mělo následující výsledky.

Protokol I.

Morče dorostlé. 7. listopadu 1890 injekce tuberkulosních chrchlů lidských pod kůži břišní na straně pravé — 15. ledna 1891, tedy 69 dní po infekci, započalo léčení tuberculínem.

Status praesens 15. ledna: Na straně pravé, kde nákaza byla provedena, nachází se infiltrát oblého tvaru, velikosti lískového ořechu, s kůží srostlý a pokrytý suchým příškvarem (*a*). Při tlaku vytekla na okraji strupu kapénka sýrovitého hnisu. Pod vředem dva menší uzly podkožní velikosti malého hrachu (*b*, *c*).

*) Zeitschrift für Hygiene XI. 2. Heft.

V třísle jedna zvětšená žláza velikosti bobu (*d*), v podpáždí pravém jedna zvětšená žláza velikosti hrachu (*e*). Téměř ve střední čáře břicha nedaleko od vředu *a* uzel podkožní velikosti hrachu (*f*), pokrytý malým příškvarem. Zvíře jinak normalní.

15. ledna	0·01	tuberculínu	
17. »	0·02	»	příškvar na vředu *a* je vlhký a odpadává.
18. »			příškvar odpadnul, rána (*a*) secernuje sýrovitý hnis, uzly *b*, *c*, *d*, *f* jsou o něco větší. Zvíře nežere a sedí schouleno v koutě klece, pročež injekce přerušeny a dávka zmenšena.
23. »	0·01	»	status idem
25. »	0·02	»	status idem, z uzlu *f* vytéká sýrovitá hmota
26. »	0·03	»	zvíře žere; jinak status idem
28. »	0·04	»	status idem
30. »	0·05	»	» »
1. února	0·10	»	» »
3. »	0·15	»	veškeré uzly jsou větší a kůže v okolí *a* a *f* červená
5. »	0·18	»	status idem
7. »	0·20	»	uzel *a* jest pokryt strupem, kůže bledá, jinak status idem
9. »	0·25	»	status idem
11. »	0·28	»	status idem
13. »	0·30	»	status idem
15. »	0·35	»	uzel *a* odměšuje opět sýrovitou hmotu, v levém třísle jedna žláza velikosti hrachu hmatna, uzel *f* mnohem menší, příškvar suchý a malý.
17. »	0·40	»	žláza *e* se zmenšila, uzel *a* jest také menší.
19. »	0·45	»	kůže v okolí *a* červená, žláza *e* opět o něco menší — žláza *d* jeví se co žláza podvojná, sestavená ze dvou těsně u sebe ležících žlaz, každá zvící malého hrachu.
21. »	0.48	»	status idem
23. »	0 50	»	kůže u *a* bledá, *a* příškvarem pokrytý, *e* opět o něco menší, žlázy *d* znatelně od sebe odloučené a snadně pošinutelné — místo uzlu *f* pouze nepatrná zatvrdlina, místo to je bezvlasé.
25. »	0·55	»	z *a* vytéká sýrovitý hnis, *b*, *c* o něco větší, žlázy u *d* o něco menší, žláza *e* téměř nehmatná, *f* úplně zajízveno — zvíře velmi hubené
27. »	0·60	»	status idem
1. března	0·65	»	» »
3. »	0·68	»	» »
5. »	0·8	»	status idem, zvíře dýše poněkud těžce

7.	března	0·6	tuberculínu	status idem
9.	»	0·8	»	dispnoë větší
11.	»	0·8	»	dispnoë nezměněna
13.	»	1·0	»	status idem
15.	»	1·2	»	» »
17.	»	1·25	»	» »

Jelikož žádné podstatné změny po tak velikých dávkách se již nedostavily, byly injekce skončeny. Zvíře zemřelo 25. března. Pitevní nález: uzel *a* jest menší než před 15. lednem, suchým příškvarem pokrytý, *b*, *c* jsou větší a sýrovité, žlázy odpovídající *d* jsou menší než hrachové zrno a sýrovité, žláza v podpáždí (*e*) jako jáhla velká a sýrovitá — *f* jeví se při pitvě pouze co zahnědlé místo. Plíce uzlíky téměř veskrz vyplněné, větší z nich jeví uprostřed zažloutlou rozvětvenou kresbu, slezina nápadně veliká, červenohnědé barvy, s uzlíky, játra zvětšená, barvy červenohnědé, obsahují velmi četné malé uzlíčky nepravidelného tvaru, barvy bělavé. Nekrotická místa makroskopické velikosti ani v játrách ani ve slezině.

Z uvedeného vyplývá, že zvíře vyléčeno nebylo, naopak povšechná tuberculosa byla velmi značně vyvinuta, zejména však v plících. Pozoruhodno jest, že vřed na infikovaném místě po předcházející nadkrevnosti kůže se zmenšil, že vřed *f* se úplně zacelil, že žláza v podpáždí pravém se stala nehmatnou, a že žlázy *d* patrně z prvku zdánlivě žlázu jednu tvořící od sebe se oddělily a staly se pošinutelnými.

Pokus právě sdělený jest repraesentantem 6 pokusů za analogických podmínek s týmže výsledkem konaných. Změny uvedené v protokolu I. pozoroval jsem častěji, než neobjevovaly se tak pravidelně co do intensity, času a velikosti dávky, že by se dalo předpovídati, co se po injekci dostaví. Malé vředy se někdy zajízvily, jindy zase nikoliv; nadkrevnosť kůže a pouzder uzlových byla po malých dávkách v některých případech zřejmější než po dávkách velkých; uzel, který se bez léčení dlouho provaliti nechtěl, učinil tak po injekci. V jiných případech opět nebyl jsem s to, provalení vyvolati vzdor velké dávce ani při uzlech, nad kterýmiž kůže již valně ztenčena byla.

Považuji za nutné, některé podrobnosti z těchto pokusů vytknouti. Léčil jsem jedno morče, samici, nakažené sýrovitou hmotou z morčete tuberculosního 46 dní po infekci průběhem 47 dní tak, že jsem dávkou 0·4 započal a dávkou 1·0 skončil. Při ohledání zvířete nahmatal jsem po 20. injekci 5 tvrdších tělisek velikosti lískového ořechu v břiše a domníval jsem se, že zvíře bude březí. Když pak jednoho dne jsem napočítal 7 takových výtvarů, pochyboval jsem, že by zvíře tolik embryonů v sobě chovati mohlo. Abych se přesvědčil, oč zde jde, bylo zvíře decapitací usmrceno a tu jsem pozoroval velmi vyvinutou tuberculosu plic, jater a sleziny a na okruží a velké oponě 7 sýrovitých uzlů velikosti lískového ořechu.*) Zvíře nebylo tudíž březí. Nálezem tímto jsem byl překvapen, neb nikdy jsem neviděl u tuberculosních morčat tak ohromně vyvinuté tuberculosní uzly, jako v tomto případě.

*) Uzly obsahovaly tuberculosní mikroby.

Ve dvou jiných případech pozoroval jsem u dvou morčat, která sýrovitou hmotou z tuberculosních morčat nakažena a 15. dne po infekci tuberculínem léčena byla, a při první injekci 0·05 a při druhé 0·07 obdržela, po injekci, sotva že zvíře ku injekci připevněné, odvázáno bylo, clonické křeče ve všech končetinách. Zvířata nemohla státi, ležela stranou a pohybovala končetinami, jakoby kvapem utíkati chtěla. Po třetí injekci (0·07) dostavily se tyto mimovolné pohyby opětně, byly však slabší a při injekci 4. (0·07) dostavilo se u zvířat slabé škubání celého těla, zvíře mohlo však již na nohou státi. Demonstroval jsem tyto změny několika pánům v ústavě přítomným. Od té doby však jsem již takových záchvatů v pokusech úplně analogickým způsobem připravených neviděl; pouze mírné škubání tělem lze často pozorovati.

Příčina zjevu vytknutého mohla jen v jakosti tuberculínu spočívati a dá se proto souditi, že v onom čase — pokusy ty se konaly mezi 12. prosincem 1890 až do 29. ledna 1891 — tuberculín jiného složení byl.

Také následující pokus ukazuje k tomu, že tuberculín nebude asi vždy stejného lučebného složení. Týž týká se morčcte, které 7. listopadu 1890 tuberculosním sputem nakaženo a od 15. ledna 1891 léčeno bylo. Zvíře bylo tedy 59 dní nemocné a když co první dávku 0·08 obdrželo, nemohlo zadních končetin při chůzi upotřebiti a dělalo dojem ataktického zvířete. Ataxie se později o něco zlepšila tak, že zvíře zase normálně chodilo. Když však při stupňování injekcí 10. února zvířeti 0·20 vstříknuto bylo, stala se levá noha opět k chůzi neschopnou.

Mimo to musím ještě uvésti, že u jednoho morčete — nakaženého sýrovitou hmotou z tuberculosního morčete 2. prosince 1890 — u kterého léčení 41. dne po infekci dávkou 0·02 započalo, které celkem v průběhu 9 dní 0·44 obdrželo a pak usmrceno bylo, tubercule plicní velmi zřetelně hyperaemickým lemem obklopeny byly. Dostavila se tedy v tomto případě ona hyperaemie, na kterou se při lečbě tuberculínem tak velká váha klade. Nespatřil jsem ji však již nikdy více.

Vzhledem ku chování se teploty, mohu celkem na základě svých pokusů potvrditi udání Pfuhlova. Nejnižší teplotu pozoroval jsem u oněch dříve uvedených morčat zachvácených křečemi; teplota klesla až na 36°, vystoupila však po záchvatu až na 40·2 a 40·3.

Dále budiž uvedeno, že sýrovitý odměšek nejevil větší množství bacillů tuberculosních po léčení, než před ním; nedostavuje se tedy zde tak často u člověka lupem stiženého pozorované rozmnožení bacillů po injekci tuberculínem.

Konečně jest mi ještě sděliti, že jedno morče zhynulo následkem injekcí tuberculínových a to tím způsobem, že se jeden sýrovitý uzel provalil do dutiny břišní.

Aby se nemohlo namítati, že v uvedených případech s léčením se započalo pozdě, vstřikoval jsem tuberculín několik dní po infekci.

Budiž zde jeden pokus protokolárně uveden.

Protokol II.

Morče — 4 měsíce staré. 17. února infikovala se rána na pravé straně břicha tuberculosním sputem tím způsobem, že se platinová lopatka do chrchlů ponořená do rány zavedla. 26. února, tedy devět dní po nákaze, počalo se s léčením.

Status praesens 26. února: Rána kožní malým suchým příškvarem pokryta. Jinak je zvíře úplně normální.

26. února	0·02	tuberculínu	
28. »	0·04	»	je v okolí rány jedna žláza hmatná.
1. března	0·05	»	očkované místo je něco tvrdší.
3. »	0·08	»	očkované místo naduřeno.
5. »	0·10	»	status idem.
7. »	0·15	»	žláza v okolí očkovaného místa větší.
9. »	0·20	»	ve třísle pravém dvě žlázy hmatné, každá z nich veliká asi jako malý brok, očkované místo naduřeno, kůže nad ním a v okolí červená.
11. »	0·25	»	uzel na očkovaném místě jeví malý otvor, z kteréhož vytéká sýrovitý hnis.
13. »	0·30	»	status idem.
15. »	0·35	»	žlázy u vředu i ve třísle větší.
17. »	0·40	»	status idem.
19. »	0·45	»	kůže u vředu bledá a tento pokryt příškvarem, vřed celkem menší žlázy ve třísle a u vředu větší.
21. »	0·50	»	status idem.
23. »	0·50	»	» »
25. »	0·52	»	uzel na očkovaném místě větší — kůže bledá — strup odpadl.
27. »	0·58	»	vřed pokrytý příškvarem.
29. »	0·60	»	vřed odměšuje sýrovitý hnis, žlázy in inguine, jako hrách veliké, žláza u vředu jako zrno hrachové.
31. »	0·60	»	status idem.
2. dubna	0·62	»	» »

Jelikož zvíře žádných příznaků lepšení neobjevovalo, byly injekce zastaveny. Zvíře zhynulo 28. dubna.

Pitevní nález: Uzel na očkovaném místě strupem pokrytý, sýrovitý, žláza pod ním jako hrách veliká a sýrovitá, žlázy in inguine, každá jako hrachové zrno velká a sýrovitá. Plíce obsahují četné uzlíky šedé, uprostřed sýrovité; játra velká, barvy křesacího kamene s četnými uzlíčky; slezina nápadně naduřená obsahuje četné uzly. Játra i slezina neobsahují nekrotických míst.

Z uvedeného zjevno, že také v tomto případě, ač léčení záhy počato a velkých dávek použito bylo, tuberculosní pochod vysokého stupně dosáhl.

Pokusil jsem se ještě o to dávky zveličiti, a to u jednoho morčete 3 dní po infekci provedené právě tak, jak v protokoln II. naznačeno bylo. Léčení bylo zahájeno dávkou 0·2 tuberculínu. Ob den dostalo zvíře 0·1 více, až

sem dosáhl 0·5; tato dávka byla 10kráte opakována. Pak bylo injikováno 3kráte 1·0 a dvakráte 1·25. Zvíře, u kterého se vřed na očkovaném místě utvořil a v jehož okolí dvě žlázy a v třísle celý shluk žlaz naduřil, bylo 3 dní po skončených injekcích zabito. Při pitvě byly žlázy sýrovité, plíce obsahovaly četné uzlíky, slezina a játra naduřena. Na oněch místech, kde byly poslední 2 injekce provedeny, byla kůže v příškvar proměněna.

Sesilování dávek neprospělo tedy také tomuto morčeti nikterak.

Konečně jsem provedl ještě jednu variaci. Vstřikoval jsem tuberculín před nákazou a pokračoval po nákaze v injekcích dále. Pokus měl následující průběh.

Protokol III.

Morče 5 měsíců staré.

7.	května	0·5	tuberculínu	
9.	»	0·5	»	
11.	»	0·52	»	
13.	»	0·53	»	
15.	»	0·55	»	
16.	»			Zvíře očkováno sýrovitou hmotou z podkožních uzlů morčete, které 14. března bylo nakaženo tuberculosním sputem lidským.
17.	»	0·56	»	rána slepena
19.	»	0·57	»	
21.	»	0·58	»	
23.	»	0·59	»	
25.	»	0·60	»	
26.	»	0·61	»	v tomto poměru bylo s injekcemi dále pokračováno. 31. května bylo očkované místo tvrdé a opuchlé; jedna regionární žláza jako hrách veliká; dvě žlázy v třísle, rovněž takové velikosti
1.	června	0·70	»	
3.	»	0·71	»	kůže nad uzlem a v okolí červená
5.	»	0·72	»	
7.	»	0·73	»	uzel na očkovaném místě secernuje malým otvorem sýrovitou hmotu a zmenšil se následkem hojného odměšování nápadně
9.	»	0·74	»	žlázy větší, uzel příškvarem pokrytý
10.	»	0·75	»	uzel opětně větší, strupem pokrytý
13.	»	0·76	»	uzel odměšuje, žlázy větší, in inguine jako bob
15.	»	0·77	»	status idem, v podpáždí pravém jedna válcovitá žláza hmatná
17.	»	0·78	»	uzel odměšuje a je zase o něco menší

19. června	0·78	tuberculínu	uzel suchým strupem pokryt, žlázy in inguine nepošinutelny, s kůží spojeny. Žláza u uzlu na očkovaném místě se provalila
21.	»	0·79	» status idem
23.	»	0·80	» jedna žláza in inguine se provalila, kůže v okolí červená, očkované místo mnohem menší a suchým malým příškvarem pokryto
25.	»	0·85	» status idem
27.	»	0·90	» uzel in inguine menší a strupem pokrytý; uzel na očkovaném místě jen nepatrnou tvrdostí znatelný
29.	»	1·0	» status idem, žláza u uzlu na očkovaném místě velmi malá, místo to malým příškvarem pokryto
1. července	1·0		» očkované místo bez strupu, zajízvené; uzel inguinální silně secernuje, žláza axillární mnohem větší
3.	»	1·0	» tam, kde poslední injekce konána byla, kůže ve příškvar proměněna — hnisající žláza na očkovaném místě úplně zanikla, a místo to zajízveno. Žláza tříselná odměšuje málo, toliko při tlaku; jest však o něco větší
5.	»	zvíře zabito.	

Pitevní nález: Plíce velmi bohaté tuberculemi, taktéž játra i slezina. Játra i slezina zvětšená, tmavohnědé barvy.

Zvíře nebylo tudíž vyléčeno, pouze očkované místo a jedna regionární žláza přestaly odměšovati a zajízvily se, než zvířeti to neprospělo. Zároveň podává pokus tento důkaz, že zvíře injekcí tuberculínu immunním se nestalo, ač před nakažením 2·90 tuberculínu do těla vpraveno bylo.

* * *

Povstává nyní otázka, které z vylíčených změn lze přičísti tuberculínu. Považuji za vhodné, příznaky uvedené každý o sobě posouditi, aby působení tuberculínu se objasnilo.

Chování se místa nakaženého: U morčat lidským neb zvířecím materiálem nakažených a neléčených tvoří se infiltrat, který se sýrovitě rozpadává. Takto utvoří se zde vřed se zaokrouhleným tvrdým okrajem, z kteréhož hmota sýrovitá vytéká. Provalením uzlu se infiltrát zmenší, a vybavila-li se takto sýrovitá hmota, pokrývá se vřed příškvarem.

Než mezitím infiltratu na periferii vředu přibylo. Infiltrat ten opět rozpadává, příškvar odpadne a vřed odměšuje opět sýrovitou hmotu.. Tato hra opakuje se až do smrti zvířete. Než pochod vylíčený má také své odchylky, vřed může se, když se infiltrat váhavě šíří, také zajízviti. Místo vypadá pak

jako zajízvená rána, než hmatem lze se přesvědčiti, že úplná náprava se nedostavila, neb ono místo je tvrdší, než zdravé okolí. Viděl jsem — ovšem jen v řídkých případech — i tuto tvrdost unikati.

U zvířat léčených tuberculínem rozpadává infiltrat mnohem rychleji a sýrovitá hmota vytéká rychleji z rány. Než také zde může infiltrat zmohutněti. Zajízvení rány není proto u léčených zvířat zjevem pravidelným, jen častějším než u zvířat neléčených.*)

Příčinou rychlejšího rozpadu takových uzlů jest asi zánět, který po injekcích se v kůži nad uzlem a v okolí jeho dostavuje. Pozoroval jsem častěji, že v zápětí hyperaemie se dostavilo větší napnutí místa nemocného a že brzo na to sekrece sýrovité hmoty se dostavila.

Příznaky tyto podporují náhled klinikův zjednaný pozorováním zevní tuberculosy u lidí, léčených tuberculínem, že látka tato na nemocném místě vyvolává zánětlivé změny. Než také ona hyperaemie není pravidelným zjevem u léčených zvířat. U neléčených jsem ji však nikdy nepozoroval. Jestiť jistě injekcemi vyvolána.

Objeví-li se menší uzlíček v okolí nakaženého místa, pak se chová u neléčených zvířat téměř tak, jako uzel prvotní. Rozpadne, vyrábí sýrovitý hnis, zajízví se neb také ne. U zvířat léčených viděl jsem často zajízvení takových menších uzlíků, ba byly-li injekce konány před rozpadem, pozoroval jsem, jak z protokolů uvedených vyplývá, uniknutí, tudíž resorpci takových uzlů; povstala pak zde úplná restitutio in integrum.

Chování se mízních žlaz u zvířat neléčených jest asi následující. Žlázy regionární i vzdálenější po infekci naduřují a tvrdnou. Naduřením se přibližují sousední žlázy k sobě a spojí se periadenitidou. Srostly-li s kůží a pokračuje-li zduření, rozpadávají, provalují se kůží a zavdávají podnět ku tvoření se takových vředů, jak na místě infekce popsány byly. Neprovalí-li se shluk naduřených žlaz, pak lze, zejména v období, když zvíře hubne, někdy pozorovati, že žlázy zmenšujíce se, od sebe se opět vzdalují a pod kůží velmi volně pohybovati se dají.

Podobné chování jeví žlázy zvířat léčených. Pošinutelnost žlaz dříve fixovaných nelze tedy přičítati pouze působení tuberculínu. Než na infiltrat žlaz, deroucí se kůží, působí tuberculín tak, jako na infiltraty na místě infikovaném. Malé naduřené žlázky mohou někdy po injekcích zaniknouti. Neviděl jsem nic podobného u zvířat neléčených. Žlázy se zde sice také zmenšují, ale ne tak, že by hmatu unikly.

Co se týče působení tuberculínu na tuberculosu vnitřní — tuberculosu plic, jater a sleziny — tu lze tvrditi, že je nepatrné.

Kontrolní zvířata jevila často méně vyvinutou tuberculosu plic, než zvířata léčená, tuberculosa jater a sleziny nebyla u »léčených« pokročilejší, avšak také ne slabší. Jen jednou viděl jsem u léčeného zvířete méně vyvinutou tuberculosu jater a sleziny než u morčete kontrolního, za to byly plíce mnohem silněji nemocné.

*) Také Pfuhl nedocílil pravidelného tvoření se jizev.

Pfuhl se domnívá, že tuberculosa plicní za tou příčinou se u léčených zvířat nepřetržitě vyvinuje, proto, že se zde reactivní hyperaemie nedostavuje. Než uvedl jsem dříve pokus, ve kterém zřetelná nadkrevnost kolem uzlíčků plicních se dostavila.

Na plicní tuberculosu nemá tudíž tuberculín žádného léčivého vlivu a právě zde by se musil jeviti, když by co léčivo považován býti měl. Zvířata léčená i neléčená umírají. Toť konstatoval také Pfuhl. Zda morčata — jak Pfuhl tvrdí — déle žijou, když byla léčena, nemohu rozhodnouti.

Nechci však tvrzení toto popírati. Ale prodloužování života u morčat nemá pro člověka, ba jak Pfuhl tvrdí, ani pro morče nějaké výhody. U morčat déle žijících vyvinuje se tuberculosa úžasnou měrou, a co se člověka týče, dokázal Virchow, že tuberculín smrť často urychluje. Prodloužení života u morčat nelze doposud také velkou theoretickou cenu přikládati, jelikož za příčinu jeho může býti považováno příznivé působení tuberculínu na zevní affekce, zejména na odstranění sýrovitého hnisu z těla zvířete; neb, že by mikroby přímým působením tuberculínu se zahubily, toť nelze — jak Koch sám udává — tvrditi.

Má-li tedy *zvířecím* pokusem rozhodnuto býti, zda Kochova léčební methoda tuberculosu lidskou odstraniti může, lze tvrditi, že k tomu způsobilá není.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 18.

O ÚČINKU
TUBERCULINU KOCHII.

PODÁVÁ

PROF. D^R J. HLAVA.

PŘEDLOŽENO DNE 15. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Nezapomenutelný zůstane každému značný rozruch ve světě vědeckém i ovšem laickém, jakmile žurnalistika první zprávy přinesla o nalezeném arcanum proti tuberkulose — nemoci to, která snad nejvíce decimuje pokolení lidské. Ano, i když R. Koch prvou svou zprávu v »Deutsche mediz. Wochenschrift« uveřejnil, neutuchlo nadšení, neb prostředek proti tuberkulose použitý jaksi napodobovati měl process hojení se tuberkulosy spontánní. Prostředkem vyvolána byla reakce kolem i v tuberkulosních ložiskách dosti značná. Ovšem ale i celý organismus příliš markantně reagoval proti minimálním dosím tuberkulinu. Koch experimentoval na člověku i vybral si tuberkulosu kožní — lupus — jako objekt nejvhodnější. Resultáty zdály se býti velice uspokojivé — alespoň na počátku — neb skutečně luposní tkaň se exfoliovala a zůstavila tkaň jizvící se. Ptáme-li se však, proč experimentelní resultáty při lupu dosažené i k ostatním formám tuberkulosy byly přeneseny, tu nenalézáme než nějaké theoretické dedukce. Doklad experimentelní na zvířatech schází, i Koch udává jediné faktum experimentelní, na kterém zbudoval therapii lupu. Vypozoroval totiž, že infikujeme-li tuberkulosní morče znova tuberkulosou, místo prvotního vpichu nekrotisuje, a jest reaktivním zánětem eliminováno. Byla na snadě dedukce, že tak účinkují asi produkty bacillů tuberkulosních. Jelikož Pasteurem nalezeno vyrábění těchto produktů ze půd tekutých — použil Koch s jistou modifikací půd takových ku kultivování bacillů tuberkulosních.

Nelze upříti, že spočívá v pozorování nekrosy tuberkulosně infikovaného vpichu i v dedukcích z těchto momentů jakož ve způsobu kultivování bacillů tuberkulosních po půdách tekutých veliká zásluha bakteriologa R. Kocha. — I připustiti můžeme, že z toho dedukovaná applikace therapeutická na lupus jest jaksi odůvodněna experimentem — ale rozšíření téže methody therapeutické na tuberkulosu jiných orgánů není odůvodněno. Tato mezera ve sdělení Kocha 1. i 2. všeobecně je cítěna i očekávalo se, že Koch později své experimenty jako doklad uveřejní. — To se však nestalo. — Proto byly scházející experimenty, ukazující účinek tuberkulinu na tuberkulosu jiných orgánů, od jiných autorů provedeny, tak Baumgartenem, Rousem a Klebsem.

I my, díky prostředkům, které nám velkodušným maecenášem prostřednictvím Akademie poskytnuty byly, mohli jsme lednem 1891 počínaje experimenty o účinku tuberculinu Kochii na zvířatech podniknouti, o nichž níže referovati chceme docela krátce, ježto věc tato nemá již aktuální důležitosti.

Dříve však budiž vytknuto stanovisko naše v otázce o tuberkulose. Podobá se pravdě, že asi pojem anatomický tuberkulosy u člověka, hlavně ale u zvířat, nekryje se s pojmem aetiologickým.

V jisté řadě — ve většině můžeme říci — tuberkulosy lidské nalézáme Kochovy bacilly tuberkulosní, jež v aetiologické souvislosti s processem tímto jsou. V jiné řadě — tuberkulose velice podobných processů — kteréž hlavně u zvířat jsou pozorovány (Manfredi, Eberth, Pfeiffer) i snad u člověka přichází (Vignal, Malassez, Eppinger), nenalézáme Kochův bacillus tuberkulosní, anobrž jiné bakterie, ku př. Bacillus pseudotuberculosus Eberth, Pfeiffer, Cladothrix asteroides Eppinger atd. Jako sepsis tak i tuberkulosa nezdá se býti aetiologickou jednotkou. — Rozeznáváme tudíž *tuberkulosu* a *pseudotuberkulosu*.

Experimenty níže uvedené ponejvíce provedeny s tuberculinem Kochii, jejž za drahé peníze Dr. Libbertz rozesýlá. Částečně použili jsme též z našich kultur bacillů tuberkulosních zhotoveného tuberkulinu, zhotoveného dle Hueppe a Scholleho udání, leč týž je co do účinku daleko slabším než Kochův tuberkulin. — V jednotlivých případech zhotovili jsme si dle Klebse tuberculinum depuratum.

Zkoušeli jsme účinek v trojím směru: 1. jednak na pokročilou tuberkulosu, 2. na vznikající tuberkulosu, tedy svěží, 3. konečně hodnost immuniční.

ad 1. Účinek tuberculinu Kochii na pokročilou tuberkulosu byl hojně konstatován na člověku a souhlasné zprávy pathologických anatomů s Virchowem i Cornilem v čele v ten smysl svědčí, že tuberculin Kochii u člověka stiženého pokročilou formou tuberkulosy neúčinkuje tak, jak se očekávalo Neb jak reaktivní zánět kolem tuberkulosních ložisek, tak i změknutí těchto jsou životu jednak bezprostředně nebezpečné, aneb ku znovu vzplanutí processu tuberkulosního vedou. Jedině na oku, kůži a u kloubových affekcí lze pozorovati jakési zlepšení, zhojení.

Experiment na zvířeti provedl jsem proto jen jednou, a tu morčeti s pokročilou tuberkulosou stačilo množství 0·01 gr. tuberculini Kochii, aby urychlena byla smrť jeho. Zajímavo, že makroskopicky reakce kolem tuberkulosních ložisek pozorována nebyla. Pozoruhodný je nastalý kollaps i sklesnutí temperatury ze 38·9° na 33·4° C.

ad 2. V následujících šesti řadách experiment tím způsobem byl zařízen, že očkováno bylo různým materiálem, a sice: 1. krví z miliární tuberkulosy mladého muže, jež obsahovala velké množství bacillů tuberkulosních; 2. chrchlem tuberkulosním; 3. bacilly tuberkulosními z kultur našich na glycerinovaném agaru; 4. obsahem sesýrovatělých žlaz; 5. obsahem sesýrovatělého ložiska v pateři.

Ve všech případech vyčkáno nejméně 14 dní, načež teprve započato s léčením, neb vyčkali jsme, až zjevné známky tuberkulosy (zduření žlaz, infiltrát ve vpichu) se objevily. Zkušenosť experimentální ukazuje, že skutečně za 14 dní alespoň u morčat možno konstatovati tuberkulosu počínající. Injekce kochinu prováděna jest buď malými stoupajícími dosemi, aneb velkými dosemi, i shledáno, že při stoupání až i 0·8 *kcm* kochinu tuberkulosnímu zvířeti vstříknouti můžeme.

Co se týká resultátu dosaženého, předem jest nám zaznamenati, že zhynula některá zvířata záhy po dvou nebo více injekcích, aniž příčina mohla býti konstatována. Nezbylo, než obviniti jedovatosť Kochinu. Jiná zvířata zhynula od 24. až do 105. dne po prvotní infekci tuberkulosou.

I není tudíž výsledek i co do udržení na životě valný, i jest nám hlavně klásti vinu na jedovatosť praeparátu.

Co se týká nyní průběhu při léčení se vyskytujícího, nemohu jinak, než potvrditi udání Kocha a uvedených experimentatorů.

Temperatura docela zjevně vystupuje po injekci. Ve vpichu prvotném, kde tuberkulosní proces nejčastěji se lokalisuje, skutečně pozorovati můžeme některé změny. Je-li infiltrát pevný a kůží ještě pokrytý, rychle měkne. Byl-li již infiltrát tuberkulosní se prodral kůží, někdy pozorována lehounká hyperaemie okrajů a skutečně konstatováno někdy zmenšení se tuberkulosního vředu i granulování nastavší. Podobně viděli jsme v případě jednom, kde žlázy inguinální byly změkly a na venek se byly provalily, jakousi tendenci ku granulování.

Úplné zmizení již infiltrovaných žlaz zejména inguinálních pozorováno nebylo, zmenšení jich v některých případech. Co se váhy týká, tu všeobecně zjevno bylo rapidní ubývání následkem hubnutí zvířat.

Nálezy pitevní na zvířatech zašlých byly různé. U některých neviděli jsme makroskopicky žádných změn, za to mikroskopicky bacilly tuberkulosní v cevách, játrách a slezině se nalézaly, aneb byly již v orgánech miliární uzlíky tuberkulosní. U jiných zvířat bylo již makroskopicky lze konstatovati tuberkulosu, která buďto v uzlíčkách miliárních anebo jak infiltráty sýrovité se jevila, a většinou na dutinu břišní a její orgány rozšířena, zřídka v plících aneb žlazách substernálních a axillárních přicházela. Nastala-li smrť záhy do 3 neděl, rozdíl ku tuberkulosním morčatům — svědkům z téhož času — nebyl valný. Jedině co do počtu uzlíků (makroskopicky) mohlo se konstatovati jakési minus u kochinem většími dosemi léčených. Nastala-li smrť však po 4 nedělích 52., 60. nebo 105. dne, tu zřetelný je rozdíl ku tuberkulosním morčatům — svědkům. Tuberkulosní process nezdá se býti tak rozsáhlý, zejména co do počtu ložisek a rozsahu infiltrátu, a ložiska tuberkulosní zdají se býti zmenšená, scvrklá a jako sušší, což zejména o slezině platí.

Reakci kolem těchto ložisek makroskopicky nemohl jsem rozpoznati, jedině kolem ložiska v plících široký břidlicovitý lem byl zjevný.

Dle makroskopického obrazu soudě, bylo v několika případech lze konstatovati ne snad vyhojení, anobrž spíše jakousi retardaci ve vývinu tuberkulosy, zejména ve slezině. Připomenouti sluší, že několikráte pozorovali jsme zvláštní bílé skvrny v játrách, které se mikroskopicky jako nekrosy tkaně jaterní objevily.

Prohlížíme-li nyní obrazy mikroskopické z těchto případů, postrádáme u většiny tuberkulosních produktů nějaké regressivní změny. Většina z nich má zjev *svěžích uzlíků* složených z epitheloidních elementův i buněk obrovských zejména ve slezině, kdežto v játrách více lymphoidních elementů uzlí-

kům je přimíseno. Toliko v případech dlouhého trvání (52—105 dní) tuberkulosy vidíme v uzlech sleziny rozsáhlý rozpad všech elementův až na nepatrný lem elementů lymphoidních, mezi nimiž i elementy vřetenovité se nalézají. V těchže případech pak vidíme hojnosť pigmentu ve slezině hroudovitého, původu krevního, který přece jen předcházející změny krevní aneb oběhu krevního hlásá. Podobně ložiska v kůži, vazivu podkožním a po žlazách inguinálních jeví velice pokročilé změny — většinou úplný rozpad — kolliquaci, kolem kteréhož na některých praeparátech jeví se haemorrhagicko-fibrinosní zánět, jak při lupu byl popsán.

Je zjevno, že tuberkulin nemůže úplně zameziti vývin *nové erupce tuberkulosní*, vždyť neničí bacilly tuberkulosní, a tyto daly se barvením ve všech uvedených ložiskách více nebo méně zřejmě dokázati. Není divu, že nenalezli jsme reakci na tkani tuberkulosní, ano většinou o svěží produkty tuberkulosní se jednalo. Co se tkne oněch větších jako sušších uzlů tuberkulosních ve slezině, spíše bych pomýšlel na inspissaci změklého ložiska tuberkulosního, jak dosti často u samo sebou se hojící tuberkulosy vidíme. Že však i ten modus hojení jest organismu nebezpečný, vysvítá z toho, že bacilly tuberkulosní v takých ložiskách se nalézají a že často miliární erupce odtud pojíti může.

Jelikož však, jak výše uvedeno, přece jen u porovnání s tuberkulosním morčetem svědkem tuberkulosa u kochinovaného morčete někdy není tak rozšířena, nelze si jinak vysvětliti účinek tuberculinu Kochii, než že tyto produkty bakteriellní zamezují ještě rychlejší rozšiřování se bacillů tuberkulosních, zároveň však ale také otravují i podlomují vitální energii organismu.

Co se týká účinku tuberkulinu našeho neb i tuberculini depurati (zhotoveného z tuberculini Kochii dle udání Klebse na posledním kongressu ve Wiesbadenu 1891), uvádím, že i tyto prostředky stejným způsobem nezamezily vývin tuberkulosy u očkovaných zvířat.

Ku konci chci ještě upozorniti na nálezy histologické v jiných orgánech. Zejména v plících, pak ve slezině, tak i velice často v ledvinách mohli jsme konstatovati rozsáhlou hyperaemii ano i haemorrhagie aneb residua této ve formě přehojného pigmentu. V ledvině pak několikráte setkali jsme se se zvápenatěním epithelu v kanálkách točitých — zjev to, který na valné porušení epithelu poukazuje. V některých případech epithel dosti značně parenchymatosně byl degenerován. Degenerativní změny epithelu mohly by se vztahovati ku účinku toxickému kochinu, avšak tyto i pak zvápenatění epithelií kanálků spíše glycerinovou přísadou tub. jsou vyvolány.

ad 3. Immunisačních pokusů provedli jsme řady tři, jimž většinou tuberculinum Kochii, pak náš tuberkulin i Klebsův byl praeventivně očkován. K immunisaci užito 1—6 cm^3 tuberkulinu Kochova a tomu asi odpovídající quantum tuberkulinu našeho i Klebse, načež zvířata infikována jsou tuberkulosními hmotami.

Od 36. dne počínaje do 3 měsíců byla zvířata zabita i tu shledáno, že, užilo-li se k immunici tuberculinu Kochii, tuberkulosa se přece vyvinula, ovšem

ale ne v takové míře, jako u morčete svědka, co do makroskopického vzhledu, kdežto náš tuberkulin i Klebsův takto ani neúčinkoval.

Při mikroskopickém vyšetření shledány v orgánech vedle starých ložisek tuberkulosních velice četné uzlíky tuberkulosní.

Shrneme-li svá pozorování na zvířatech konaná o účinku tuberculinu Kochii, můžeme říci:

1. Ni malé, ni velké dose tuberculinu Kochii nevyhojí vyvinuvší se tuberkulosu svěží.
2. Retardaci ve vývinu tuberkulosy v dutině břišní i jejích orgánech lze někdy konstatovati.
3. Úplnou immunisaci praeventivním očkováním tuberculinem Kochii nelze docíliti; opětně jen jakousi retardaci ve vývinu tuberkulosy.
4. Onu retardaci ve vývinu nelze považovati za hojení se, jelikož může býti zřídlem nové erupce a spojena je často mikroskopicky se svěží erupcí miliárních uzlíků.
5. Tuberculinum Kochii účinkuje zhoubně na zvířata, přivádějíc předčasnou smrť.
6. Tuberculinum Kochii přivádí hyperaemii a haemorrhagii vnitřních orgánů; parenchymatosní degeneraci epithelií kanálků točitých; zvápenatění těchto degenerovaných epithelií, i nekrosy v játrách, které se někdy vyskytují, spíše na účinek glycerinu dá se vztahovati.
7. Reakce zánětlivá je znatelna jedině v plících a na kůži, kdežto v peritoneum a v játrách alespoň makroskopicky nevystupuje. Zdá se, že reakce mikroskopická vystupuje jen kolem starších ložisek tuberkulosních, nikoli však kolem svěžích uzlíků miliárních.
8. Effekt therapeutický tuberculinum ve složení nynějším asi nemá trvalý a valný, jelikož je látkou příliš jedovatou.

Experimenty.

I. Účinek tuberkulinu na pokročilou tuberkulosu u morčete.

Vykonán jediný pokus, ana bez toho tato otázka na lidech s pokročilou tuberkulosou v nesčetných experimentech negativně jest rozluštěna.

Morče 580 gramů vážící bylo 24. listopadu 1890 očkováno tuberkulosní hmotou ze genitální tuberkulosy pocházející. Dne 29. ledna 1891 je schřadlé, váží 425 gramů, má žlázy zduřené i obtížně dýchá.

Po injekci 0·01 *kcm* tuberkulinu pod kůži dostavuje se značný kollaps. Zvíře se zotavuje, temperatura vystoupí na 38·4° C.

Druhý den však pošlo ve značném kollapsu při anální temperatuře + 33·1° C.

Při sekci nalézáme rozsáhlou tuberkulosu dutiny břišní, sleziny, jater, žlaz bez makroskopické reakce; oboustranný hydrothorax; v játrách mimo to bílé skvrny. Při mikroskopickém vyšetření není viděti reakce kolem produktů tuberkulosních — jen všeobecná hyperaemie se jeví — v játrách pak nalézáme ložiska nekrotická týkající se buněk jaterních.

II. Účinek tuberkulinu na tuberkulosu svěží

Vykonány experimentů řady *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

a) 27./I. 91. očkovány krví intraperitoneálně 3 králíci, 6 morčat. Krev pocházela z miliární tuberkulosy a obsahovala mnoho bacillů tuberkulosních.

b) 14./II. 91. očkováno podkožně sýrovitými hmotami ze chrchlí tuberkulosních 10 morčat.

c) 17. II. 91. očkováni bacilly tuberkulosními z našich kultur na glycerinovaném agaru per venam auricularem 3 králíci.

d) 4./III. 91. očkováni obsahem žlázy tuberkulosní obsahující množství bacillů tuberkulosních podkožně 3 králíci, 6 morčat.

e) 1./IV. 91. očkována byla bacilly tuberkulosními 3 morčata z kultur. Morče 1. a 3. do dutiny břišní, morče 2. do dutiny hrudní.

f) 8. V. 91. očkováno bylo intraperitoneálně 9 morčat a 6 králíků hmotami sýrovitými tuberkulosními z ostitidy tuberkulosní.

Celkem očkováno 49 zvířat, z nichž 9 nebylo léčeno tuberkulinem, ježto sloužila jako kontrolní zvířata. Léčení započalo asi 14. den od prvotné inokulace anebo později, když se daly známky počínající tuberkulosy zjistiti. Injekce tuberculinu Kochii, našeho Klebsova dála se podkožně i jest nám zaznamenati, že velké dose tuberkulinu značnou bolestivost způsobovaly. Reakce co do vystoupení temperatury skoro vždy se dala dokázati.

Resultáty jsou následující:

a) V této řadě podáváno tuberculinu Kochii ve stoupajících dosích malých od 0·05 *gr* počínaje až do 0·50 *gr*.

Z morčat léčeno pět, šesté bylo kontrolní; tolikéž dva králíci, jeden kontrolní. Tři morčata podlehla po třetí subkutanní injekci tuberkulinu. Při sekci nalézáme počínající tuberkulosu peritonea (miliární uzlíky), sleziny a jater. Nikde reakce — také mikroskopicky nelze než hyperaemii konstatovati.

Z králíků podlehl jeden po první injekci. Makroskopicky vidíme jen hojnosť psorospermií v játrách. Mikroskopicky hojnosť bacillů tuberkulosních v cevách — ne však uzlíky (tuberkulosa Roux-Yersinova).

Zbylá dvě morčata a králík léčena dále kochinem. Morče 1. a 2. obdrželo celkem 2·19 tuberkulinu Kochova. pošla stejný den 23./II., 26 dní po prvotní infekci tuberkulosní, 14. dne léčení. Dne 23./II. zabito kontrolní morče značně zhubenělé. Nález u obou jest miliární tuberculosa peritonea, sporé uzlíky ve slezině i v játrách u prvého, nad to ještě sesýrovatělá žláza mesenteriální.

U obou vpich infiltrovaný, změklý, na venek provalený a sýrovitými hmotami pokrytý. Morče svědek poněkud pokročilejší má tuberkulosu, totiž uzlíky ve slezině jsou větší i v játrách, na peritoneum miliární erupce, vpich infiltrovaný.

Makroskopický rozdíl jest, jak vidno — ale ne velký. — Mikroskopicky v obou případech (morče 1. a 2.) ohromné množství miliárních uzlíků s bacillly tuberkulosními — bez reakce. Vpich úplně rozpadlý v detritus až na malinký lem buničnatý.

Králík obdržel 2·00 *gr* kochinu a pošel. Kontrolní zabit současně 24./II. 91.

Trvání affekce 27 dní, léčení 15 dní.

Nález: U králíka miliární tuberculosa peritonea i sleziny; kontrolní rovněž tak. Vpich u obou změklý, ale neprovalený na venek. Mikroskopicky rozšířena miliární erupce orgánů dutiny břišní svěží bez reakce.

b) Z desíti morčat zhynula tři před léčením. Zbývajících 5 očkováno tuberculinem Kochii, 2 zůstala jako kontrolní. Započato 14. den po prvotní infekci. Malé dose tuberkulinu od 0·05 do 0·20 *kcm*.

Morče 1. a 2. pošlo po 2. injekci.

Morče 3. zdechlo 10./III. 24. den po první infekci, 10. den léčení obdrželo 0·64 *kcm* kochinu. Nález: Tuberkulosa sleziny, jater, omenta — uzlíky žluté — reakce žádná. Kontrolní 1. zabito 10./III. Nález: tuberkulosa sleziny, jater, omenta, žlaz inguinálních, vpichu.

Mikroskopicky: Morče 3. Tuberkulosní ložiska ve slezině starší úplně v detritus proměněna — bez reakce; ale vedle toho svěží uzlíky epitheloidní i s buňkami obrovskými i bacilly tuberkulosními.

Morče 4. a 5. obdrželo celkem 8:54 *kcm* tuberculinu Kochii; zhynula 1./IV. tedy 44. den od 1. infekce, 30. den léčení s dosemi (od 0·01 počínaje až ku 0·08). Kontrolní zašlo 26./III. s rozsáhlou tuberkulosou žlaz, sleziny, omenta, jater.

Zde jest nám zaznamenati, že u morčete 4. a 5. při léčení tuberkulinem žlázy inguinální i vpich změkly, u obou provalil se infiltrát vpichu na venek a hojil se; u morčete 5. pak i změklé žlázy inguinální na venek se provalily a defekty granulovaly, žlázy morčete 4. se zmenšily.

Nález morčete 5.: ve stěnách i in inguine pod strupem defekty pokryté granulační tkaní, místy žlutavými body protkané. Peritoneum čisté, slezina malá, ale v ní sporé uzlíky, tolikéž v játrách, dva uzlíky v plících se značně pigmentovaným lemem.

Nález morčete 4.: ve stěnách defekt granulační tkaní vyplněný, žlázy inguinální malé ale sýrovité — ve slezině i v játrách sporé uzlíky žluté; v plících ničeho.

Makroskopicky u porovnání s kontrolním byla zjevna difference v rozšíření tuberkulosy.

Histologicky u morčete 4. a 5. větší ložiska tuberkulosní úplně v detritus rozpadla. Kolem toho ve slezině nadmíru hojný pigment krevní.

Vedle těchto ale jak ve slezině tak i v játrách uzlíky svěží epitheloidní s bacilly tuberkulosními. Rány na břiše, granulační tkaň obklopující úplně sesýrovatělé hmoty. V plících morčete 5. ložisko úplně rozpadle, sousedící alveoly značně pigmentem naplněny i exsudátem buničně-fibrinosním.

c) Králíci zhynuli 14. den, dříve než přikročeno býti mohlo ku léčení Roux-Yersinovou tuberkulosou.

d) Léčen 14. dne kochinem 1 kralík, 3 morčata: 1 králík a 1 morče zůstaly kontrolními, ostatní pošla.

Králík 1. dostal 9·9 *kcm* kochinu, infiltrát ve stěnách rozsáhlý změkl; žlázy inguinální zduřelé se zmenšily. Pošel 52. dne léčení, dne 25./IV.

Kontrolní zabit 25./IV. Prvý: má rozsáhlé sesýrovatění změklé ve stěnách, sýrovité žlázy inguinální malé, v orgánech vnitřních ničeho.

Kontrolní: Pevný infiltrát ve stěnách, velké žlázy inguinální tuberkulosní, mediastinální též, tuberkulosa miliární lokalisovaná podél infiltrátů, uzle ve slezině sporé.

Rozdíl makroskopický jest: Histologicky u králíka prvého ve stěně břišní: úplný rozpad tuberkulosních produktů, kolem zánětlivá infiltrace. V orgánech, slezině, játrách sporé uzlíky.

Morče 1. a 2. dostalo velké dose 0·1, 0·2, 0·3, 0·4, 0·5 *kcm* tuberculini Kochii.

První pošlo 24./III., druhé 26./III. Značná reakce na stoupající dose za živa; ve vpichu nekrosa. Nález pitevní: vpich nekrotický kolem injekce — makroskopicky v ostatních orgánech jen hyperaemie. Mikroskopicky: zřetelný haemorrhagický zánět kolem tuberkulosního infiltrátu ve stěnách břišních — ve slezině hyperaemie, i v játrách i v plících.

Kontrolní zvíře zhynulo 18./IV.: pokročilá tuberkulosa dutiny hrudní.

Morče 3. dostalo dose od 0·05 počínaje do 0·8, dohromady 6·80 *kcm* kochinu, v intervallech dvoudenních. Zhynulo 25./IV., tedy 55. den od 1. infekce.

Nález: V průběhu léčení infiltrát ve stěnách změknul, vpich nekrotisoval, rána povstalá se vyčistila, žlázy inguinální se zmenšily. Pitevní: Abscess ve stěnách břišních čistý, jen v horních okrajích nažloutlý. Ve slezině málo uzlíků, v játrách také málo, uzlíky ve slezině jako vypouklé, na průřezu suché; žlázy inguinální žlutavě tečkované, ale malé.

Rozhodně byla u dříve zdechlého morčete tuberkulosa pokročilejší.

Mikroskopicky: Uzle ve slezině úplně rozpadlé, kolem lem buničný zbývající nepatrný, i v játrách celé pruhy rozpadlé tkaně; v obou mnoho pigmentu. Vedle toho však na některých řezech viděti lze sporé uzlíky svěží.

c) Morčata 1. a 2. léčena byla 20./IV. počínaje tuberkulinem Kochovým; morče 3. svědek.

Morče 2. dostalo 2·3 *kcm* tuberkulínu; zhynulo 25./IV., tedy 25. den po infekci první.

Při sekci nalézáme jen tuberkulosní ložiska v plících a kolem toho značný lem pigmentovaný. V ostatních orgánech není makroskopicky jiných změn než hyperaemie.

Mikroskopicky nalézáme: ložisko v plících úplně rozpadlé, kolem toho tkaň plicní produktivně zhuštěnou s velice četným nahromaděním pigmentu.

V ostatních orgánech (slezina, játra) po dlouhém hledání nalezeny sporé uzlíky svěží s bacilly tuberkulosními.

Morče 1. léčeno tuberkulinem Kochovým od 20./IV. do 20./V. a obdrželo 5·9 *kcm*.

V průběhu shledáváme, že vpich nekrotisoval, žlázy inguinální zduří. Defekt se vyčistil i úplně epidermisoval. Žlázy inguinální značně se zmenšily.

Přestalo se v injekcích, leč 1./IV objevil se opětně infiltrát ve stěnách břišních, načež nové injekce velkými dosemi 7./IV. započaty, tak že do 14./IV. vypotřebováno 3·5 *kcm* tuberkulinu Kochova (od 0·5—0·8). 14./IV večer smrt. Vždy silná reakce.

Morče pošlo 105. den po I. infekci. Nález pitevní: Ve stěnách břišních zahojený defekt, od jehož horního okraje táhne se šikmo ku processus xiphoides tuberkulosní, měkký, sýrovitý infiltrát, s nímž několik kliček ilea je slepeno i tuberkulosně infiltrováno, in inguine sin. podobný infiltrát, vedle toho zvětšení žlaz mizních. V dutině břišní mimo tu-

berkulosní ložisko na místě slepených kliček jen několik uzlíků hnědých ve slezině, v játrách ničeho; ani v plících: ledviny jsou na povrchu jemně granulovány.

Mikroskopicky: tuberkulosní infiltrát v kůži rozpadlý úplně a kolem haemorrhagicko-fibrinosní zánět. V slezině větší uzlíky rozpadlé, kolem mnoho pigmentu, i vedle některé svěží uzlíky epitheloidní s bacilly tuberkulosními. V játrách nalézáme sporé uzliky miliární. V ledvinách rozsáhlá degenerace parenchymatosní epithelu, kanálků i zvápenatění jich. Zdá se, že tento nález vztahuje se více k účinku glycerinu!

Kontrolní morče zhynulo 3. VI. rozsáhlou tuberkulosou stěn, žlaz inguinálních, omenta, jater, sleziny.

Zde patrný rozdíl ve makroskopickém rozšíření tuberkulosy.

/) Z infikovaných zvířat byla léčena:

Tuberculinem Kochii morče 1, 2., 3., 4., králík 1.

Tuberkulinem naším morče 6., 7., králík 2.

Tuberkulinem Klebsovým morče 8., 9., králík 5.

Morče 5. a králík 4. co svědek. Králík 3. a 6. pošel předčasně; morče 4. po 1. injekci tuberkulinu Kochova, nález negativní.

Morče 1.: † 19./VI. 41. den. Dostalo tuberkulinu Kochova 1·7 cm^3 v malých dosích. Reakce malá. Nález: Změknutý infiltrát stěn břišních, miliární erupce peritonea, žlaz inguinálních, uzlíky sporé ve slezině a játrách.

Histologicky: Infiltrát rozpadlý bez reakce, miliární uzlíky ve slezině; v plících haemorrhagie.

Morče 2. zabito 19./VI. 41. den. Obdrželo větší dose tuberkulinu Kochova, celkem 5·5 cm^3. Reakce značná. Nekrosa vpichu. Nález: Infiltrát ve stěnách změklý. Makroskopicky v slezině uzlíky žádné i v játrách; peritoneum 0.

Mikroskopicky nalezeny miliární uzlíky ve slezině, játrách.

Rozdíl mezi morčetem 1. a 2. je makroskopicky poněkud znatelný.

Morče 5. svědek zabito 19./IV. 41. den. Tuberkulosa pokročilejší než u předchozích morčat 1. a 2.; zejména ve slezině a játrách větší uzle.

Morče 3. obdrželo 3·2 *kcm* tuberkulinu Kochova † 1./VII., tedy 53. den po 1. injekci. Z průběhu: infiltrát ve stěnách nepatrný zmizí — patrně to žláza mizní, která se zmenšila neb i žlázy inguinální se zmenšují. Reakce jen někdy se vyskytuje. Nález pitevní: pouze omentitis tuberkulosa infiltrovaná.

Mikroskopicky však nalézáme ve slezině i játrách uzlíky miliární.

Morče 6. a 7. očkováno naším tuberkulinem dle Hueppe-Scholla.

Morče 6. pošlo 1. VII., morče 7. 3. VII.

Morče 6. obdrželo 56 *kcm* našeho tuberkulinu, morče 7. 18 *kcm* od 22./V. počínaje.

Průběh: reakce nepatrná, nekrosa vpichu nevalná.

Nález pitevní: morče 7. pokročilá tuberculosa peritonea, sleziny, jater.

Morče 6.: spořejší uzlíky ve slezině i v játrách. Mikroskopicky však mnoho miliárních uzlíků bez reakce, ale v ledvinách zvápenatění (glycerin!)

Morče 8. a 9. dostávalo tuberculinum Klebsii depuratum od 22. V. počínaje.

Morče 8. obdrželo tuberculinu Klebsii 20 *kcm*, morče 9. 41·5 *kcm* t. Kl.

Zabita 3. VII. Nález u obou nevalně rozdílný.

Průběh: reakce skoro žádná.

Pitva: Rozšířená tuberkulosa sleziny, jater, podél vpichu, žlaz.

Mikroskopicky: četné starší i svěží miliární uzlíky.

Králík 1 T. Kochii 6 *kcm* počínaje od 22./V.

Králík 2. T. náš 36 *kcm*.

Králík 5. T. Klebsii 21·5 *kcm*.

Zabiti jsou spolu se svědkem králíkem 4. dne 2. VII., tedy 53. den.

Co do průběhu, zjevná reakce u králíků po větších dosích t. Kochii; u ostatních nikoli. Změknutí tuberkulosního infiltrátu ve stěnách jen u králíka 1.

Nález pitevní: Králík 1. Změklý infiltrát ve stěnách břišních, zduřelé žlázy inguinální mírně; v dutině břišní makroskopicky ničeho.

Mikroskopicky: miliární uzlíky ve slezině a játrách.

Králík 2., 3. a 5. mají rozsáhlé infiltráty ve stěnách, miliární erupci na odpovídajícím peritoneum a uzlíky ve zduřelých žlazách a slezině (?)

Mikroskopicky nalezeny ve všech těchto orgánech uzlíky miliární bez reakce.

III. Immuniční pokusy s tuberculinem Kochii, naším i Klebsii.

a) 5. V. 3 morčata očkována praeventivně tuberculinem Kochii až do 19./VI. velkými dosemi; celkem dostalo každé 4·00 *kcm* kochinu.

Dne 22./V. očkují se těmto a jednomu morčeti svědkovi hmoty tuberkulosní z ostitis tuberkulosa intraperitoneálně.

Dne 20./VI. zabita jsou všechna čtyři.

Kontrolní: Omentitis tuberculosa, uzlíky ve slezině, játrách, žlazách, ve vpichu.

Morče 1, 2., 3.: uzlíky ve slezině, játrách, žlázy inguinální tuberkulosní i žlázy cervikální i vpich.

b) Dne 5./V. očkována praeventivně tuberkulinem naším a sice do 22. V. tři morčata; kontrolní předešlý.

Morče 1. dostalo 7·5 *kcm* tuberkulinu našeho
» 2. » 14·00 » » »
» 3. » 28·00 » » »

Dne 22./V. očkována jim tuberkulosa; dne 20./V. zabita.

Nález: Skoro stejné rozšíření tuberkulosy, jako u kontrolního.

c) Dne 8./VII. očkováno praeventivně:

Tuberculinem Kochii 3 morčata (1., 2., 3.)
» naším 3 králíci (1., 2., 3.)
» Klebsii 3 morčata (4., 5., 6.)

Morče 1. obdrželo do 24./VII. 1·00 *kcm* tuberculinu Kochii.
» 2. » » » 4·00 » » »
» 3. » » » 6·00 » » »

Dne 24./VII. očkovány jim sýrovité hmoty ze žlázy tuberkulosní obsahující bacilly tuberkulosní, jakož i jednomu morčeti zdravému.

Zabity jsou 30./IX. po dvou měsících.

Nález: U všech tuberkulosa dosti pokročilá, u kontrolního zdá se, že jest erupce hustší.

Králík 1. dostal 10·00 *kcm* tuberkulinu našeho.
» 2. » 20·00 » » »
» 3. » 31·00 » » »

Dne 24./VII. očkována tuberkulosa jako výše, pak i kontrolnímu.

Dne 30./IX zabita všechna zvířata Stejné rozšíření infiltrátu stěn břišních a zvětšení žlaz inguinálních.

Morče 4. dostalo tuberculinu Klebsii 30 *kcm* (= 1·· 0 T. Kochii).
» 5. » » » 40 » (= 2·00 » »
» 6. » » » 50 » (= 2·50 » »

Dne 24./VII. očkovány tuberkulosní hmoty sýrovité intraperitoneálně.

Dne 30. IX. zabita i shledáno: tuberkulosa vpichu, žlaz inguinálních, sleziny i jater.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 19.

O DIFENYLDIMETHYLDIAMIDOETHANU

A NĚKTERÝCH

OD NĚHO ODVOZENÝCH BARVIVECH.

NAPSAL

JOSEF SCHNEIDER,

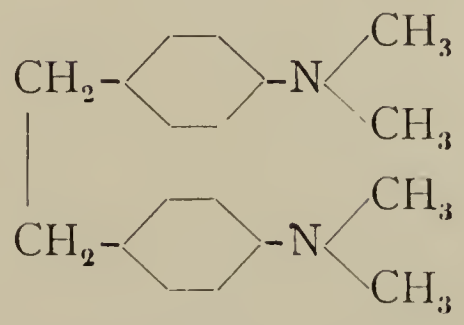
ASSISTENT C. K. ČESKÉ VYSOKÉ ŠKOLY TECHNICKÉ V PRAZE.

PŘEDLOŽENO DNE 17. PROSINCE 1891.

V PRAZE.
NAKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Pavel Schoop (B XIII. 2196) obdržel osmihodinným zahříváním ethylendibromidu s dimethylanilinem na vodní lázni látku při 50° C tající, již za tetramethyldiamidodifenylethan č. tetramethyldiamidodibenzyl

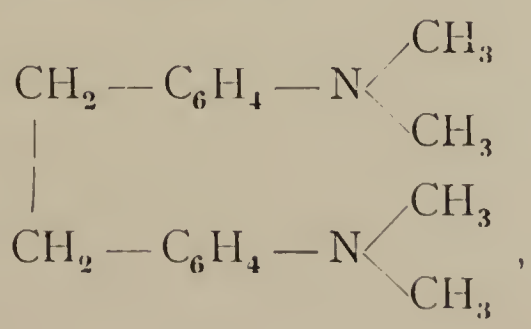


považoval, dovolávaje se prací Horchardových (B. XII. 681) o kondensaci dimethylanilinu s chloroformem a chloridem uhličitým a prací O. a E. Fischerů o kondensaci dimethylanilinu s chlorálem (B. XI. 951).

Schoop po vypuzení zbytku těkavých surovin vyňal etherem hnědý olej, který překapoval, i těkala prý polovina pod 360° C, druhá výše. Olej pod 360° přešlý ztuhl mu průběhem několika dní a získána odlisováním, mytím a přehlacováním z alkoholu methylnatého zásada čistá, při 50° C tající, snadno rozpustná v etheru, ligroinu a alkoholu methylnatém i ethylnatém, nerozpustná ve vodě, vroucí nad 360°, jíž po výsledku rozboru

C : 80·40%
H : 9·05%

neotálel přiřknouti vzorec $C_{18} H_{24} N_2$, či

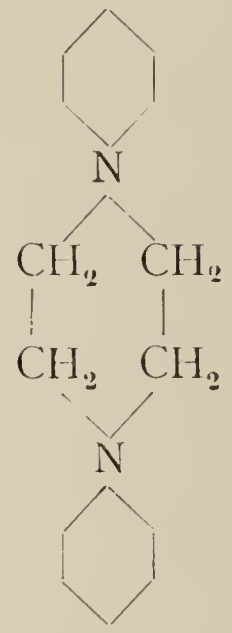


vyžadující:

C : 80·51%
H : 8·96%.

Při opětování této kondensace obdržel jsem skutečně látku uvedených vlastností, tající 51° C[a]; když se však teplota ke konci reakce zvýšila, byla vzniklá zásada v maz proměněna a nepodařilo se mi více látku Schoopovu,

nýbrž jinou, při 158° tající osamotniti, látku, jež nic jiného býti nemohla než difenylpiperazin:

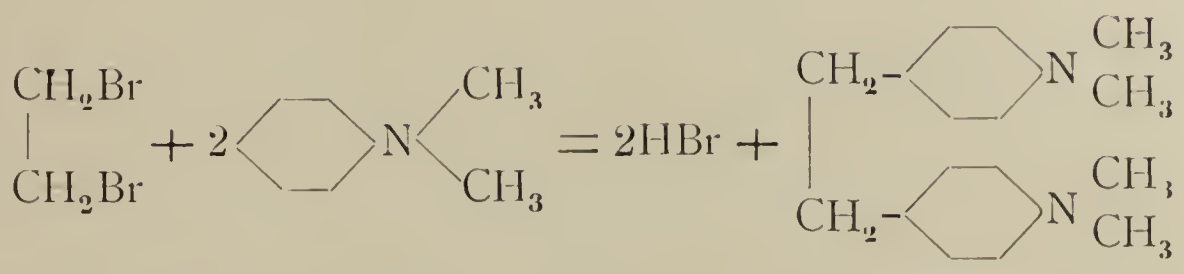


Stůjtež zde některé podrobnosti: 160 *g* ethylendibromidu a 206 *g* dimethylanilinu, obou čerstvě překapaných zahřívalo se 8 dní a nocí na vodní lázni, pak výš, pak se přesytilo louhem sodnatým a nezměněné suroviny přehnaly vodní parou. Jako Heumann a Wiernik (B. XX. 913) byl jsem náhledu toho, že destillaci při 360° jest lépe obejíti pochody jinými. Heumann a Wiernik oddělili zásadu při silném schlazení vykrystallovanou od oleje, což při případu našem nešlo, neboť jsme získali hmotu mazlavou, tmavozelenou a stejnorodou. Z roztoku jejího v etheru sražen plynným chlorovodíkem chlorhydrat, jeho vodný roztok čistěn varem s živočišným uhlím, čpavkem sražena zásada, hydroxydem draselnatým sušený etherický roztok sražen sušeným plynným chlorovodíkem. Odděleny tím 3 části; nejprve tmavé mazy, pak oranžově žluté klky, naposledy klky bílé, brzy však též žloutnoucí. Proto rozpuštěny zase všecky tři části chlorhydratu dohromady v solnou kyselinou okyselené vodě a sraženy z nich čpavkem znovu 3 podíly, prvý zelený, druhý šedý, třetí bílý. Poslední rozpuštěn v sušeném čistěném benzolu a sražen z roztoku sušeným plynným chlorovodíkem chlorhydrat bílý, slabě nahnědlý, rázu zemitého. Z roztoku jeho v okyselené vodě sražena čpavkem zásada, jež přehraněna z prostočistého lihu malé, našedivěle bílé hranolky či jehlice tvořila, málo rozpustné v ligroinu a stálý bod tání 158° vykazující. Zelený i šedý podíl zásady rozpouštěly se v etheru barvou tmavou, ohledně světlehnědočervenou, roztok, pevným hydroxydem draselnatým sušený, dal při srážení chlorovodíkem mazlavé soli, zůstávaje v případu prvém fialový, v druhém bezbarvý. Vodný roztok solí, srážen čpavkem, dal zprvu tmavé, později světlé, vždy však v mazy se sebírající klky zásad, které po rozpuštění v etheru, vysušení pevným draslem, odpaření etheru, daly při překapování z lázni olejné neb z lázni kyseliny sírové při 200° C a tlaku sníženém ssací pumpou, olej hnědý, podobný i při přímém zahřívání na 300°. Na svrchní části baňky překapovací a v hrdle usadila se hmota žlutá, kyprá, na dně zůstal hnědý maz. Ze žádného z těchto podílů nebylo lze rozpouštěním v etheru a benzolu a srážením plynným chlorovodíkem i rozpuštěním chlorhydratu ve vodě a ponenáhlým srážením čpavkem (ani při vydatném

chlazení za srážení) zásady nerozmazané získati. Ze žádného podílu nevyhlatilo ničeho po 5nedělním uschování v ledničce a nebylo lze též odlisováním mazy tyto v podíly pevné a kapalné odlišiti.

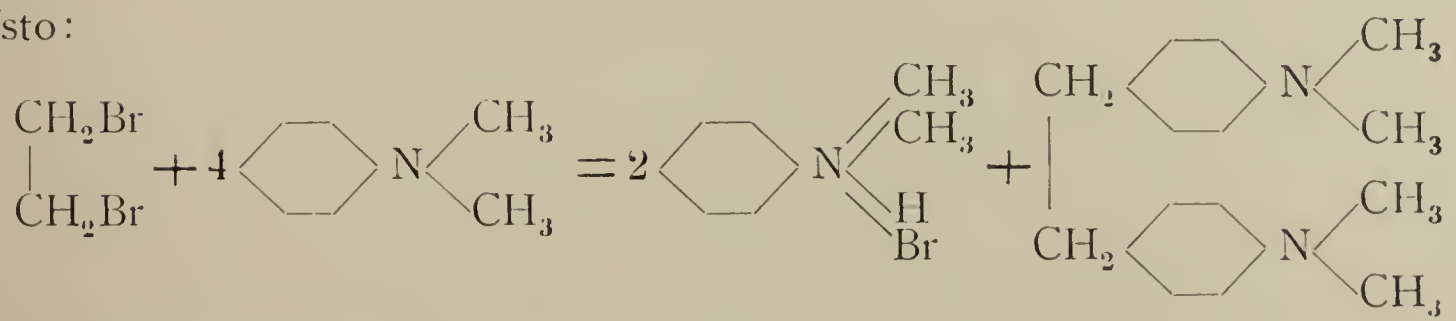
Vznik piperazinu při pokusu vypsaném vyžaduje pochodu odchylného od toho, jejž přijal Schoop.

Místo rovnice:

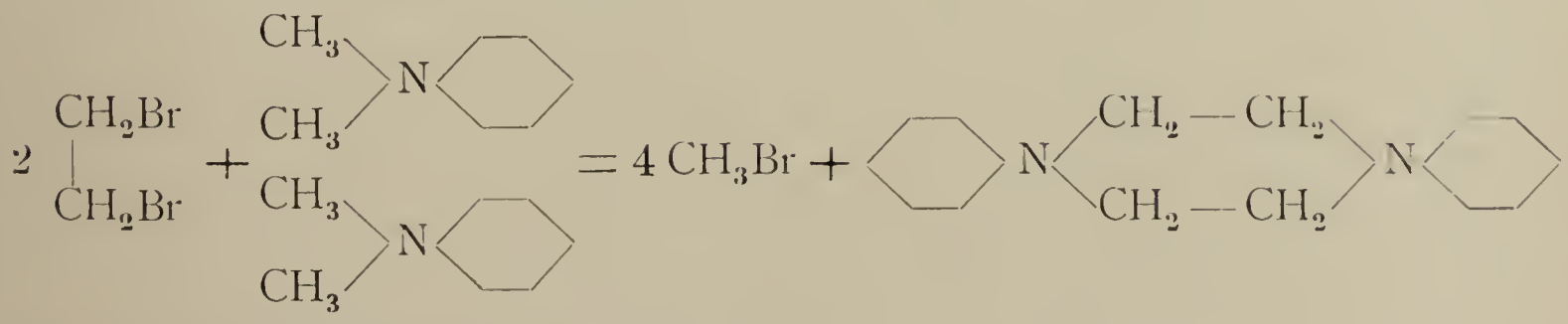


aneb, vzhledem k tomu, že Schoop bromhydrat dimethylanilinu v produktech zjistil:

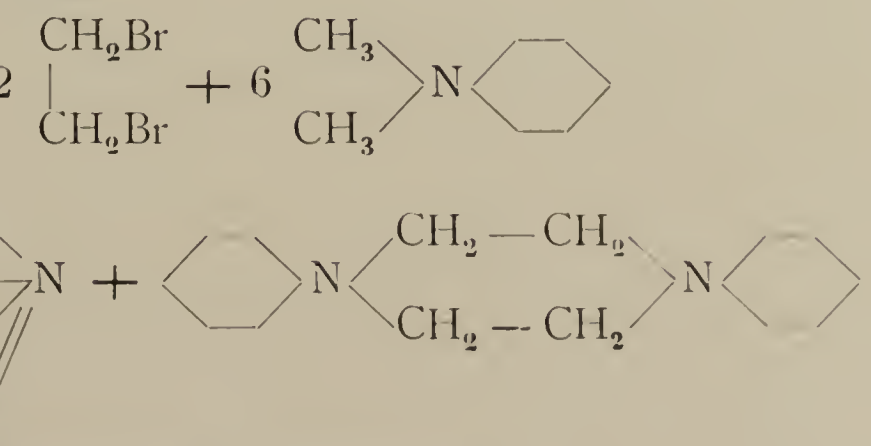
místo:



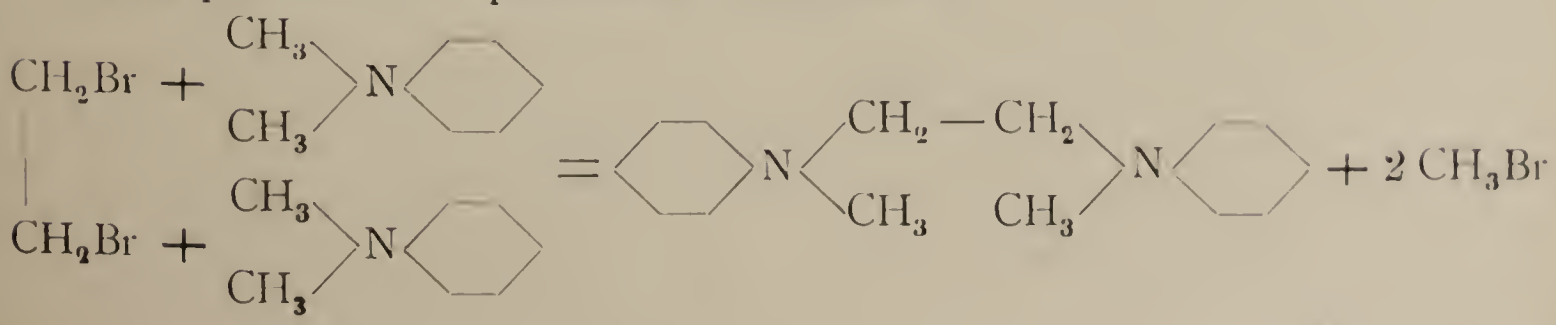
platily v případu našem rovnice:



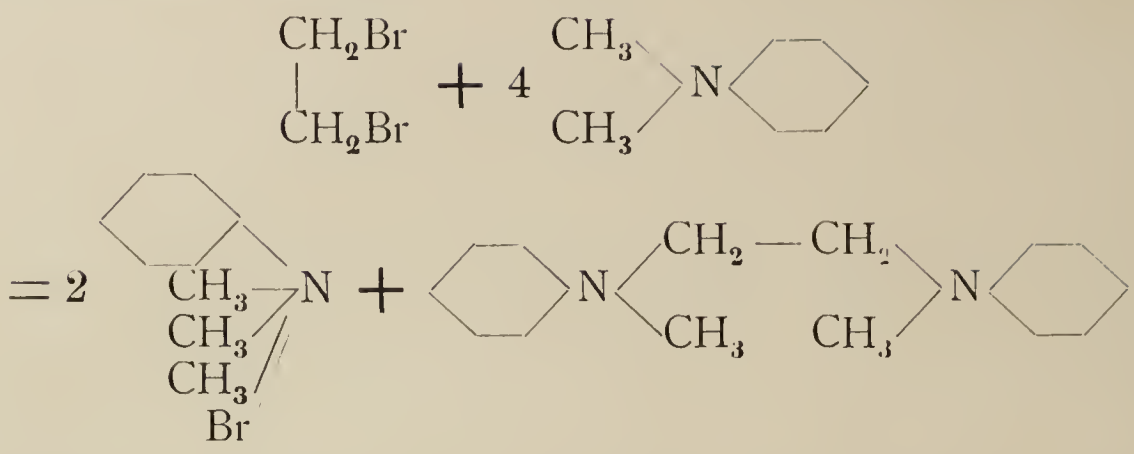
neb z dole uvedených příčin



Musí pak mimo to přechodně vzniknouti z



neb z dole uvedených příčin: z

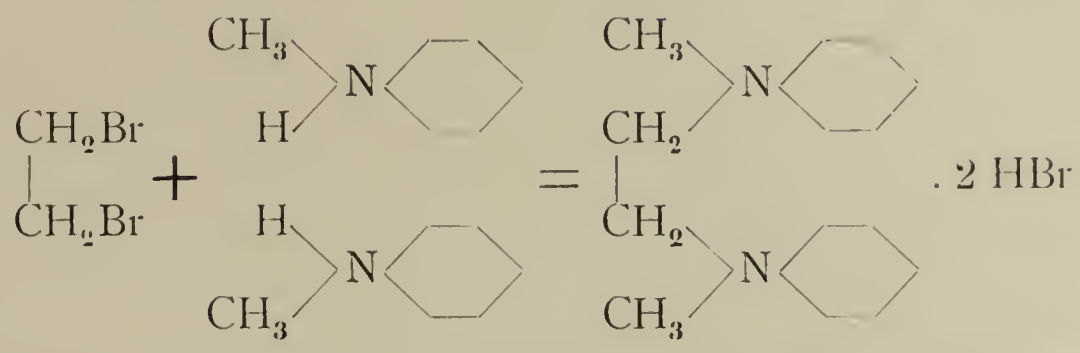


Bromid methylnatý zůstal by při vzniku svém vázán na přebytečný dimethylanilin jako bromid fenyltrimethylammonia, a vskutku jsme sloučeninu tuto při pokusu, jehož popsání hned následuje, ve množství značném vedle zásady Schoopovy osamotnili a lučebním chováním jeho k solím stříbrnatým, k ferrokyanidu draselnatému a k hydroxydu barnatému dokázali Schoop vzniku jeho neuvádí.

Byl proto vznik difenylpiperazinu při účinnější, dlouhé a teplejší kondensaci a vznik zásady Schoopovy při volné prvou, osamocení fenyltrimethylammoniumbromidu při pokusu druhém, kde jen zásada Schoopova a žádný piperazin získána, druhou oporou pro názor náš, že zásada Schoopova není tetramethyldiamidodibenzylem, nýbrž difenyldimethyldiamidoethanem.

100 *g* ethylendibromidu a 130 *g* čerstvě překapaného dimethylanilinu zahřívalo se 8 dní a nocí na vodní lázni. Vzniklo vedle hnědé s vodou se nemísící kapaliny 88 *g* hlaceného modravě zbarveného fenyltrimethylammoniumbromidu, který rozpuštěn, třepáním s etherem čistěn, hydroxydem barnatým, jenž bromhydrat dimethylanilinu, nikoli však fenyltrimethylammoniumbromid by rozložil, přesycen. Etherem vytřepány jen sledy zásady, načež roztok zbarven kyselinou uhličitou za varu hydroxydu barnatého a odpařen ku hlacení, při němž podíly fenyltrimethylammoniumbromidu různé čistoty získány. — Ze získané olejovité kapaliny vypuzeny parou za přítomnosti sody nezměněné suroviny, zbývající maz rozpuštěn v ligroinu, jenž difenyldimethyldiamidoethan snadno, za to difenylpiperazin nesnadno rozpouští. Zbylo jen nepatrné množství žlutého mazu, který po nějakém čase zmodral, aniž by jakých krystallů byl osadil. Roztok, z něhož se ligroin překapal, zanechal maz, který vícekráte za příčinou vypuzení posledních s parou těkavých přimíšenin s vodou rozmíchán a na vodní lázni odpařen byl. Po 6 dnech osadil hlatě, jež odlisovány a zhruba omyty bod tání 45° vykázaly. Alkoholem methylnatým snadno se rozpustily, zanechavše opět něco málo rozpustné, žluté, modrající kapaliny. Po odpaření roztoku toho ve vzduchoprázdnotě v exsikatoru a vymytí uvedeným alkoholem, získáno 4·2 *g* zcela čistých, stále při 51° C tajících hlatí a as $^3/_4$ *g* zrnitě krystallické žlutavé hmoty, bodu tání 45° C, obsahující ještě něco uvedené žluté kapaliny. Z hlavní zbylé části mazu nebylo více lze dalších nerozmazaných hmot osamotiti.

Vznikl-li difenyldimethyldiamidoethan kondensací ethylendibromidu s dimethylanilinem, bylo lze očekávati jej i při monomethylanilinu,
t. j. že dá:



Opakovali jsme proto práci svou s monomethylanilinem, jak v následujících popisech čtyr pokusů podrobně jest vypsáno, a získali jsme při monomethylanilinu surovém sice výsledky nepatrné, za to u lučebně čistého s každým dalším pokusem stále a značně theoretickému se blížící výtěžek na zásadě Schoopově, čímž nový a hlavní důkaz pravosti náhledu našeho o jejím vnitřním seskupení podán.

63 *g* ethylendibromidu a 127 *g* surového 60%ho monomethylanilinu zahřívalo se 1 den s 35 *g* sody Solvayovy na vodní lázni; ze vzniklé hnědé ve vodě plovoucí kapaliny vypuzeny parou nezměněné suroviny po přidání mentiny louhu, zbytek se překapoval pod sníženým tlakem při 200—240°. V jimadle zachycený olej vyloučil v ledničce žluté jehlice, jež při obyčejné teplotě rychle se zase rozplynuly. Po opětném přehánění nezměněných surovin parou zbývaly zase kapky žluté, olejovité, které na cedítku plátěném se nezachytily, proto vyňata zásada etherem, který sušen a odpařen zase jen hnědý maz zanechal, který při vícerém rozpouštění v kyselině solné a srážení čpavkem za přímého ledem chlazení jen v maz přecházející klky zanechával. Teprve po novém dvanáctihodinném s vodou odpařování podařilo se tak nečistot zbaveného výrobku získati, že průběhem více dní v ledničce hlatě difenyldimethyldiamidoethanu vyloučil, které bylo lze mytím a přehlacením vyčistiti.

Malý výtěžek, pocházející od trochu krátkého zahřívání a od vzniku mazů při odhánění parou za přítomnosti i jen mentiny volného louhu, neodpovídal ani tomu, co by bylo musilo dáti oněch 40% dimethylanilinu, v surovém monomethylanilinu obsažených; proto pokusem tímto ničeho dokázáno nebylo a musilo se pracovati napříště s lučebně čistým monomethylanilinem, jak jej skytá způsob přípravy dle Noeltinga a Byassona (B. X. 795).

11 *g* ethylendibromidu zahříváno s 13·4 *g* ch. č. monomethylanilinu, 7 *g* sody a 100 *g* vody přes noc na vodní lázni. Po vypuzení surovin nezměněných parou, rozpuštěna zásada v etheru, draslem vysušený roztok sražen plynným chlorovodíkem a z vodného roztoku chlorhydratu za chlazení ledem sražena čpavkem klkatá, po chvíli hrubě hlatící hnědá zásada o bodu tání 45°. Přehlacena z roztoku v alkoholu methylnatém, vyčistěna v roztoku ligroinovém za varu uhlím živočišným a dvakrát po odpaření ligroinu a vylisování v cedicím papíru alkoholem methylnatým prána a dvakrát z něho přehlacena, vykázala stálý bod tání 51° C a byla bílá, s nepatrným žlutavým odstínem. Získáno

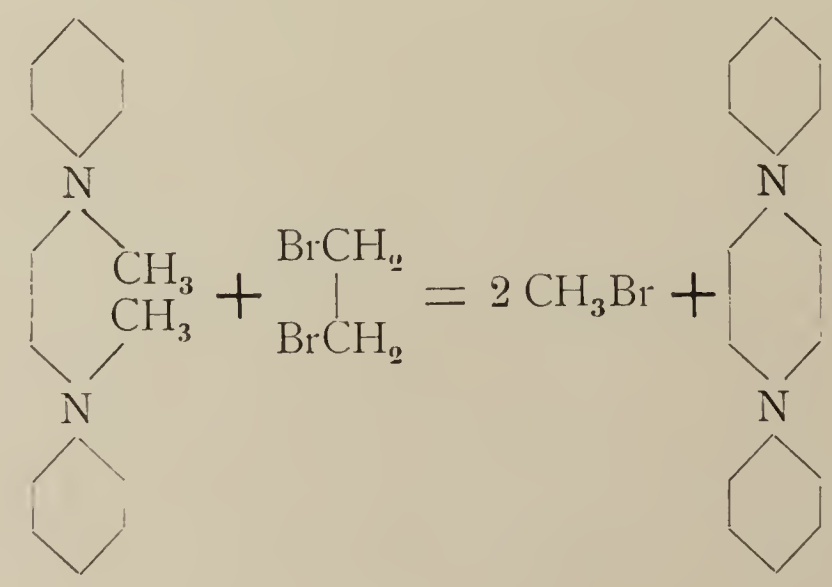
však takové jen 2·8 *g*, vedle 1 *g* poněkud žlutší, při 45° tající a vedle méně čistých výparků louhů matečných.

Při pokusu dalším, kde 94 *g* ethylendibromidu, 107 *g* ch. č. monomethylanilinu, 120 *g* sody a as 200 *cc* vody po dva dny na vodní lázni se zahřívaly, získány, když se zásada, hned po vypuzení nezměněných surovin parou, v kyselině solné rozpustila a za přítomnosti ledu čpavkem nenáhle srážela, již šedé hlatě zásady Schoopovy ve množství skoro theoretickému výtěžku odpovídajícím. Bylať již zásada surová, když se baňka, v níž kondensace se děla, s vodní lázně sejmula a na dva dny ostavila, na tvrdý krystallický kaval ztuhla. Čistění dálo se přehlacováním z alkoholu methylnatého. Týž rozpouští za varu velmi snadno zásadu Schoopovu, zanechávaje hnědé, schlazením tuhnoucí oleje. Chladnutím roztoku vylučuje se až asi k 27° C stále hnědý olej neb kory žlutých hlatí, od kterých se roztok odlévati musí, neboť pojednou promění se v kaši sněhobílých jehlic, od nichž se roztok matečný, do fialova zbarvený, odssáti musí a jež hned bod tání 50—51° vykáží.

Ve množství největším, jakosti nejlepší získán rychle a vyčistěn lacino amin nadepsaný při pokusu tomto:

120 *g* ethylendibromidu a 132½ *g* ch. č. monomethylanilinu, obou čerstvě překapaných se zahřívalo s 80 *g* sody a 200 *cc* vody 12 *h* na vodní lázni, pak se 8 *h* parou suroviny nezměněné přeháněly, zásada dvakrát v kyselině solné rozpustila a po přidání ledu sodou po částech srážela, čímž se v hnědý maz a hnědé až žlutošedé klky oddělila. Poslední se velmi snadno vyčistily přehlacením z prostočistého lihu. Při chladnutí za varu nasyceného roztoku lihového sráží se obdobně, jako u alkoholu methylnatého nejprve hnědá tuhnoucí kapalina, pak hnědé kory, od kterých se louh matečný před sklesnutím na 30° odliti musí, ježto se při tomto stupni roztok v kaši sněhobílých jehlic zásady rázem přemění, jež jsou skoro úplně čisté. Získalo se tak vedle nevážených nečistých kor a výparků z louhů matečných 114 *g* čisté zásady.

Čtvrtým důkazem oprávněnosti náhledu našeho o vzorci zásady Schoopovy mělo býti, převésti ji samotnou dále v difenylpiperazin, dle rovnice:



Při pokusech na lázni olejové difenyldimethyldiamidoethan s ethylendibromidem na zpětném chladiči zahřívati, nebylo lze žádného difenylpiperazinu osamotniti, rovněž ani při zahřívání v trubici zatavené při 150° C. Teprve při desítihodinném zahřívání na 180—190° vznikl maz, který na talíři hliněném na hmotu žlutohnědou ztuhl, z níž po mnohonásobném praní a přehlacování z lihu methylnatého, ethylnatého a ligroinu získány po sobě různě tající podíly, 110, 143, konečně i 156° jakožto bod tání vykazující. Výtěžek na tuto čistou frakci byl však malý a bylo by se mělo zajisté pro získání většího množství ještě výše, na 220° na př. zahřívati. Úplnosti reakce škodí, že se obě suroviny, zvláště leží-li trubice šikmo, oddělí a nedokonale na sebe působí.

Zásada Schoopova těká trochu s parou a bývá jí proto při dlouhém přehánění dosti v chladiči sraženo. Volný hydroxyd v přeháněném chovati neb přehřaté páry používati se za příčinou možného rozkladu a v maz přeměny neodporučuje.

Majíce jistotu úplnou, že námi připravený difenyldimethyldiamidoethan se zásadou Schoopem popsanou totožný jest, neopakovali jsme ani rozborů lučebních, jež významu podřízenějšího pro rozhodnutí mezi vzorcem $C_{16}H_{20}N_2$ a $C_{18}H_{24}N_2$ býti se zdály na základě výsledků Schoopových srovnaných s čísly oběma vzorci vyžadovanými. Při rozboru elementárním zásady shledal:

	C	H
Schoop:	80·40	9·05
$C_{18}H_{24}N_2$ žádá	80·53	8·96
$C_{16}H_{20}N_2$ žádá	79·93	8·35

Při analysi chloroplatičitanu obdržel

	Pt
Schoop	29·61 29·67
$C_{18}H_{24}N_2 . 2HCl . PtCl_4$ žádá	29·12
$C_{16}H_{20}N_2 . 2HCl . PtCl_4$ žádá	30·29

Při okolnosti, že tato ve vodě i lihu málo rozpustná sůl, jak již Schoop shledal při 100° zvolna se rozkládá, nemožno z několika málo rozborů o vzorci rozhodovati.

Jodhydrat zásady připravili jsme při pomísení schnaného iodovodíka a roztoku zásady v alkoholu methylnatém a napotomním odpaření v exsikatoru pod sníženým tlakem dle návodu Schoopova. Za příčinou snadného rozkladu jeho byly v něm již ojedinělé hranolky iodem substituovaných a addičních produktů. Při rozboru obdrželi jsme však číslo velmi od Schoopova odchylné, ač byl iodhydrat ten

co nejvíce etherem prán a jen nepatrně zažloutlý; pro výklad náš se však výsledek ten lépe hodí Byloť nalezeno

námi	HJ %	50·81
Schoopem		47·09
$C_{16}\ H_{20}\ N_2\ 2\ HJ$ žádá		51·57
$C_{18}\ H_{24}\ N_2\ 2\ HJ$ žádá		48·08

(1·2216 iodhydratu poskytlo 1·1398 Ag J).

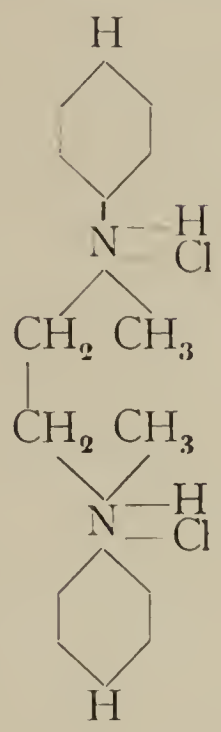
Barva za přítomnosti volného iodu vzniklých a Schoopem za substituční a addiční produkt $[C_{18}\ H_{23}\ JN_2\ 2\ HJ + J_2]$ pokládaných hlatí byla i u zároveň vzniklých různá, černozelená až černofialová. Byly tím stálejší, čím méně volného iodu při přípravě jejich přidáno bylo. Jen ty, které nadbytečný či volný iod rozkladu iodhydratu děkovaly, bylo lze bez větších změn a ztrát z alkoholu víckrát přehlatiti.

Při přípravě pikranu obdrželi jsme smísením alkoholických roztoků a odpařením ve vakuu neb na přísadu velmi málo vody hnědoruďé skoro krychlové hlatě, při odpařování nenáhlém jehlice, naproti tomu vznikla sraženina světle žlutá jen při přísadě většího množství vody. Snadnou rozpustností v alkoholu methylnatém a ethylnatém, malou v etheru, chloroformu a ligroinu vyhovoval udajům Schoopovým. Analysa elementární neopětována, jelikož při značně velkých molekulárních vahách, jež oběma vzorcům odpovídají, rozhodnutí o opodstatněnosti jednoho z nich ze získaných čísel nemožným by bylo. Z téže příčiny nebyl ani šťovan analysován aniž připraven.

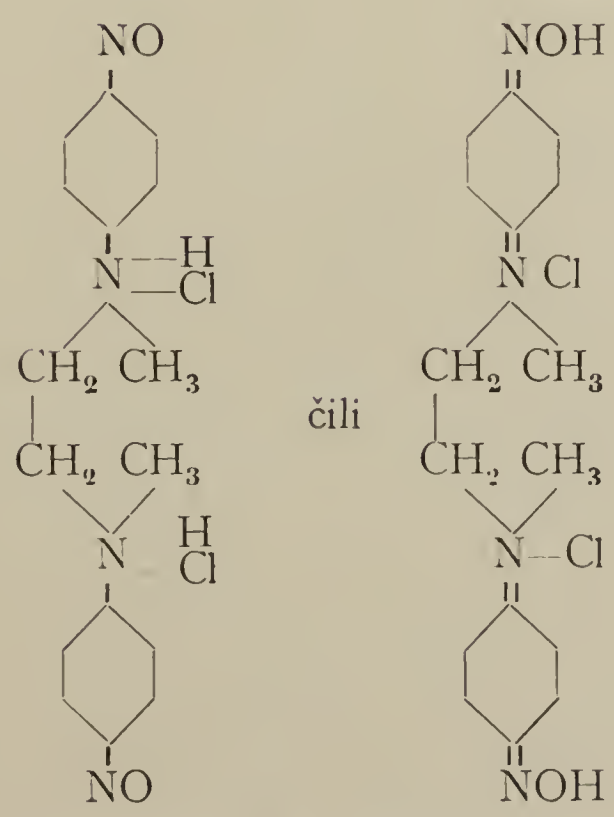
Kyselinou dusičnou dala i námi připravená hmota za přítomnosti kyseliny sírové žlutou nitrosloučeninu. Též i chování k bromu a ledové octové kyselině i vznik chinonu a zápachu aldehydového při oxydaci chloridem železitým za tepla odpovídaly poznáním Schoopovým, za to však »živých barev« nenáhlou oxydací nebylo lze připraviti, a neuvádí ani Schoop, jenž isolací barviv vzniklých zabývati se přislíbil, od času toho žádných dalších zpráv více. Za to čteme ve článku Heumanna a Wiernika (B. XX. 913), že získávali oxydací zásady Schoopovy vždy jen barev slabých a mdlých a žádných barviv. Ježto pak u paradiamidodifenylmethanu uvedení čtyř methylů do amidových skupin stačí, aby zásada oxydací barviva skutečného poskytla, svědčí trochu i to proti vzorci tetramethyldiamidodifenylethanu, že zásada Schoopova jen mdlých zbarvení a žádných barviv oxydací volnou neskytá.

Praktickým účelem práce naší a zároveň posledním důkazem skupení ve smyslu vzorce difenyldimethyldiamidoethanu bylo potvrditi očekávané a nalezené dimethylanilinu obdobné chování vůči kyselině dusíkové. Přísadou dusanu sodnatého k roztoku zásady v kyselině solné vznikne ve vodě snadno roz-

pustný chlorhydrat nitrososloučeniny, která vyznačuje se i v podobě volné na rozdíl od volného nitrosodimethylanilinu dosti malou rozpustností v etheru.



$$+ 2HCl + 2NaNO_3 = 2NaCl + 2H_2O +$$

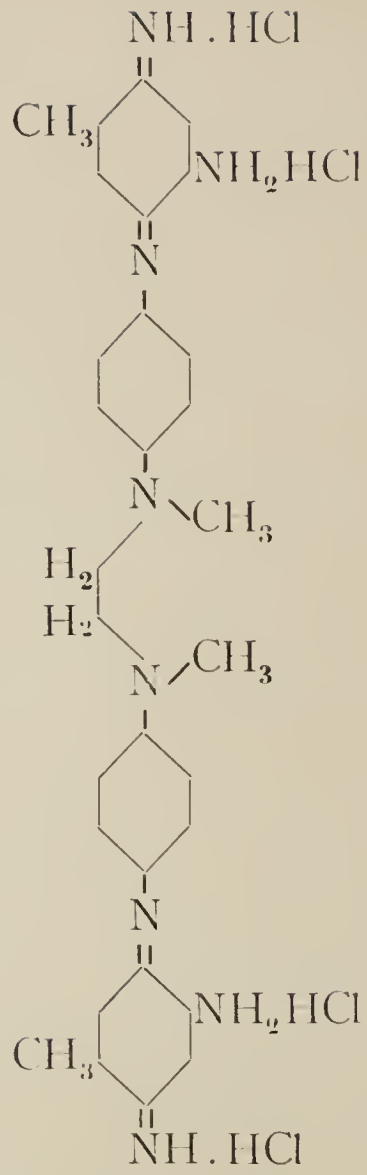


Nitrososloučenina tato musí dávati veškeré u přípravy barviv z nitrosodimethylanilinu užívané reakce, a barviva vyplývající musí býti co do odstínu stejná neb podobná oněm z nitrosodimethylanilinu.

Připravili jsme ku př.

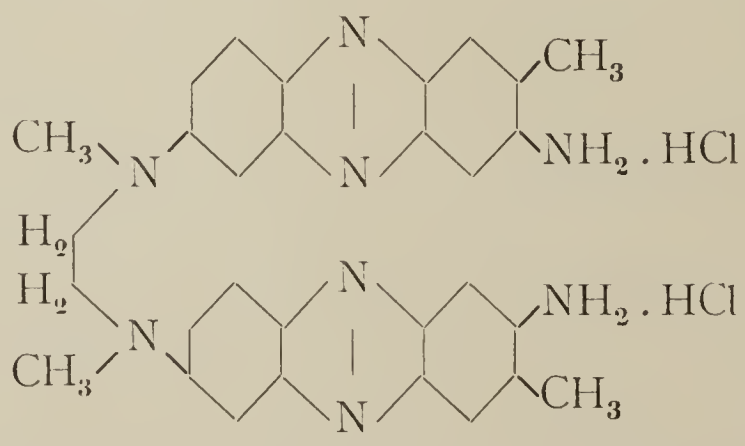
1. Varem zředěného roztoku chlorhydratu dinitrosodifenyldimethyldiamidoethanu obdobně vzniku nigrisinu [P] (nové šedi [By] čili methylenové šedi [M], ň. ř. p. 49446) barvivo, jež bavlnu taninem mořenou šedohnědě barví.

2. Smísením za chladu roztoku chlorhydratu dinitrosodifenyldimethyldiamidoethanu s chlorhydratem metatoluylendiaminu vzniká bavlnu taninem mořenou modře vybarvující analogon toluylenové či neutrální modři, jemuž příslušel by vzorec



Barvivo toto jest však, jako všecky prostý indaminový chromofor obsahující, nestálé a proto bez významu pro průmysl.

3. Stálé, pěkné, toluylenové čili neutrální červeni (B. XII, 933; XIX, 2604) odpovídající a stejným odstínem se vyznačující barvivo na vlnu a taninem mořenou bavlnu vzniká ze svrchu uvedené modři zahříváním vodného roztoku skoro do varu za provádění vzduchu. Jemu přísluší vzorec



Stejně jako u vytknutých tří případů dá se očekávati, že vzniklo by, kdyby se pojila nitrososloučenina zásady Schoopovy

s	barvivo odpovídající
metafenylendiaminem	neutrální violeti [C], [D, H]
(2, 6) difenylnaftylendiaminem	azinové zeleni GB [L]
difenylmetafenylendiaminem	indazinu M [C]
meta a paraxylidinem	giroflé [D H] či methylenové violeti [D H]

s	barvivo odpovídající
fenyl β naftylaminem	neutrální modři [C]
(2, 7) ditolylnaftylendiaminem	bazilejské modři [DH]
kyselinou gallovou	gallocyaninu [DH]
β naftolem	nové modři [C]
(2, 7) dioxynaftalinem	muscarinu [DH]
m. oxydifenylaminem	pravé černi [L]
kyselinou gallaminovou	gallaminové modři [G]
α naftolem	indofenolu [DH]

a že by se jí užiti mohlo k reakcím, dle nichž z nitrosodimethylanilinu vzniká modř methylenová.

Kdežto svrchu vypsaná mnou připravená barviva jsou dražší než dříve známá a dosti málo v užívání vešlá, z nichž spoutáním dvou molekul odvoditi je lze a sotva proto významu v průmyslu nabudou, připravil již dle soukromého sdělení svého p. E. Noelting ze zásady Schoopovy derivaty, jež praktickou důležitost slibují.

Vzhledem k tomu, že polohy »para“ v zásadě Schoopově nitrosováním a redukcí amidovými skupinami obsaditi by se daly, mohl by amin tak získaný tetrazotován zajímavých tetrazobarev poskytnouti při pojení s fenoly neb aminy.

Jelikož prací v předcházejícím vypsanou zcela najisto dokázáno jest, že zásada Schoopova tetramethyldiamidodifenylethanem není, není tento dosud vůbec znám, neboť o sloučenině, již Tröger z dimethylanilinu, sirouhlíku, zinkového prášku a kyseliny solné připravil a již za tetramethyldiamidodifenylethan považoval, dokázal Wiernik (B. XXI. 3204), že jen tetramethyldiamidodifenylmethanem jest. Jodmethylat jeho vyrobili sice Heumann a Wiernik (B. XX. 909) z nemethylované dle Fittiga a Stellinga (A. *137*. 260) připravené zásady a iodmethylu, ale odštěpení methyliodidu v zásadě ammoniové se jim nepodařilo.

Práci Schoopovu o oktomethyltetraamidotetrafenylethanu z dimethylanilinu a acetylentetrabromidu jsme nepokovali, jelikož by bylo bývalo velmi nesnadno rozhodnouti, zdali sloučenina ta neb snad jen tetramethyldiamidodifenylmethan vznikl. Schoop uvádí jako jeho bod tání 90° a varu 360°, dle Nathansona a P. Müllera (B XXII 1882) jest bod tání tetramethyldiamidodifenylmethanu též 90° a varu u nejčistšího 390°. Bylo by tedy třeba za příčinou rozhodnutí otázky té uchýliti se k stanovení váhy molekulární dle Raoulta.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 20.

NÁUKA O KVĚTENSTVÍCH

NA ZÁKLADĚ DEDUKTIVNÍM

(SROVNÁVACÍM A FYLOGENETICKÉM).

NAPSAL

Dr. LADISLAV JOS. ČELAKOVSKÝ.

(SE ČTYŘMI TABULKAMI OBRAZCŮ.)

PŘEDLOŽENO DNE 16. PROSINCE 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

OBSAH.

Str.

I. Úvod literárně historický 1
II. Nové základy 28
III. Soustava květenství 40
A. Květenství homotypní 41
I. Typ latovitý neboli thyrsoidní 41
AA. Laty hroznovité 41
BB. Laty vrcholíkovité 43
II. Typ hroznovitý neboli botrytický 51
AA. Botrye jednoduché 51
BB. Botrye složené 53
a) Stejnotvárně složené 53
b) Různotvárně složené 54
III. Typ vidlanovitý neboli brachiální 55
AA. Vidlany jednoduché 55
BB. Vidlany složené 61
B. Květenství heterotypní 63
AA. Thyrsoidy 64
BB. Sarmentidy 66
Výklad obrazců 69
Résumé 72

I.

Úvod literárně historický.

Důležitá morfologická náuka o květenstvích (inflorescencích) rostlin posavad není uspokojivě propracována. Scházíť doposud pravé logické dělidlo, schází pravá methoda, kterouž by se dala nesmírná rozmanitost forem květenství v ladně článkovitý celek neb systém v souvislosti dokonale přirozené uvésti. Methoda pravá může býti toliko srovnávací a fylogenetická. Posavad oblíbili si morfologové vycházeti od forem nejjednodušších a z nich skládati tvary složitější, místo aby tyto složitější formy uvažovali v celosti, tak jako i rostlina v celosti je tvoří. Nedostatek pravé methody jest pak příčinou mnohých vad a logických nejasností celé náuky. Stesků na tento neuspokojivý stav náuky o květenstvích bylo již mnoho a častěji pronášeno, nejnověji opět od Buchenau-a, [1]) leč nápravy nedocíleno právě proto, že nedostatečnost celé posavadní methody nebyla nikdy jasně prohlédnuta.

Tuto pravou cestu nalézti, doufám, že se mi po dávném již studiu květenství a po hlubším uvažování o posavadních nedostatcích běžné náuky inflorescenční v té míře podařilo, že mohu se zdarem podniknouti žádanou nápravu a postaviti náuku tuto na pevnější a správnější základy.

Aby však předem bylo jasno, v čem spočívají nynější nedostatky, a jaké tudíž jim třeba nápravy, bude záhodno, abych dříve podal přehled dějin a vývoje této náuky.

Již starších botaniků před Linné-em, tak zvaných otců botaniky (patres), nemohlo ujíti, že jsou květy na stonku jistým způsobem uspořádány, i byly u nich již některé názvy pro některé formy tohoto uspořádání v užívání. Tak uvádí již Jungius v Isagoge phytoscopica (1678) tyto způsoby květenství: spica, capitulum, umbella, corymbus, panicula, verticillus. Pojem květenství a název inflorescentia však teprva Linné ve své Philosophia botanica (1751) vystavil, avšak nikoliv tam, kde jedná o jednotlivých formách květenství, nýbrž toliko příležitostně tam, kde vypočítává znaky pro systematiku rostlin důležité (na př. též placentatio, radicatio, ramificatio a pod.). Dosti správně praví (str. 112): »inflorescentia est modus, quo flores pedunculo plantae annectuntur; quem modum florendi dixere antecessores.« Avšak správné toto ponětí pokazil si sám

[1]) Ve spisku: Zwei Abschnitte aus der Praxis des botanischen Unterrichts. Bremen. 1890.

tím, že od vlastního květenství rozeznával květ složený (flos aggregatus et compositus). Dle předsudku od předchůdců zděděného rozeznával totiž květ jednoduchý a květ složený, tak jako se rozeznávají listy jednoduché a listy složené. Dle tohoto chybného názoru květ složený, jaký především shledáván u *Komposit* čili rostlin Složnokvětých, skládá se z kvítků (flosculi) na společném lůžku (receptaculum commune) sedících a obyčejně též společným kalichem (calyx communis, involucrum), totiž zákrovem obdaných. Jakožto složené květy uvádí Linné na str. 76: okolík (umbella), vrcholík (cyma), strboul zákrovem opatřený čili úbor (flos compositus u *Komposit* a flos aggregatus proprie dictus u jiných rostlin), jehnědu (flos amentaceus), klásek trav (glumosus aggregatus flos) se svou gluma communis (s plevami), a palici (spadix) s toulcem (spatha communis). Nejpodivnější jest, že mohl Linné vrcholík, jenž se u kaliny a u některých druhů svíd *(Cornus)* nachází, květenství tak velice rozvětvené, obalu společného nemající, považovati za složitý květ — že úbor *Komposit* za takový měl, ještě nejspíše možno pochopiti —: avšak Linné sám to vysvětluje tím, že jiný druh rodu *Cornus*, totiž dřín *(C. mas)* má okolík (flos umbellatus), ze kterého prý dalším rozvětvením povstal vrcholík svídy. Za příčinou rodové příbuznosti musil tedy sám sebou lichý pojem složitého květu vnucen býti také vrcholíku, ač jest květenství daleko rozdílné.

Na zcela jiném místě své knihy, na str. 41 vypočítává a definuje Linné ostatní květenství, která se mu totiž do ponětí složeného květu nehodila, totiž: svazek (fasciculus), strboul (capitulum), klas (spica), chocholík (corymbus), latu (panicula), kytku (thyrsus), hrozen (racemus), přeslen (verticillus); jak vidno, v pořadí velice libovolném.

Neblahý pojem složeného květu zavinil tudíž netoliko nepřirozené rozptýlení květenství na dvou různých místech pod různými pojmy vůbec, nýbrž i odtržení a oddálení jehněd, klásků trav a palic od klasů, ku kterýmž náležejí, jakož i strboulů zákrovem obalených (u *Komposit, Dipsacei* a pod.) od strboulů neobalených (u *Gomphreny* na př.) zvláště.

Přes to všecko nelze upříti Linné-ovi zásluhu, že květenstvím věnoval větší pozornost nežli všickni jeho předchůdcové, ovšem již z té příčiny, že pojmů a názvů z květenství vážených v botanice popisné měl zapotřebí.

Od lichého ponětí složeného květu bylo ovšem později upuštěno, avšak jehnědy, palice a úbory (anthodia) vlekly se ještě dlouho potom, a z části až do nejnovější doby v morfologiích a ve spisech popisných jakožto zvláštní formy, od klasů a strboulů rozdílné.

První pokus vědeckého roztřídění květenství učinil Röper ve svých »Observationes aliquot in florum inflorescentiarumque naturam« (v časopise Linnaea r. 1826), rozděluje je ve dvoje skupení, v květenství obmezené s výstředivým (centrifugálním) vývojem květů a v neobmezené s rozkvétáním dostředivým (centripetálním). U prvějších jest hlavní osa obmezena květem, který nejprve rozkvétá, a ostatní květy rozkvétají ze středu k obvodu v tom pořádku, jak různé generace květních os po sobě následují, u květenství dostředivých naproti tomu otevírají se květy v pořádku z dola vzhůru čili ze vnějška do vnitř. Řídě se těmito znaky počítal Röper ku květenstvím obme-

zeným a odstředivým: vrcholík (cyma), klubko (glomerulus) a svazek (fasciculus), mezi neobmezené kladl ostatní již od Linné-a známé tvary květenství: spica, amentum, spadix, racemus, corymbus, umbella, capitulum, panicula, thyrsus. — Přeslen (verticillus), jenž není žádným zvláštním květenstvím, nýbrž pouze postavení květů v kruhu kolem osy označuje a jak v hroznech *(Myriophyllum)*, tak i v latách *(Alisma)* vyskytovati se může, jenž však vzdor tomu ještě později býval mezi formy květenství vřaďován, vším právem Röper vypustil.

Toto Röper-ovo rozdělení květenství má v dějinách botaniky zvláštní důležitost; ono nejenom u nejbližších vrstevníků vzbudilo velkou pozornost a souhlas, takže od mnohých spisovatelů botanických, na př. hned od De Candolle-a (Organographie végétale 1827) téměř beze změny bylo za vlastní přijato; nýbrž ani podnes v podstatě nepozbylo své platnosti, třebas ponětí, obsah i pojmenování obou řečených skupin postupem času byly více méně změněny. Květenství obmezené totiž dle hlavní formy vrcholíku (cyma) obdrželo název květenství vrcholíkovitého (cymosního) a květenství neobmezené dle hroznu tam patřícího jmenuje se nyní hroznovitým (racemosním neb botrytickým). Nejproslulejší a i nejnovější morfologové, jako Payer, Eichler, Engler, Pax a j. drželi se a drží posud tohoto rozvržení ve květenství vrcholíkovité a hroznovité.

Znaky těch dvou skupin nemohly ovšem zůstati tak, jak je byl Röper ustanovil. Podrobnější zkušenost totiž prokázala, že jsou u rostlin též taková hroznovitá květenství, neboli kratčeji botrye (hrozny, klasy, okolíky), kterým neschází konečný květ (na př. hrozen dřišťálu, *Actaey*, okolík lašťovičníka, některých Okoličnatých), která tedy ve skutečnosti jsou obmezena, ačkoli se od neobmezených nemohou odloučiti; naproti tomu že některé vidličnaté vrcholíky čili vidlany (dichasie), jak jednoduché (na př. u *Lonicera xylosteum*, u buku ♀) tak někdy i složitější v prvních rozsochách postrádají květu konečného. Anobrž laty, k neobmezeným květenstvím počítané, jsou z pravidla obmezeny, tak že jest s podivením, že Röper toho přehlednul. Vůbec tedy znak obmezenosti neb neobmezenosti hlavní osy nemá té ceny, kterou mu Röper přikládal, a to tím spíše, že původně každé květenství (a vůbec každá větev květonosná) bylo obmezeno květem; neobmezenost povstala později vymizením květu konečného. Tolik ale jest pravda, že ve květenství hroznovitém — po vyloučení laty — nejčastěji a skoro pravidelně, ve květenství vrcholíkovitém však jen pořídku a výjimkou konečný květ hlavní osy se ztratil, což se vysvětluje takto:

Květenství hroznovité bývá aneb bylo původně hojnokvěté; zakládáním a vyvinováním hojných květů postranních vyčerpá konečně hlavní osa své síly tak, že přestane růsti, aniž by ještě konečný květ vytvořiti mohla. Ovšem že toto vysílení osy hlavní má ještě jiný, fylogenetický důvod, o němž později promluvím. Ve vrcholíkovitých květenstvích však, které pod konečným květem toliko skrovný počet postranních os vytvořují, příčiny té k potlačení květu konečného ovšem není, leda že v řídčejším případě silné postranní osy veškerou hlavní osu ke svému vzniku spotřebují.

Ještě méně než obmezenost neb neobmezenost hlavní osy hodí se k vymezení definice vrcholíkovitého a hroznovitého květenství znak druhý, totiž posloupnost odstředivá neb dostředivá v rozkvétání, a to ze dvou podstatných příčin. Předně stanoví povahu květenství dle logického jeho pojmu pouze způsob rozvětvení prýtů květonosných neboli způsob, jímžto květy ve společném celku uspořádány jsou; s čímž postup v rozkvétání do jisté míry může souviseti, avšak nikoliv nemůže toto samo o sobě povahu a ráz květenství určovati. Proto již kritický Schleiden namítal, že rozkvétání jest životním úkazem zvláštním, jenž toliko logickou nejasností do náuky o květenstvích vnesen byl (Grundzüge str. 235).

Do jisté míry, jak řečeno, pořad v rozkvétání ovšem s rozvětvením a postavením květů jest ve spojení. Doba rozkvětu totiž v první řadě závisí na době založení květů: květ dříve založený také dříve rozkvétá. Ve květenství hroznovitém vznikají hrboulky květní na hlavní ose v pořádku akropetálním, proto zpravidla také akropetálně čili centripetálně se otvírají. Co se však týče květů rozličných generací, panuje opět pravidlo, že květ mateřského prýtu před květem dceřiným (postranním) se zakládá, proto také květy na nižších stupních rozvětvení dříve než květy vyšších stupňů. Poněvadž pak ve vrcholících květy nižších stupňů ve středu a blíže středu celého květenství se nalézají, musí rozkvétání jejich od středu k obvodu, tedy odstředivě postupovati. To platí ovšem jen tehdy, když pod konečným květem nemnoho postranních květních os vychází; je-li jich značnější počet, jako v latách, nerozvine se vždy konečný květ, nýbrž obyčejně dolejší postranní květy na téže ose nejdříve, poněvadž také dříve, nežli na založení konečného květu došlo, založeny byly. Z té příčiny patrně Röper kladl laty mezi květenství centripetální, ačkoli nejsou zároveň také neobmezeny.

Doba rozkvětu však nezávisí toliko od času prvního vzniku květu, nýbrž také od mohutnosti vzrůstu na místě toho vzniku panujícího. V latách na př. druhdy dolejší větévky slaběji rostou a se vyvinují, jejich květy se pak později otvírají neb zůstanou nevyvinuty, a totéž možná říci o hroznovitých květenstvích, o hroznu a klasu neb strboulu, kteréž výjimkou ne v nejdolejší části, nýbrž v prostředku *(Dipsacus)* neb dokonce na hořejšku (druhy vstavačů) rozkvétati počínají. V složitém mnohokvětém květenství černého bezu nelze vůbec žádné přesné pravidlo v postupu rozvíjení se pozorovati, rozkvétání děje se tam dílem centrifugálně, dílem centripetálně. A to jest druhá příčina, pro kterou se pořádek rozkvětu nehodí k označování hlavních skupin květenství.

Snaha morfologů směřovala tedy k tomu, aby nepřípadné znaky květenství hroznovitého a vrcholíkovitého, které Röper byl vytknul, nahrazeny byly jinými stálejšími a podstatnějšími. Neboť skupiny samy uznávány vůbec jakožto přirozené a dobře volené a měly nadále býti zachovány. První botanik, jenž nový znak pro ně navrhl, byl, pokud mi známo, Payer, výtečný zkoumatel vývoje rostlin, zvláště květů. Payer užívá sice ve svém spise Éléments de botanique (1857) pro oba oddíly ještě názvů inflorescence définie et indéfinie, avšak v jiném smyslu než Röper. Praví totiž na str. 93, květenství že jest obmezené (définie), jestliže počet květů téže generace jest tak určitý (déter-

miné), že jaksi napřed ustanoven býti může; neobmezené však jest, když množství květů v téže generaci jest neurčité a dle bujnosti rostliny proměnlivé. Jest tudíž hrozen, praví dále, dle tohoto výměru od definice jiných botaniků se lišícího vždy neobmezeným, ať si má konečný květ čili nic, protože počet postranních os květních jest neurčitý.

Po takovéto opravě znaku obou typů květenství nezdá se však název obmezený a neobmezený dobře voleným, moha zavdávati podnět k nedorozumění, jak Al. Braun r. 1864 právem namítal. Název ten byl tedy později vůbec zanechán, leč Payer-ovo rozeznávání květenství vrcholíkovitého a hroznovitého dle toho, je-li počet vedlejších os téže generace u r č i t ý neb n e u r č i t ý, ujalo se trvale v náuce o květenstvích až do nejnovější doby. Zvláště Eichler (v Blüthendiagramme 1875), po něm Engler (v Natürliche Pflanzenfamilien II. 1. 1889) a mnozí jiní tímto způsobem liší květenství vrcholíkovité od hroznovitého.

Leží však na snadě, že tato definice sama jest velmi neurčita. Nikdo nemůže říci, co jest počet určitý a co neurčitý, kde jeden přestává a druhý začíná. Eichler sám přiznává, že dle této definice okolík s konečným květem a s malým počtem paprsků od vrcholíku více než dvojramenného nelze rozeznati; avšak, praví dále, ony se vskutku také nijak od sebe neliší. To prý se vysvětluje starou zkušeností, že v přírodě ostrých hranic, jaké my ve svých osnovách klademe, nestává.

Avšak odvolává-li se Eichler ke staré známé této zkušenosti, nemůže tím nikterak omluviti přípustnost definice, v nížto samé žádná hranice ostrá položena není. Nelze tím omluviti, jestliže se dva pojmy, které se navzájem vylučovati mají, tak vymezí, že jedna a táž věc, jako okolík obmezený, pod oba pojmy stejně spadává. Zde neleží závada v neobmezenosti přírody, nýbrž v nesprávném, nedostatečném vyměření pojmu samého. Jestliže v přírodě vyskytují se přechody mezi květenstvím vrcholíkovitým a hroznovitým, mezi vrcholíkem a okolíkem, jestliže za jistých podmínek vrcholík může přejíti v okolík aneb naopak, musíme se tomu jako hotové události podrobiti, musíme ale přece moci povědět, kdy a čím nastává tento přechod, kde jest hranice, která se jím v přírodě překročuje. Ale tu možnost nesmí definice poskytovati, aby totéž květenství dle libosti brzy do typu hroznovitého, brzy do vrcholíkovitého se mohlo klásti. Takové chybné definice nesmí se strpěti. I jest to ku podivu, že morfologové novější vesměs ji jako nezbytnou a ničím jiným nenahraditelnou posud strpěli.

Počtu určitému vyrozumívá se vůbec tak, že jest to počet malý, namnoze 2 neb 1, počet neurčitý pak znamená počet větší a právě proto méně určitý. Avšak kde jest nějaká hranice mezi počtem menším neb větším? Zajímavo jest, že Payer sám, od něhož chybná definice ona pochází, rozeznává pouze dva druhy své inflorescence définie čili květenství vrcholíkovitého, totiž vrcholík dvouramenný (cyme bipare) a vrcholík jednoramenný (cyme unipare). Vrcholík víceramenný (jemuž dal Eichler název pleiochasium) Payer neuvádí. K čemu potom ten tajemný výraz définie a déterminée, když by stačilo říci zcela přímo, že má »cyme« v jeho smyslu pouze dvě neb jednu osu postranní, které se stejným

způsobem do vyšších stupňů rozvětvovati mohou? Bylo by pak ovšem zapotřebí odůvodniti to, proč na počtu 2 neb 1 zakládá se zvláštní hlavní typ, rozdílný od květenství hroznovitého s větším počtem os pobočných.

Též Al. Braun v Ascherson-ově [1]) květeně Braniborské (1864) uvádí jakožto formy květenství vrcholíkovitého pouze vrcholík dvouramenný čili vidlan (dichasium) a vrcholík jednoramenný ve dvou formách, totiž vijan (Wickel) a šroubel (Schraubel). Těmito druhy vrcholíka jest ponětí tohoto typu dle objemu pojmu zcela přesně vymezeno, přece však praví Braun všeobecně, že jest počet os postranních a listenů je podporujících (čili prvolistů, Vorblätter) »určitý (skoro vždy 2)«. Také Braun neviděl tedy v počtu určitém nic jiného než počet 2 neb 1, nebo spíše naopak v počtu 1 neb 2 neviděl žádný lepší důvod k rozeznávání květenství cymosního, nežli že jest to počet určitý proti neurčitému počtu os ve květenství hroznovitém.[2])

Jestliže se však mezi vrcholíky rozeznává také vrcholík víceramenný, pak pozbývá název »určitý« rozhodně všeho smyslu. *Caucalis daucoides*, rostlina okoličnatá, má namnoze trojpaprsečný neboli trojramenný okolík, *Euphorbia falcata* obyčejně trojramenný vrcholík (dle Sachs-a i Pax-a, kteří květenství pryšců jako zvláště charakteristický vrcholík vynášejí). Jak může tentýž počet t ř i býti u *Caucalis* počtem neurčitým, u pryšce určitým? Také by se mohlo slovu »určitý« rozuměti tak, že jest počet u rostliny, jíž se týče, stálý, kdežto v květenství hroznovitém počet neurčitý, jak již Payer poznamenal, se mění dle různé bujnosti vzrůstu rostliny. Ale ani to o vrcholících víceramenných tvrditi nelze; tak na př. mění se počet paprsků u mnohých druhů *Euphorbii* mezi 3 až 5, u jiných od 5 do množství většího, zcela neurčitého.

Jelikož se vrcholík víceramenný (pleiochasium Eichler-ovo neb cyma multipara dle Bravais-a) od okolíka obmezeného ničím neliší, musí tento nesprávný pojem z vědecké nauky naprosto se vyloučiti; to, co se tím vyrozumívá, musí se uznati za okolík a nic jiného, a květenství vrcholíkovité, pakli vůbec jakožto zvláštní typus se dá udržeti, o čemž dále uvažovati třeba, musí býti obmezeno počtem os postranních dvou neb jedné, obmezeno tudíž na květenství vidlicovité, jedním neb dvěma rameny rozvětvené, pročež také název v i d l a n neb r o z s o c h a lépe než název vrcholík, jenž, jak ukážu, původně něco jiného znamená, k označení toho květenství se hodí.[3])

[1]) Prof. Ascherson potvrdil v dopise svém mou domněnku, že jeho výklad květenství v květeně Braniborské tlumočí pouze náhledy Braun-ovy, pročež to, co tam pověděno, co do věci samému Braun-ovi přičítati sluší.

[2]) Já jsem také již r. 1865, neznaje ještě Flory Ascherson-ovy ani prací Wydler-ových, charakterisoval ve svém »Atlase rostlinstva« květenství »vrcholíkovité« tím, že »postranní 1—2 osy květní vysýlají též zase 1—2 pobočné květy a tak dále do vyšších stupňů«. V Pokorné-ho přírodopise však jsem od správné této definice opět upustil (patrně působením Sachs-ova chybného učení), a s vidlany vrcholík víceramenný i kružel zase jsem spojil.

[3]) Ostatně již Wydler, jda v šlepějích Braun-ových a obmezuje typ vrcholíkovitý též na dichasium, vijan a šroubel, nazval typ ten v i d l i c o v i t ý m neb d i c h o t o m i c k ý m (»Gabelige oder dichotome Blüthenstände«). Viz »Flora« 1851, str. 290.

Třeba však typus květenství vidlanovitého, jestliže jest týž oprávněn, náležitě odůvodniti a jinak definovati. Že výměr toho pojmu počtem os určitým není dostatečně proveden, to pociťoval nejprve Al. Braun (a Ascherson, jenž učení svého mistra a vysoce ctěného učitele nám vyložil a zachoval), neboť vytknul ještě jeden znak, a to v první řadě, na rozeznávání vidlanů od typu hroznovitého. Znak ten záleží v tom, že hlavní osa květenství hroznovitého, nesoucí větší, neurčitý počet listenů a postranních os květních, však obyčejně květem neukončená, nerovná se osám vedlejším, květem ukončeným však postranních květů dalších nenesoucím, zřídka pouze 1 neb 2, obyčejně však žádných listenů nemajícím. Květenství vidlanovité (neb »vrcholíkovité«) však se skládá z os hlavních a k nim pobočních (vedlejších) stejným určitým počtem listenců (skoro vždy 2) a květem svým konečným (zřídka potlačeným) vesměs sobě se rovnajících.

Tento znak celkem trefně jest vytčen, platí však pouze pro jednoduché botrye, méně však pro složené. Vezměme na př. složený okolík: v něm vedlejší osy prvního stupně, nesoucí na konci větší počet listenů, rovnají se v tom úplně hlavní ose květenství, teprve osy třetího stupně jsou jinaké, totiž bezlistenné. A dvouramenný vidlan neliší se v tom ohledu od složitého okolíka, jestliže prýty posledního stupně jsou též bezlistenné (někdy u Hypericum dle Wydler-a); i tu jsou osy dvou prvních stupňů sobě rovny, třetího stupně nerovny.

Tedy i tento znak, ačkoli mnohem ostřejší a závažnější, nežli jest určitost a neurčitost počtu os, není zcela spolehlivý, z čehož následuje, že to přece jen znak vedlejší, ještě na nějaké jiné ještě podstatnější vlastnosti obou druhů květenství závislý, který zbývá vyšetřiti.

Opět jiný rozdíl shledávali Hofmeister [1]) a Sachs [2]) mezi květenstvím hroznovitým a vrcholíkovitým (kteréž oni neobmezovali pouze na vidlany, nýbrž ještě v širším objemu vyrozumívali nežli Eichler), kladouce největší váhu na tu okolnost, zdali vedlejší osy hlavní svou osu přerůstají čili nic. V Sachs-ově učebnici botaniky 3. vyd. str. 510 totiž čteme toto: »Hroznovité květenství povstává tehdy, když táž osa hlavní po sobě více méně četné postranní prýty v akropetálním pořádku zplozuje, kteréž se méně neb aspoň ne více do délky vyvinují, než část osy hlavní nad nimi stojící. Cymosní květenství naproti tomu vzniká tím, že každý prýt pod konečným květem hlavní osy květem končí, když byl dříve vyslal jeden neb několik podkvětných prýtů, které opět květem se obmezí a tak soustavu osní dále rozvádějí; každý postranní prýt se tedy vyvinuje silněji nežli mateřská jeho osa nad insercí jeho.«

Tyto definice jsou velice jasné, nastává pouze otázka, hodí-li se na všecky případy. Tomu ovšem tak není, pročež Eichler, mající větší morfologické a soustavné vědomosti, než oba jmenovaní fysiologové, a jiní auktorové na ně nepřistoupili. Jedině Pax ve své Všeobecné morfologii (1890) přidal se k náhledu Hofmeister-ovu a Sachs-ovu, užívaje též znaku přerůstání jakožto hlavního

[1]) Allgemeine Morphologie der Gewächse. (Handbuch der physiologischen Botanik.) 1868.
[2]) Lehrbuch der Botanik.

znaku vrcholíkovitých květenství; poněvadž prý ve hroznovitých květenstvích přerůstání, kteréž pro vrcholíky jest charakteristické, nikdy se nenachází.

Přehlédneme-li však květenství obou typů podrobněji, shledáme opak tohoto tvrzení, jelikož jsou skutečně vrcholíky bez přerůstání, jakož zase hrozny s přerůstáním. Velmi známý a rozšířený příklad vrcholíků či vlastně vidlanů, jejichž postoupné osy nepřerůstají, nýbrž kratšími mateřské své osy se vyvinují, nalézáme u rostlin Pyskatých. Jednoduché klubkovité vidlany trojkvěté bez přerůstání vedlejších os nalézáme u zimolézů (*Caprifolium*), u kaštanu pravého v pohlaví ženském, u *Datisca cannabina* a j.

Jednak ale se zase přerůstání časem přiházívá v latách, které se přece ke hroznovitým květenstvím počítají, a v obmezených hroznech (na př. v chocholíku od *Luzula flavescens*, v chocholíku klasnatém od *Luz. campestris*, (viz Buchenau v Pringsheim-ových Jahrbücher IV. obr. 21. a 25.), zvláště když zchudnutím z takovýchto lat povstaly. Stůj zde na př. latovité květenství od *Lactuca muralis*, jehož hoření větve konečný strboulek daleko přerůstají, což se opakuje s větévkami druhého stupně, a což ovšem na hořeních, pouze dva listeny nesoucích větévkách způsobuje též přerůstající vidlany dvou- a jednoramenné. Také kružel *Juncacei* vyniká svým značným přerůstáním zvláště dolejších, ale též hořeních větví, a přece jej kladou auktoři, i sám Pax, mezi laty, tedy ve smyslu těchto auktorů mezi květenství hroznovitá. Důsledněji tudíž postavil Sachs kružel mezi vrcholíkovitá květenství; pak ale by byl měl vrcholíky mnohých *Labiat*, u nichž přerůstání se nepozoruje, položiti mezi květenství hroznovitá. A konečně máme na okolících s jejich skrácenou, někdy květem ukončenou osou hlavní a prodlouženými osami vedlejšími velice známý příklad přerůstajícího květenství hroznovitého. Tyto, jejichž nejbližší příbuznost s hroznem jest samozřejma, byl by musil Sachs důsledně počítati k vrcholíkům, i jest ku podivu, že toho ani on ani Pax nepozoroval. Vůbec, kdyby se při rozeznávání hlavních typů květenství zásada přerůstání měla důsledně provésti, povstal by z toho velký zmatek a naprosto nepřirozené seskupení květenství.

Princip přerůstání není tudíž lepší ostatních, o nichž dříve jsem jednal; ačkoli jest to znak, jenž nejmnožší a nejvýznačnější vidlany charakterisuje, přece nevyjadřuje pravou a vlastní podstatu květenství vidlanovitého čili »vrcholíkovitého«.

Sachs (jakož i Hofmeister) vycházel z myšlénky zcela správné, že totiž rozvětvení v oboru květním čili ve květenství jest toliko zvláštním případem rozvětvení vůbec, pročež všeobecné zákony rozvětvení i vegetativních prýtů musí též míti platnost, pokud květenství se týče. Sachs rozeznával předem všeobecné rozvětvení dichotomické a monopodiální. Při onom dělí se vrcholek prýtu ve dva stejné, k hlavní ose své stejnými úhly nakloněné díly, při tomto povstává pod vrcholkem v témž směru dále rostoucím postranní hrboulek jakožto začátek nového prýtu. Rozvětvuje-li se prýt nějaký způsobem posledněji vytčeným, může růsti buď statněji nežli pobočni jeho prýty, anebo rostou tyto silněji a jej přerůstají. Soustavu os, ve které to přerůstání panuje, nazval cymosní neboli vrcholíkovitou, soustavě pak, ve které hlavní osa mohutněji

dále roste, dal název soustavy racemosní čili hroznovité. Názvy ty vzal ovšem od obou hlavních způsobů květenství a přenesl pak tuto charakteristiku obojího rozvětvení ovšem též na oboje květenství.

Toto všeobecné rozvržení typů rozvětvení a vzrůstu rostlin jest sice výborné samo o sobě in abstracto, — avšak in concreto nehodí se k použití při rozeznávání květenství, poněvadž se při těchto jedná především o povahu celkového rozvětvení, pro které poměry vzrůstu teprva v druhé řadě mají jistou důležitost. Popatřme na př. na soustavu skládající se z osy hlavní a několika pobočních os. Pobočí osy mohou se vyvinovati slaběji a kratčeji nežli osa hlavní, čímž povstane hrozen, anebo se prodlužují dolejší z nich více než hořejší, takže vrcholky všech v stejné výši a jako v jedné ploše se nalézají, načež máme chocholík (corymbus), anebo se prodlouží osy vedlejší značně nad osu hlavní (tak zvaný hrozen cymósní). Soustava os zůstává ve všech třech případech tatáž, toliko forma její jest rozličná. Je-li soustava ta květenstvím, jest květenství to v podstatě totožné, totiž hroznovité, rozličný vzrůst co do statnosti a délky způsobuje pouze tři různé formy téhož květenství. Neprávem tedy nazval Sachs soustavu os, ve které vedlejší osy přerůstají hlavní, soustavou vrcholíkovitou, poněvadž podstata »vrcholíku« (t. j. vidlanu) nezáleží v přerůstání, jak Sachs a před ním již Hofmeister se domníval.

Ani rozdíl v rozvětvení dichotomickém a monopodiálním, ačkoliv důležitý, jedná-li se o poznání vývoje nějakého rozvětvení, pro klassifikaci květenství a vůbec soustav rozvětvených nemá valného významu. Již Warming ve svých výtečných Forgreningsforhold (Recherches sur la ramification des Phanerogames 1872) ukázal, že úžlabní prýt, záhy a statně vznikající, s vrcholkem prýtu mateřského může tvořiti dichotomii. Vijany mnohých *Borraginei* na př. vyvinují se tak, že vrcholek každého prýtu téměř dokonale dichotomuje; pro to však přece vijan zůstává vijanem, jako ten, který se řádně monopodiálně vyvinuje. Zbytečně tedy Schumann [1]) z ohledu na zvláštní vývoj takovému vijanu dal zvláštní jméno »borragoid«.

Ze všeho, co jsem posud v přehledu dějin náuky o květenstvích vyložil, vychází na jevo, že hlavní snaha morfologů, od Röpera počínaje, k tomu se nesla, aby dva hlavní způsoby květenství, totiž hroznovité a vrcholíkovité, byly ve vědě ustáleny a aby se vytkly znaky jejich nejpodstatnější. Zároveň jsme viděli, že náhledy spisovatelů botanických v tom, co jest nejhlavnějším znakem těch dvou typů, valně se rozcházejí, a že žádný ze znaků posud vypátraných neodpovídá úplně svému účelu. Všecky tyto znaky připouštějí různé výjimky, nehodíce se na všecky případy, a co hlavní jest, nejsou váženy z pravé podstaty těchto dvou typů, kteréžto posud více dle jakéhosi šťastného přirozeného názoru a taktu než dle zcela jasného a bezvadného pojmu byly rozeznávány. Příčina tohoto neobyčejného úkazu však jest, že cesta, po které se vždy kráčelo, neboli methoda, nevede k cíli; anobrž na této cestě muselo by se s plnou důsledností dojíti toho konce, že by se od rozeznávání dvou typů květenství vůbec musilo upustiti, jak to již dříve Schleiden byl učinil. Týž, zavrhuje prá-

[1]) V Berichte der deutschen botan. Gesellschaft, sv. VII., str. 53.

vem znak rozkvétání, zavrhoval též Röper-ovo květenství vrcholíkovité, uznávaje toliko jeden typus květenství, ku kterému patří hrozen, klas, okolík, strboul, vůbec květenství hroznovitá. »Říká se jim květenství jednoduchá« — praví Schleiden — »a vskutku nejsou a nemohou býti žádná jiná květenství.« Se stanoviska svého měl také pravdu; neboť methoda jeho byla — jako všech pozdějších morfologů — že vycházel od těchto květenství jednoduchých a z nich skládal všecka ostatní složitější jako latu, složitý vrcholík atd., kteréž mu byly složitými hrozny neb chocholíky, okolíky atd.

Vidlan dvouramenný, do vyšších stupňů rozvětvený, dle tohoto názoru jest vidlan složený z vidlanů jednoduchých (t. j. pouze do druhého stupně prýtů rozvětvených), a vidlan jednoduchý není nic jiného než okolík dvoupaprsečný, jenž jako každý jiný i hojnokvětější okolík může býti jednoduchým i složeným. Malý počet 2 os sám o sobě nebyl by dostatečným důvodem k stanovení zvláštního typu, kterýž by tím méně oprávněn byl, připustil-li by se vrcholík víceramenný (pleiochasium), neboť jestliže tento dle přiznání Eichler-ova od obmezeného okolíka se neliší, tedy z toho následuje, že ani typus vrcholíkovitý, k němuž se toto pleiochasium počítá, od hroznovitého květenství podstatně se neliší, že tedy žádným zvláštním typem ani není.

Také Eichler vycházel od květenství jednoduchých [1]) a z nich vyvozoval syntheticky veškerá květenství složitější, tedy i laty, kružele atd., jen že nepostřehl jako Schleiden, že na této cestě typus »cymosní« (vidlanovitý) nelze udržeti.

Ovšem porovnáme-li jednotné hojnokvěté květenství hroznovité, na př. hrozen neb okolík s jednotným hojnokvětým květenstvím vidlanovitým, buďsi vijanem nebo vidlanem (dvouramenným), shledáme úplnou protivu — zde rozvětvení do mnohých stupňů ale pouze jedním neb dvěma rameny, tam rozvětvení toliko do druhého stupně avšak četnými osami pobočnými — a tato protiva dvou jednotných (dle téhož zákona zbudovaných) květenství žádá uznání dvojího typu květenství. Z toho jde, že nikoliv samo rozeznávání těchto dvou typů, nýbrž způsob, jímžto se to posud stávalo, a cesta, po které se posud kráčelo, byly chybné.

Nežli však sám se o to pokusím, vyhledati novou pravou cestu k vytčenému cíli, musím výklad svůj historický doplniti vylíčením náhledů o jednotlivých formách, které se jednak mezi hroznovitá, jednak mezi vrcholíkovitá květenství počítají.

Vůbec možno říci, že se při seřaďování těchto forem největší váha kladla na poměrnou délku os hlavních a vedlejších, třebas princip ten obyčejně nebyl

---

[1]) Eichler počítá mezi květenství jednoduchá netoliko hroznovitá květenství, vskutku jednoduše, totiž do druhého stupně prýtů pouze rozvětvená, nýbrž také »vrcholíkovité«, které se přece obyčejně do vyšších stupňů rozvětvuje. Jednoduchým květenstvím nevyrozumíval pouze jednoduše rozvětvené, nýbrž vůbec z jiných podřízených květenství nesložené a nerozložitelné, tedy jednotné, t. j. dle jednoho zákona jednostejně vytvořené. Složeným květenstvím pak nazýval takové, které se skládá z více takovýchto jednotných květenství. To bylo sice logicky správné, jen že Eichler přehlédnul, že také lata jest takové jednotné, v částečná květenství nerozložitelné, tedy jednoduché květenství.

zřejmě vysloven. To vidíme již v soustavě Röper-ově. Tato ve skupině květenství neobmezených nejprve uvádí formy původně jednoduché: klas až strboul (které ovšem také ve složení objevovati se mohou); na konci latu a kytku (thyrsus), typicky do vyšších stupňů rozvětvené. Nemnoho scházelo a byl by Röper mohl ve skupině květenství centripetálních rozeznávati dvě podřízené skupiny: květenství hroznovitého a latovitého. První formy jednoduché: klas, jehněda, palice, hrozen, chocholík mají hlavní osu prodlouženu; poslední dvě: okolík a strboul ji mají skrácenu. Rovněž mezi květenstvími obmezenými liší se klubko a svazek od vrcholíka toliko skrácenými články os květních.

Podobný pořádek spatřujeme v Bischoff-ově Handbuch der botanischen Terminologie (1830), leč beze všeho výslovného roztřídění v určité skupiny. Pro nás, české botaniky, má Terminologie Bischoff-ova tu zvláštní zajímavost, že náš Jan Sv. Presl ve svých Počátcích rostlinosloví velmi mnoho, a co se květenství týče, skoro všecko z ní čerpal. Formy, které Bischoff uvádí jsou tyto: 1. verticillus, 2. spica, cum spicula, 3. spadix, 4. amentum, 5. racemus, 6. corymbus, 7. panicula, cum thyrso et anthuro, 8. umbella, 9. capitulum, cum calathio, 10. coenanthium, 11. cyma, 12. tasciculus, 13. glomerulus.

Odmyslíme-li si přeslen (verticillus), který žádným zvláštním květenstvím není, nýbrž toliko částí nějakého květenství, hroznu neb laty, tedy vidíme předně, že i tu Röper-ova květenství odstředivá: cyma, fasciculus, glomerulus, zcela na konci uvedená, zůstala pohromadě. V pořádku ostatních, centripetálních to forem, vysvítá ještě rozhodněji ohled na poměrnou délku os, jelikož lata zde postavena hned za corymbus, s nímž se prodlouženou osou hlavní i vedlejšími shoduje. Můžeme tedy do řady Bischoff-ovy interpretovati následující dělidla:

A. Květenství neobmezené.
- *a*) Hlavní osa prodloužena, vedlejší skráceny:
  klas, palice, jehněda.
- *b*) Hlavní osa i vedlejší prodlouženy:
  hrozen, chocholík, lata.
- *c*) Hlavní osa skrácena, vedlejší prodlouženy:
  okolík.
- *d*) Hlavní i vedlejší osy skráceny:
  strboul, placatka (coenanthium).

B. Květenství obmezené.
- *a*) Osy květní prodlouženy:
  vrcholík.
- *b*) Osy květní více méně skráceny:
  svazek, klubko.

Některé poznámky, které Bischoff na svém místě přičinil, jsou zcela trefné, tak na př. již sám praví o přeslenu, že to vlastně žádné květenství pro sebe není, poněvadž pouze jisté postavení květů na lodyze označuje, které od přeslenovitého postavení podpůrných listů neb listenů závisí, a že jej jen proto ještě mezi květenstvími uvedl, aby podal úplný přehled forem a jich názvů,

které od Linné-ových dob se zachovaly. O palici poznamenal, že jest to modifikace klasu se stlustlým vřetenem, též o jehnědě, že jest to způsob klasu s neúplnými květy, jehož vřeteno po odkvětu neb uzrání upadává, o úboru (calathium) pak praví, že se ničím podstatně neliší od strboulu, než tím, že u *Kompositi* se nachází (s tyčinkami květů srostlými).

O Röper-ově nedávném rozvržení květenství dle rozkvétání dostředivého a odstředivého zmiňuje se Bischoff toliko v závěrečné poznámce, nepronášeje o něm vlastního úsudku; přece však jeví se, jak jsme viděli, působení oné náuky na celý pořad forem uvedených.

Nejméně se Bischoff-ovi poštěstilo rozeznávání laty, chocholíka a vrcholíka; kružel sítin (*Juncus*) kladl mezi vrcholíky, avšak kružel kláskatý od *Scirpus silvaticus* uvádí mezi složitými chocholíky.

R. 1848 vyšly J. Sv. Presl-a Počátkové rostlinosloví, ve kterýchž o květenství čteme nejprve, že se rozeznává květenství neobmezené neboli dostředivé a květenství obmezené čili zástředivé.[1]) Charakteristika obou květenství podána zcela dle Röper-a, avšak nějakého osobního mínění o tomto způsobu rozeznávání náš spisovatel nepronáší. Ostatně se také nikterak tohoto rozdělení nadále nedrží a hned praví, že jsou květenství následující způsoby: 1. klas a klásek (spica et spicula), 2. palice (clava), 3. jehněda neb kočička (amentum), 4. hrozen (racemus), 5. lata (panicula), 6. kytka (thyrsus), 7. chocholík (corymbus), 8. okolík (umbella), 9. vrcholík (cyma), 10. chomáč neb svazek (fasciculus), 11. strboul (capitulum), 12. oubor (calathidium), 13. placatka (coenanthium), 14. klubko (glomerulus), 15. přeslen (verticillus).

Porovnáme-li tuto řadu květenství u Presl-a s onou u Bischoff-a, vidíme, že jest tatáž; čísel jest ovšem o 2 více, však jen proto, že kytka (thyrsus) a úbor (calathium) zvláště jsou číslovány. Která z těchto forem náleží mezi obmezené a která mezi neobmezené, se po většině nedovídáme, ba květenství obmezená: vrcholík, chomáč a klubko nezůstala ani pohromadě jako u Bischoff-a. Ačkoliv princip veškerého seřadění výslovně od Presl-a neudán, můžeme se ho snadno dovtípiti: rozhodovalať tu pouze rozličná délka hlavní osy a všelikých os vedlejších, dle tohoto vzorce:

a) Osa hlavní prodloužena, vedlejší skráceny (květy přisedlé):
1. klas, 2. palice, 3. jehněda.

b) Osa hlavní prodloužena, vedlejší též prodlouženy:
4. hrozen, 5. lata, 6. kytka, 7. chocholík.

c) Osa hlavní skrácena, vedlejší prodlouženy:
8. okolík, 9. vrcholík.

d) Osa hlavní i vedlejší skráceny:
10. chomáč, 11. strboul, 12. oubor, 13. placatka, 14. klubko, 15. přeslen.

Přeslen položen na konec, protože hlavní osa v něm co nejvíce jest skrácena, i květy často bývají přisedlé.

---

[1]) Název ten méně jest srozumitelný než »odstředivé«, jehož tuto užíváno.

Hlavní chyba v náuce o květenstvích u Bischoff-a, u Presl-a a ještě u mnohých pozdnějších spisovatelův byl nedostatek logického principu ku stanovení pojmů a jich roztřídění. I tam, kde auktorům, jako Presl-ovi a též i Bischoff-ovi, tanul na mysli princip vyvinutosti, délky a vzrůstu různých os rozvětvení, neuznávali tito za potřebné, princip ten zřejmě vysloviti. Formy jednotlivé uváděny tak, jak právě během času nahodile byly rozeznány a pojmenovány, bez ohledu na jich logickou oprávněnost. Palice na př. jest klas (u palem dokonce květenství z četnějších klasů složené) s vřetenem stlustlým, jehněda opět klas z květů nedokonalých s vřetenem opadávajícím, úbor dle Presl-ových slov vlastních »od strboulu neliší se ničím jiným, nežli že květy mají prašníky v trubku srostlé«. Květenství však jest způsob rozvětvení, způsob uspořádání květů ve společném celku. Cože se mění na tomto uspořádání, je-li vřeteno stlustlé neb nestlustlé, jsou-li květy nedokonalé nebo dokonalé, jsou-li prašníky srostlé neb volné, opadává-li květenství neb neopadává-li? Zhola nic, pročež palice, jehněda, úbor nejsou žádné zvláštní formy květenství; jsou to pojmy nelogické, ve vědecké soustavě květenství neoprávněné.

První botanik, jenž na formy květenství — a sice květenství hroznovitého — s logického stanoviska pohlížel, byl Schleiden. On rozeznával ve svých Grundzüge der wissensch. Botanik (1842) nejprve květenství jednoduchá a květenství z těchto jednoduchých složená. Jednoduchá květenství byla mu květenství z osy hlavní a z jednoduchých vedlejších os sestávající, tedy hroznovitá ve smyslu nynějším, a těch rozeznával toliko čtyři: strboul, klas, okolík a hrozen jakožto čtyři kombinace osy hlavní skrácené a prodloužené, os vedlejších skrácených a prodloužených, tedy dle vzorce, který jsem výše uvedl pro pořádek květenství neobmezeného u Bischoff-a. Ze všech tam vyčtených devíti forem uznával Schleiden toliko čtyři, a sice právě ty čtyři první ve čtyřech onde vytčených oddílech. Ostatní, jakož i formy centrifugální, dle Schleiden-a buď vůbec nejsou žádné podstatně rozdílné formy květenství (jako palice, jehněda, úbor), anebo jsou to květenství složená z oněch čtyr jednoduchých (jako lata, od níž se kytka podstatně neliší, jako mnohé chocholíky a vrcholíky).

Jakožto pravý genetik (vývinozpytec) považoval Schleiden strboul za květenství nejprvotnější, poněvadž květy v prvním stadiu vývoje vždy beze stopek na skráceném lůžku stojí. Prodlouží-li se osa hlavní (vřeteno), — tak pravil — povstává ze strboulu klas, prodlouží-li se později pod květy stopky květní na vřetenu doposud skráceném, povstane okolík, prodloužením se osy hlavní i vedlejších vytvoří se hrozen. Květenství ta se nazývají jednoduchými, podotýká dále Schleiden, jak jsem výše citoval, a jiná květenství vůbec nejsou a nemohou býti, leda z jednoduchých složená.

V tom, že zavrhoval Schleiden vůbec květenství vrcholíkovité, jehož formy ostatně velmi nedostatečně znal, nepovšimnuv si ani dříve již uveřejněných pozorování Braun-ových, o nichž dále řeč bude — učinil přísný tento kritik rozhodný krok nazpět do doby před Röper-em, avšak v logickém obmezení jednoduchých forem květenství hroznovitého, kteréž on jedině uznával, způsobil rozhodný pokrok, jehož si ovšem mnozí pozdnější auktoři, jako na př. náš Presl, též němečtí mnozí spisovatelé, nedovedli vážiti. Ke čtyrem formám

Schleiden-ovým možná toliko ještě chocholík (corymbus), ovšem jednoduchý, přidati (po příkladě Payer-a, Mangin-a, Buchenau-a a j.), což později zde odůvodněno bude.

Z forem květenství, které Röper, Bischoff, Presl a j. jmenují, zasluhuje zvláštního ohledu a ohledání lata a blízko příbuzná kytka, kružel a j., o nichž byly a jsou velmi rozličné úsudky na denním pořádku. Starší auktoři, od Linné-a až po Bischoff-a (i Presl-a), řadí latu prostě mezi ostatní formy květenství, vedle ní často kytku dle názvu Presl-ova (thyrsus) a chvost (anthurus); avšak již Bischoff popíral platnost dvou posléze jmenovaných, ježto kytka není nic jiného než lata, a sice z hojných kratčeji stopkatých květů, tvaru více méně pravidelně vejčitého neb podlouhlého, chvost pak jest lata, jejíž větévky velmi krátké nesou malé, klubkovitě shloučené květy. Takovéto modifikace laty — připomíná Bischoff vším právem — nezasluhují zvláštního pojmenování statným jménem, buďtež tedy správněji jen jako lata kytkovitá (panicula thyrsoidea) a lata klubkatá (panicula glomerata) označovány. De Candolle, pak Schleiden a mnozí po něm pokládali latu jakožto dosti zbytečný synonym složeného hroznu aneb za složené květenství smíšené, které za zvláštní samostatně a dobře charakterisované květenství míti nelze.

Tak tvrdí Willkomm (ve své Anleitung zum Studium der wissenschaftlichen Botanik [1]) I. 1854), že prý lata a kružel, tak jako kytka jsou pojmy velice neurčité a libovolné. Payer ve svých Éléments de botanique (1857) poznamenává, že bylo názvu lata od starších botaniků užíváno, pokud květenství nebyla podrobena vážnému studiu, a že se tím všelijaké velmi rozličné věci vyrozumívají. Tak prý jest lata sveřepu (*Bromus*) hrozen z klasů, lata ptačího zobu (*Ligustrum*) jest hrozen opět z hroznů složený, lata kaštanu koňského (*Aesculus*) zase jest hrozen z vijanů se skládající. Jediný povšechný znak lat prý tedy jest, že jsou to hrozny, jejichž vedlejší osy nezůstaly jednoduchými, nýbrž nejrozmanitějším způsobem se dále rozvětvují. Pročež prý jest nejlépe, název lata docela z vědecké terminologie vymítnouti.

Zcela jiným okem pohlíželi na latu Alex. Braun a Wydler, nejlepší morfologové, které Německo až přes prvou polovici toho století mělo. Rozvržení květenství, které zejména A. Braun učinil, bylo teprve žákem Braun-ovým, P. Ascherson-em, ve květeně Braniborské (1864) podrobněji vyloženo, ačkoli již dávněji Braun s katedry jemu vyučoval. Květenství hroznovité, nestejnou hodnotou hlavní osy a vedlejších os, jakož i neurčitým počtem těchto a jich listenů charakterisované (ačkoli se tam názvu hroznovitý neužívá), dělí se tam ve dva shluky, totiž v květenství klasovité a latovité. Ve květenstvích klasovitých jsou osy vedlejší sobě rovny, typicky pouze jednokvěté, jednoduché,

---

[1]) Rozvrh květenství v této učebnici, která po delší dobu až do vyjití Sachs-ovy botaniky byla hlavním vodítkem ku poznání vědeckých základů botaniky a i přednáškám universitním také v Praze svého času za základ sloužila, jest velice nesamostatný, nekritický a již pro svůj čas, kdy fundamentální spisy Braun-a a Wydler-a o květenství vrcholíkovitém a vidlanovitém byly publikovány, jichž jakožto prý těžce srozumitelných(!) spisovatel učebnice zúmysla nepoužil, vskutku zastaralý, pročež netřeba o něm se zde šířiti.

bez listenců neb s listenci neplodnými; k nim tedy patří jednoduchý hrozen, klas atd. Jsou-li však osy vedlejší nikoli jednokvěté, nýbrž dle téhož zákona jak hlavní osa rozvětveny, a tedy opět jakožto klasovité květenství vyvinuty, nazývá se celek složeným hroznem, klasem, okolíkem atd. Pakli však se vedlejší osy složitého hroznu stanou sobě nerovnými, dolejší totiž větším počtem listenů a tudíž i větviček vyššího stupně opatřenými nežli hořejší a ubývá-li tohoto počtu čím výše ve květenství tím více, tedy máme: 2. květenství latovité. Tohoto rozeznával Braun (i Ascherson) tři formy: latu vlastní (panicula, Rispe), latu chocholičnatou čili tak zvaný složený chocholík (corymbus, Doldenrispe) a kružel (anthela, Spirre). Vlastní lata označuje se tím, že hlavní osa převyšuje osy vedlejší, pročež má květenství tvar jehlancovitý; v latě chocholičnaté dosahují hlavní a vedlejší osy asi stejné výšky, a v kruželi přesahují neboli přerůstají vedlejší osy vesměs osu hlavní, a sice nejdolejší nejvíce. K latě chocholičnaté pak patří ještě zvláštní a vzácnější jakási odrůda, při které dolení osy vedlejší asi ve stejné výši (přeslenovitě) vynikají (na př. u černého bezu), která se tam nazývá latou vrcholíkovitou (corymbus cymiformis, Trugdoldenrispe) a o které se praví, že byla dříve s pravým vrcholíkem (cyma) pomíchávána.

Braun-em a jeho školou byla tedy lata netoliko opět na stupeň samostatného, od hroznu, klasu atd. rozdílného květenství, nýbrž dokonce na význam zvláštního podtypu, rovnajícího se postavením svým podtypu klasovitému (hroznovitému v užším smyslu), povýšena. Subtypus ten doznán za obsažný dosti, neboť se v něm daly rozeznati tři, resp. i čtyři zvláštní formy, na rovni jsoucí s formami hroznu, klasu atd. v oddílu květenství klasovitého. Poprvé shledáváme zde složené botrye (složené hrozny, klasy atd.) od pravých lat pojmem náležitě rozlišené, s nimiž dříve i později ještě, na př. od Sachs-a, do jednoho pytle házeny byly.

Wydler jen mimochodem ve článku věnovaném výhradně květenstvím dichotomickým neboli vidlanovitým [1]) dotýká se latovitého květenství a povšechného rozvrhu květenství vůbec. Praví tam totiž: Květenství možná způsobem nejpřirozenějším rozvrhnouti v tyto tři skupiny: 1. Klasovité, kde všecky na jedné společné ose stojící květní větévky jsou vespolek stejné, jednokvěté. 2. Latovité: větévky květní rozvětvují se dále tím způsobem, že jest rozvětvení při zpodu květenství hojnější a vzhůru k vrcholíku ho po stupních ubývá. 3. Vidlovité (gabelige) nebo dichotomické: prvotní větve květní rozvětvují se ve formě vidle, která se jednou neb několikráte opakovati může. Kombinacemi těchto tří skupin povstávají složitější formy květenství. Do druhé skupiny, o kterou zde běží, klade Wydler latu, chvost, kytku (v starším smyslu) a kružel.

Rozvržení Wydler-ovo v podstatě rovná se rozvrhu Braun-ově, leč formálně aspoň oceňuje Wydler květenství latovité ještě lépe než Braun, neboť je uvádí jako rovnoprávné s klasovitým i vidlanovitým květenstvím, kdežto

[1]) Über die symmetrische Verzweigungsweise dichotomer Inflorescenzen. Flora 1851 str. 289.

Braun, aspoň dle líčení Ascherson-ova, skupinu nejmenovanou, avšak vidlanovitému rovnoprávnou, níže teprva dělí v hroznovité a latovité květenství. Za to však je vyčtení forem latovitých květenství u Wydler-a méně dokonalé než u Braun-a; neboť chvost a kytka (ve smyslu starším) jsou formy nepatrné, kdežto lata chocholičnatá a vrcholíkovitá, které mají velkou důležitost, u Wydler-a opomenuty zůstaly. Také pohřešujeme u Wydler-a náležité odůvodnění, proč on květenství latovité za zvláštní skupinu neb typus považuje.

Přesné rozlišení a správná definice květenství latnatých jest zvláštní předností nauky Braun-ovy a Wydler-ovy. Od složeného hroznu různí se pravá lata velmi podstatně, jak z porovnání obou v obr. 2. a 23. zcela zřejmě patrno, a což později ještě lépe odůvodním. Ovšem musí se od laty pouhé, dle téhož zákona, jak jej vytknul Braun, složené rozeznávati a vyloučiti leckteré květenství latě podobné, avšak dle dvojího zákona čili nestejně složené, na př. hrozen z vijanů složený u kaštanu koňského a pod., čímž námitka Payer-em učiněná sama sebou odpadává.

Bohužel nebyl typ květenství latovitého uznáván od pozdnějších morfologův a pokrok v rozeznávání tohoto typu se jevící nedošel ocenění a následování. Již hned Eichler, morfolog nad jiné v Německu na slovo vzatý, ve svých Blüthendiagramme díl I. (1875) navrátil se k náhledu Payer-ovu a vyloučil opět laty zcela z řady zvláštních samostatných květenství. Toliko na konci v poznámce mimochodem se o latách zmiňuje těmito slovy: »Názvy, kterými se označuje pouze povšechná podoba (habitus) květenství zejména bohatěji složených, jsou lata vlastní, lata chocholičnatá (Doldenrispe) a kružel (Spirre). Jimi se květenství nikoliv nevyznačuje po své pravé podstatě, také zhusta všecky vycházejí v posledních svých rozvětveních v cymy (vidlany), ačkoliv se obyčejně kladou mezi květenství hroznovitá. Latou tedy nic jiného nevyrozumívám, nežli květenství mnohonásobně složené.« Též Engler, jenž ve svém velice cenném, spolu s Prantl-em za spolupůsobení mnohých spisovatelů vydávaném díle: »Die natürlichen Pflanzenfamilien« II. 1. (1889) úplně se přidržel Eichler-ova rozvržení květenství, praví tam o latách a kruželu, že jsou to názvy starší, méně určité, jimiž toliko celkový tvar složitého květenství se označuje.

Proti poznámce Eichler-ově, že mnohé laty končívají ve vidlany, klasy (u trav) neb strbouly (u komposit) atd., dlužno namítnouti, že tím oprávněnost laty jakožto zvláštního způsobu květenství újmy netrpí, poněvadž jsou i jiná nestejně složená květenství, na př. hrozny z vijanů, jimiž ponětí hroznů nikterak se neruší. Divno ostatně, že ani Eichler v praxi, když líčí květenství jednotlivých familií, pojmu laty, kružele atd. nemohl postrádati a že jej nerozkládá v domnělé jeho jednodušší součásti. Tak na př. praví o květenstvích *Juncacií* (l. c. str. 143), že náležejí vůbec do třídy lat a že obyčejně větve dolejší převyšují hořejší, pročež se jim říká kružele (anthelae). Jak by se jinak určitěji — není-li toto označení dosti určité — analysovati a pojmenovati měly, to nepraví, a přicházelo by mu to zajisté za těžko, anobrž za nemožno, kdyby se to na něm žádati mělo. Vzdor všem protestům se tedy latovitá květenství odstraniti a něčím jiným, lepším nahraditi nedají.

Odpor proti květenstvím latovitým pochází hlavně odtud, že se všeobecně květenství tak zvaná jednoduchá (k nimž, jak výše řečeno, Eichler vedle hroznovitých také počítá vidlanovitá květenství) považují za útvar původnější, takořka za stavební kameny, jejichž jednoho ke druhému skládáním napotom květenství složitější vůbec zbudována jsou. To však jest pomysl mylný a převrácený, poněvadž organický celek každý, ať jest jednodušší nebo složitější, nikoli z dílů předcházejících, nýbrž ve svých částech jednotně se vyvinuje, v části své se rozkládá, ne však z nich dohromady skládá.[1])

To bych také jedině vytýkal náuce Braun-ově, že v ní latovitá květenství se též odvozují od jednoduchých květenství hroznovitých prostřednictvím složených botryí, ze kterýchž, jak se v Ascherson-ově květeně praví, laty tím povstávají, že vedlejší osy, které v hroznovitém květenství sobě se rovnají, stávají se sobě nerovnými čili hodnoty nestejné (ungleichwerthig); vytýkal bych to, jestliže se tím míní původ skutečný, fylogenetický, netoliko libovolná konstrukce. Neboť ze složeného hroznu s mnohými sobě rovnými osami vedlejšími zajisté nemohla povstati lata s osami nestejné hodnoty, nýbrž lata jest naopak květenství původnější, ze kteréhož spíše ochuzením neboli redukcí jednoduchý hrozen vzniknouti mohl a podnes ještě může. O čemž pojednám šířeji ve dvou následujících hlavních kapitolách.

Co se toho týče, postavil se na správnější stanovisko nejnověji Pax ve své »Allgemeine Morphologie der Pflanzen« (1890), kde praví, že květenství hroznovité v nejpůvodnější své formě vystupuje jakožto lata, ze které odvoditi se musí hrozen. Pax tedy opět uznal latu — podivno, jak náhledy o ní sem tam kolísají — za květenství samostatné, stejné hodnoty jako Eichler-ovo květenství hroznovité (botrys), jenže oboje podřizuje svému květenství hroznovitému, jemuž teprva po bok klade květenství vrcholíkovité (cymosní), což ostatně i v Braun-ově rozvrhu se stalo, ačkoli tam pro společnou skupinu jich obou nepoužito zvláštního názvu (hroznovitého).

Já tedy v tom ohledu jdu ještě dále nežli Braun (i Ascherson) a Pax, že latovité květenství od hroznovitého úplně odděluji a tomuto i vidlanovitému (»cymosnímu«) stejně a rovnoprávně po bok stavím, takže tři hlavní souřadné pojmy neb hlavní typy rozeznávám. Není to vlastně nic nového, neboť již Wydler (1851) tytéž tři typy vedle sebe kladl; při čemž podivuhodno jest pouze to, že od té doby uplynulo právě čtyřicet let, aniž by toto jedině správné ponětí a rozvržení bylo došlo zaslouženého uznání, nepochybně hlavně proto, že Wydler názor svůj jen zběžně naznačil, ale náležitě neodůvodnil. Já jsem o něco později (1865), neznaje pojednání Wydler-ova ani skoro sou-

---

[1]) Z té příčiny jest myšlénka v populárních spisech botanických oblíbená, že jest rostlina buněčný stát, jenž se z jednotníků buněčných zrovna tak skládá, jako stát občanský ze svých jednotníků, vlastně chybná. Organismus nikoli není tvořen sdružením a spolupůsobením buněk, nýbrž z něho, an roste a se vyvinuje, buňky dělením a příhrádkováním vznikají Souvislost plasmy buněčné příhrádkami nikoliv absolutně oddělené, nověji mnohonásobně dokázaná, svědčí témuž názoru

časně vyšlé Flory Ascherson-ovy, na základě vlastního pozorování a úsudku tytéž tři typy koordinované rozeznával.[1])

Zvláštní kapitolu ve výkladu svém o vývoji náuky inflorescenční musím nyní ještě věnovati historickému vývoji pojmu »cymy« čili vrcholíka (dle Presl-ova pojmenování). Pojem tento průběhem let podléhal velikým změnám, byv jednak rozšiřován, jednak zase sužen, takže posléze u nejmnožších auktorů znamenal něco podstatně jiného než na počátku.

Cyma přichází nejprve u Linné-a, jenž ji položil vedle okolíka (umbella), rozeznávaje obě formy takto (Philosophia botan. pag. 78): »Umbella est, ubi pedunculi omnes ex eodem centro ambitu aequali exeunt« — a jinde: »umbellatus flos est aggregatus ex flosculis pluribus insidentibus receptaculo in pedunculos fastigiatos, omnes ex eodem puncto productos«. Cymu pak definuje takto: »Cyma vero flos est aggregatus ex flosculis pluribus insidentibus receptaculo in pedunculos fastigiatos, priores (primarios) ex eodem puncto productos, posteriores autem sparsos«, k čemuž ještě dodává: »Cyma, uti umbella, omnes pedunculos primarios ex eodem centro educit, partiales vero vagos spargit«. Aby nebylo pochybnosti o tom, co tím myslí, uvádí Linné příklady: *Opulus*, *Cornus virga sanguinea* dicta, *Ophiorhiza*, dále pak ještě: *Tinus* aut *Viburnum*. Květenství druhů z rodu *Viburnum*, *Sambucus*[2]) a *Cornus* jsou však skrácené laty, jejichž silnější hlavní větve okolíkovitě neb přeslenovitě sestaveny neb silně sblíženy jsou a dále ponejvíce vidlanovitě (dvěma neb jedním ramenem) se rozvětvují, čímž se naivnějšímu názoru větévky vyšších stupňů ovšem jako nepravidelně roztroušené (vage sparsi) objevují. Braun a Ascherson tento způsob laty nazvali latou vrcholíkovitou (corymbus cymiformis, Trugdoldenrispe), podotýkajíce o ní, že prý dříve s pravým vrcholíkem (cyma) bývala pomíchávána. Leč právě naopak by se mělo říci, že s pravou Linné-skou cymou později zcela jiná květenství (vidlanovitá) byla pomíchána. Arci rod *Ophiorhiza* nemá latu vrcholíkovitou, nýbrž nedokonalý okolík či skrácený chocholík z vidlanů nejprve dvou- pak jednoramenných, a na takový okolík se definice Linné-ova ovšem také hodí; avšak květenství *Euphorbii*, které Röper, Sachs a j. uvádějí jakožto výtečný příklad cymy víceramenné, Linné za cymu neuznával, nazývaje je v Species plantarum okolíkem (umbella).

Nejprve ujal se s velikým důrazem květenství cymy Röper, který na něm krom okolíkovitého sestavení hlavních větví vytknul ještě přítomnost konečného květu a povšimnul si centrifugálního rozkvétání, pročež na něm založil svůj způsob květenství obmezeného a centrifugálního. Jelikož tuto obmezenost

---

[1]) Ve spise: Přírodopisný atlas rostlinstva. V Praze 1865. Uváděl jsem tam latu vlastní, pak kytku (jakožto latu chocholíkovitou) na př. u řebříčku, a kružel (jakožto latu skrácenou s větvemi dílem prodlouženými), na př. u *Scirpus lacustris, Cyperus esculentus.* Pro květenství bezu černého, kaliny a svídy ponechal jsem v popisné části Linné-ův název cyma (vrcholík), což bylo samo o sobě správné, bylo však v odporu s tím, že jsem též zcela správně definovanému květenství vidlanovitému zachoval běžný název: květenství vrcholíkovité čili vrcholík.

[2]) V Species plantarum Linné květenství rodu *Sambucus* též nazývá cymou.

a odstředivost rozkvětu považoval za hlavní znak cymy čili vrcholíka, rozšířil objem toho pojmu, pojav do něho také obmezený okolík a vidlan dvouramenný. Takto upravený pojem vrcholíka pak definoval takto: »Cyma efformatur, cum rami florigeri sub flore terminali in verticillum bi- vel multiradiatum colliguntur«. Že také Röper jako Linné vrcholíkovitou latu do pojmu vrcholíka zahrnoval, vysvítá jasně z toho, že též jmenuje rody *Viburnum* a *Cornus* jakožto příklady cymy 5—6paprsečné, potom také z následující poznámky: »Interdum cyma composita fit, dum scilicet sub verticillo primario (qui flori terminali proximus) alius prodit verticillus inferior, cujus flores serius expanduntur quam flores ramorum verticilli superioris«. To se vztahuje právě ku květenstvím v rodu *Cornus* a *Viburnum*, též *Sambucus*.

Jak jsem pravil, kladl Röper mezi vrcholíky také vidlan dvouramenný (»cyma dichotoma«), ale jednoramenné vidlany (monochasie Eichler-ovy) ještě neznal.

De Candolle, jenž Röper-ův pojem cymy a vůbec květenství centrifugálního záhy do své Organographie végétale (1827) přijal, obohatil vrcholíky ještě vijanem (cyma scorpioides), jakožto prvě rozeznaným případem vidlanu jednoramenného.

Pomícháním tak různých květenství, jakými jsou lata vrcholíkovitá, okolík obmezený, pak vidlany dvouramenné a jednoramenné, pod jedním názvem vrcholíka (cyma) byl pojem cymy na dlouho zkalen; neboť lata vrcholíkovitá náleží mezi květenství latovitá, okolík (obmezený) mezi květenství hroznovitá a vidlany opět do jiného typu, právě vidlanovitého. Tak na př. v Bischoff-ově Terminologii všecka tato květenství a ještě kružel *Juncaceí* (kružel od *Scirpus silvaticus* prohlášen tam zase neprávem za chocholík) pod jménem vrcholíku (cyma) se uvádějí a vyobrazují. Presl na str. 97 svých »Počátků« uvádí zcela tytéž formy jako Bischoff, jehož se vůbec v morfologii a terminologii věrně přidržuje. Od něho stvořen velmi šťastně výraz »vrcholík«[1]) pro toto květenství, avšak definice, kterouž podává, není dostatečná. Praví totiž: »Vrcholík (cyma) jménim podobá se okolíku a chocholíku, liší se ale tím, že zpod květu na ose konečného vyniká několik vřetének květem ukončených, kteréž z konce svého též vypouštějí několik vřetének třetiřadých, na nichž stopečky jednoduché«. Tato definice hodí se rovněž tak na latu chocholičnatou (chocholík vícekrát složený ve smyslu mnohých auktorů) jako na většinu vrcholíků, nehodí se však naprosto na vidlany jednoramenné, které Presl ovšem od hroznů pravých nerozeznával, a má ještě i tu chybu, že rozvětvení udává až do vřetének třetiřadých, kdežto stupeň rozvětvení u všelikých těch vrcholíků může býti velice rozmanitý, hned menší, hned i mnohem větší, než na jaký jej tato definice obmezuje.

Totéž nevytříbené ponětí vrcholíka ve smyslu Röper-ově vyskytuje se ještě r. 1854 ve Willkomm-ově »Vědecké botanice«. Nejprve se tam rozeznává

[1]) Název vrcholík nachází se již ve starším spise Presl-ově: O přirozenosti rostlin z r. 1820, kde se definuje správně ve smyslu Linné-ovy cymy a za příklady se uvádějí bez černý, kalina a hortenzie.

vrcholík jednoduchý, s listeny buď vstřícnými neb přeslenatými; což jest tedy dílem jednoduchý obmezený okolík, dílem nejjednodušší vidlan dvouramenný (archibrachium). Pak následuje vrcholík složený, ku kterémuž patří dle téhož auktora i lata vrcholíkovitá od *Sambucus nigra* a *canadensis* (jakožto »cyma verticillata«), i kružel i složitý vidlan dvouramenný (cyma dichotoma). O vrcholíku jednoramenném auktor nic neví; vijan uvádí nedorozuměním mezi květenstvími smíšenými (!).

Aug. de Sainte-Hilaire aspoň již r. 1840 ve svých Leçons de botanique kritisoval přes příliš široký pojem vrcholíka, poukazuje na značnou rozdílnost vrcholíka bezu, vrcholíka od *Sedum acre* a dichotomického vrcholíka knotovky *(Lychnis coronaria)*. »Pro tuto rozdílnost květenství, pravil, jimž se dalo totéž jméno vrcholíka, mohli bychom jako Jussieu snadno za to míti, že by se jméno to vůbec mělo zavrhnouti, leč — připojuje s pravou francouzskou zdvořilostí — myslím, že můžeme, majíce ty rozdíly náležitě na paměti, zachovati nadále název ten, abychom zůstali ve shodě s četnými spisovateli, kterýmž povinni jsme díky za vážené spisy popisné; zachovati aspoň v oněch případech, ve kterých název cyma od Linné-a a jeho následovníků nabyl posvěcení; neboť jest ovšem pravda, že popisní botanikové ho posud neužili v onom velmi širokém smyslu, jejž mu dali Link, Röper a De Candolle.«

Nejprve Al. Braun, jak do květenství vůbec, tak i do nauky o květenství vrcholíkovitém zavedl lepší řád a objasnil ji výskumem vskutku vědeckým. Již před Presl-em i před Willkomm-em, od prvého nepovšimnut, od druhého neoceněn a neporozuměn, rozeznával ve »Floře« řezenské (1835 I. str. 189) tři způsoby cymosního rozvětvení úžlabních, dvěma listenci opatřených prýtů, opíraje se při tom o Schimper-ův bystrým zpytováním objevený pojem homodromie[1]) a antidromie úžlabních prýtův. Tyto tři způsoby jsou: dichasium (vidlan dvouramenný), vijan (cicinnus, Wickel) a šroubel (bostryx, Schraubel). Vyvinou-li se z úžlabí listenců oba postranní prýty květní, z nichž jeden jest s hlavním prýtem homodromní, druhy antidromní, povstává dichasium; vyvine-li se pouze jeden z obou a sice homodromní (což se ve vyšších stupních rozvětvení stále tak opakuje), povstane šroubel; vyvinuje-li se vždy pouze prýt antidromní, dá to vijan. Že chtěl míti Al. Braun květenství cymosní pouze na tyto tři způsoby, totiž právě jen na vidlany dvouramenné a jednoramenné obmezeno, vysvítá ještě určitěji z rozboru květenství u Ascherson-a o třicet let později uveřejněného, ve kterém skutečně jen tyto tři vidlanovité formy, nikoli však víceramenné nějaké květenství, v oddělení vrcholíkovitých květenství se uvádějí, a kde krom toho ještě čteme poznamenání Braun-ovo, že cyma v přísném slova smyslu může býti toliko úžlabním květenstvím, poněvadž hlavní osa květenství, je-li toto konečné, pod květy ještě lupeny nese, tudíž osám vedlejším, kterým tyto scházejí, se nerovná, a poněvadž přísná symmetrie prýtů homodromního a antidromního v tom případě, když pod konečným květem

[1]) Homodromie čili stejnoběžnost dvou prýtů záleží v tom, že listy jejich sledují ve spirálkách stejným směrem běžících, antidromie čili protiběžnost ale v tom, že spirálky ty v opačném směru, tedy proti sobě se otáčejí nebo běží.

lodyhovým dvě vidlanovitě rozvětvené osy květní vznikají, nikoliv již při těchto, nýbrž teprve při jejich větévkách se objevuje.

Vrcholík (cyma), jak Al. Braun jej vyrozumíval, má tedy výhradně vidlovité, dvou- neb jednoramenné rozvětvení; z pojmu jeho vyloučeny jsou jak obmezený okolík víceramenný, tak i lata vrcholíkovitá, též víceramenná, tedy vůbec Röper-ova cyma polytoma (Willkomm-ova cyma verticillata), to jest tedy právě ta pravá cyma Linné-ova; zůstává v něm pouze Röper-ova cyma dichotoma (Bravais-em také cyma bipara nazvaná) a cyma unipara (Bravais-ova), které Linné neznal a dle definice své ani míniti nemohl. Tak tedy stalo se z cymy Linné-ovy u Braun-a něco zcela jiného, a Braun by sotva byl právě tohoto názvu užil k označení způsobu květenství jím míněného, kdyby nebyl Röper pojem cymy rozšířil na vidlan, De Candolle i na vijan, což potom vešlo u všeobecnou zvyklost. Nechtěje tvořiti nového jména, podržel Braun nadále pro vidlany dvou- a jednoramenné název cymosní květenství i po vyloučení pravé cymy víceramenné.

Čeho Braun se neodvážil, to provedl Wydler (1851, a vlastně již 1843), nazvav Braun-ův typ »vrcholíkovitý« správněji vidlovitým (gabelig oder dichotom), což se však do dneška neujalo.

Braun-ova náuka o formách cymosního neb lépe vidlanovitého květenství nebyla však ještě zcela dokonalá. Za jedno nelze vidlany obmezovati toliko na postavení axillární, poněvadž při konečném dvouramenném vidlanu i vijanu a šroubeli první květ na lodyze konečný patrně jest součástí tohoto květenství, od něhož jej oddělovati nelze. Méně záleží na tom, rovná-li se první osa vidlanovitého květenství ostatním osám, aneb zachovává-li hned první osa vijanu a šroubele antidromii neb homodromii s ostatními osami. Jiný nedostatek náuky Braun-ovy byl, že týž nečinil rozdílu mezi postavením listenců po stranách mediány aneb v mediáně samé, a pak že vijan a šroubel, mající listence postranní, schematisoval nárysem, který toliko při medianním postavení listenců jest úplně správným a ve kterém všecky květy v jediné ploše leží. Teprva Buchenau [1]) spozoroval, že při takovém postavení listenců vznikají způsoby jednoramenného vidlana podstatně rozdílné, potud nepovšimnuté, kteréž nazval rhipis (dle Eichler-ova pozměnění rhipidium) a drepanum (neb drepanium). Nově tvořených obdobných názvů českých pro všeliké tyto způsoby vidlanovitého květenství, a sice: vidlan (dichasium), vijan (cicinnus), šroubel (bostryx), vějířek (rhipidium) a srpek (drepanium), nejprve jsem užil ve svém pojednání »O květenství rostlin Brutnákovitých« (v Archivu přírodovědeckém č. 2. 1880).

Nyní podám ještě v hlavních rysech soustavné rozvrhy květenství u některých nejpřednějších spisovatelů v postupu chronologickém, ze kterých nejlépe vysvitne pokrok i nedostatky, shody a různosti jejich náuk.

---

[1]) Blüthenstand der Juncaceen. V Pringsheim-ových Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik IV. 1865—66.

1. Soustava Röperova (1826).

I. Květenství obmezená neboli odstředivá.
Cyma, glomerulus, fasciculus.

II. Květenství neobmezená neb dostředivá.
Spica, amentum, spadix, racemus, corymbus, umbella, capitulum.
Panicula, thyrsus.

2. Soustava Wydlerova (1851).

I. Květenství klasovité.
Klas, jehněda, palice, strboul, úbor, okolík, chocholík, hrozen.

II. Květenství latovité.
Lata, chvost, kytka (v smyslu starším), kružel.

III. Květenství vidlovité neb dichotomické.
Dichasium (cyma dichotoma), šroubel, vijan.

O květenstvích homotypně složených a heterotypních (kromě sarmentid Bravais-ových) Wydler nepojednal, praví jen, že kombinacemi těch tří skupin povstávají formy složené. Přímým rozvržením ve tři řečené skupiny vyniká tato soustava nade vše ostatní i nad Braun-ovu, která však zas v podrobnostech lépe provedena.

3. Soustava Payerova (1857).

A. Květenství obmezené.

1. Cyma bipara (vidlan dvouramenný).
2. Cyma unipara (vidlan jednoramenný): *a*) scorpioides (vijan),
   b) helicoides (šroubel).
3. Cyma contracta (vidlan stažený).

B. Květenství neobmezené.

a) Jednoduché: hrozen, klas, chocholík, okolík, strboul.
b) Složené:
α) stejnotvárně: složený hrozen, klas atd.
β) nestejnotvárně: hrozen ze strboulů, hrozen z okolíků atd.

C. Květenství smíšená.
Hrozen, klas, okolík z vidlanů a vijanů, vijan ze strboulů atd.

Pozoruhodné jest v tomto rozvržení, že cyma znamená u Payer-a přesně tolik co vidlan, s pominutím vrcholíka Linné-ova i Eichler-ova pleiochasia. Chybné jest, že se vidlan stažený jakožto třetí druh klade po bok dvouramennému a jednoramennému, ježto jest pouhou modifikací těchto dvou. Květenství smíšená mají týž význam jako heterotypní neb heterotaktická u Pax-a. Latovité květenství Payer neuznává, lata jest mu (neprávem) totožná se složeným hroznem, kytka se složeným chocholíkem a vrcholík se složeným okolíkem z vidlanů (*Viburnum Tinus*).

4. **Soustava Braunova** (dle Aschersona, 1864).

A. Květenství s neurčitým počtem listenů, s osou hlavní nerovnající se osám vedlejším.

I. Květenství klasovité.

a) jednoduché: hrozen, chocholík, klas, okolík, strboul.

b) složené: složitý hrozen, chocholík atd.

II. Květenství latovité.

1. Lata vlastní, 2. lata chocholíkovitá, k níž patří také lata vrcholíkovitá, 3. kružel.

B. Květenství vrcholíkovité, s určitým počtem (skoro vždycky 2) listenců, s osou hlavní rovnající se osám vedlejším.

1. Dichasium, 2. vijan, 3. šroubel.

Soustava tato, v principiích ze všech posud se objevivších nejlepší, není úplně rozvedena, neboť pohřešujeme květenství dle různých typů složená (heterotypní), též nestejnotvárně botryticky a nestejnotvárně vrcholíkovitě složená.

5. **Soustava Hofmeisterova** (1868).

I. Rozvětvení cymosní čili centrifugální.
(Vedlejší osy převládají vzrůstem a rozvětvením nad výše stojící část osy hlavní.)
Cyma víceramenná, dvouramenná (dichasium), šroubel a vijan (rozvětvení sympodiální).

II. Rozvětvení racemosní čili centripetální.
(Osy vedlejší zůstávají pozadu za osou hlavní ve vzrůstu a rozvětvení).
Jednoduché a složené hrozny, klasy atd., laty.

III. Rozvětvení smíšené neb heterogenní.

1. Větve centripetální v seřadění centrifugálním.
(Sarmentidy Bravais-ovy ve smyslu obmezenějším.)

2. Větve centrifugální v seřadění centripetálním.
(Thyrsy dle Candolle-ovy terminologie.)
Sem se též počítají vrcholíky rodů *Sambucus, Viburnum, Hydrangea* (dichasie v okolíkovitém sestavení).

Soustava tato vztahuje se netoliko ku květenstvím, nýbrž i k způsobům rozvětvení vůbec. Udané znaky cymosního a racemosního rozvětvení nejsou postačitelny, jak před tím (str. 8) vyloženo. Rozvržení smíšených květenství v sarmentidy a thyrsy jest však pozoruhodné a velice trefné.

6. **Soustava Sachsova** (1868).

I. Květenství racemosní (hroznovité).

A) Klasovité (= botrye jednoduché).

B. Květenství latovité.

Sem se počítají netoliko laty, nýbrž i složené okolíky, hrozny *(Veratrum)* a klasy *(Triticum)*, klas z vidlanů *(Hordeum)*, lata z hroznů *(Spiraea aruncus)*.

II. Květenství cymosní (vrcholíkovité).

A. S 2 neb více podkvětnými prýty, bez sympodia.
1. Kružel. 2. Cyma okolíkovitá (pleiochasium). 3. Dichasium.

B. Pouze s jedním podkvětným prýtem, se souosím.
4. Šroubel. 5. Vijan.

Květenství cymosní a racemosní liší se týmže znakem jak u Hofmeister-a, tedy rovněž nesprávně. Květenství latovité není totožné s latovitým květenstvím u Braun-a, neboť obsahuje také složené botrye, anobrž i několik květenství heterotypních. Zvláštní skupina květenství heterotypních čili »smíšených«, přednost to soustavy Hofmeister-ovy, však u Sachs-a schází. Chybně se tu, jak u Hofmeister-a, šroubeli a vijanu povždy souosí připisuje.

7. **Soustava Eichlerova** (1875).

A. Květenství jednoduchá.

I. Botrytický typus.
Klas, hrozen, okolík, strboul atd.

II. Cymosní typus.
1. Pleiochasium. 2. Dichasium. 3. Monochasium: { šroubel, vijan, vějířek, srpek.

B. Květenství složená.

a) Botrytický typ v obou stupních (Dibotrye).
Na př. klas ze strboulů, hrozen z klasů, složený klas, hrozen atd.

b) Botrytický typ v prvním, cymosní v druhém stupni (Cymo-botrye).
Na př. okolík ze šroubelů, klas z vidlanů atd.

c) Cymosní typ v prvním, botrytický v druhém stupni (Botryo-cymy).
Na př. vidlany a vijany ze strboulů, šroubele z okolíků atd.

d) Cymosní typ v obou stupních (Dicymy).
Na př. šroubel z vijanů, vijany složené atd.

Litovati jest, že Eichler ve svém rozvržení květenství právě v některých stránkách, kterými soustava Braun-ova nad jiné vyniká, od soustavy této v neprospěch svého rozvržení se odchýlil, zejména, že neuznával typ květenství latovitého, a že rovně jak Hofmeister a Sachs nesprávné ponětí pleiochasia opět do cymosního typu uvedl.

8. **Soustava Paxova** (1890).

A. Květenství homotaktická (dle téhož typu rozvětvená).

I. Typ květenství botrytického.

a) Lata.
1. Lata vlastní, 2. lata chocholičnatá (kytka), 3. kružel.

b) Hrozen v širším smyslu (botrys).

1. Jednoduchý: hrozen, klas, okolík, strboul.
2. Složený:

α) stejnotvárně: složený hrozen, klas atd.

β) nestejnotvárně: na př. hrozen ze strboulů atd.

II. Typ květenství cymosního.

a) Pleiochasium.

b) Dichasium.

c) Monochasium: vijan, šroubel, vějířek, srpek.

B. Květenství heterotaktická.

a) Květenství prvního stupně botrytické (Cymo-botrye neboli thyrsy De Candolle-ovy).

b) Květenství prvního stupně cymosní (Botryo-cymy čili sarmentidy).

Květenství pod písmeny malými *a*, *b*, *c* uvedená považuje Pax za hlavní typy; formy pod 1, 2, 3 vytčené právě toliko za podřízené formy, ve kterých se jeví zvláštní »plastika květenství«. Pozoruhodné jest hlavní rozvržení ve květenství homotaktická a heterotaktická a pak opětné uvedení laty do soustavy, to jest vlastně květenství latovitého Braun-ova, poněvadž vedle ní stojí hrozen v širším smyslu (botrys), jenž znamená tolik jako Braun-ovo květenství klasovité. V tom ohledu jest Pax-ův rozvrh podstatnou opravou rozvržení Eichler-ova.

Cena těchto různých hlavních soustav květenství jest velmi nestejná. Logicky nejsprávnější jest rozvržení Braun-ovo a Wydler-ovo. Pouze Wydler a Braun rozeznávají řádně květenství latovité, pouze Wydler však klade je na roveň ostatním dvěma druhům neb typům květenství. Pax aspoň latu uznává vedle botrye za květenství samostatné. Všem soustavám (krom Wydler-ovy) společné jest hlavní rozvržení ve dvě skupiny, totiž: 1. cymosní, obmezené neb centrifugální, a 2. racemosní, botrytické, neobmezené čili centripetální květenství, což nepostačuje. Květenství »vrcholíkovité« (vidlanovité) nejlépe obmezili a definovali Braun, Wydler a Payer, nejméně správně Hofmeister a Sachs. Payer, Hofmeister a Pax trefně rozeznávají květenství smíšená neb heterotaktická, oba poslednější je také zcela správně rozdělili ve dvě skupiny. Méně lze schvalovati Eichler-ovo hlavní rozvržení v květenství jednoduchá a složená.

K vůli porovnání kladu sem hned kostru soustavy vlastní, kterou v následujících dvou kapitolách šíře vyložím a odůvodním:

A. Květenství homotypní (homotaktická).

I. Typ latovitý neb thyrsoidní (Thyrsy).

AA. Laty hroznovité.

1. Lata. 2. Kytka.

BB. Laty vrcholíkovité.

3. Kružel. 4. Vrcholík.

II. Typ hroznovitý neboli botrytický (Botrye).

AA. Botrye jednoduché.

1. Hrozen. 2. Chocholík. 3. Okolík. 4. Klas. 5. Strboul.

BB. Botrye složené (Diplobotrye).

a) Stejnotvárně složené.

b) Různotvárně složené.

III. Typ vidlanovitý neb brachiální (Brachie).

AA. Vidlany jednoduché.

1. Vidlan (vlastní neb dvouramenný). 2. Šroubel. 3. Vijan. 4. Srpek. 5. Vějířek.

BB. Vidlany složené (Diplobrachie).

B. Květenství heterotypní (heterotaktická).

AA. Thyrsoidy.

1. Botryo-thyrsy. 2. Brachio-thyrsy. 3. Brachio-botrye.

BB. Sarmentidy.

4. Thyrso-brachie. 5. Botryo-brachie.

Tento návrh směřuje k opravě posavadních soustav květenství, kterým vzdor mnohým pokrokům ještě mnoho k úplné správnosti a dokonalosti schází. Jak již v úvodu tohoto pojednání připomenuto, ještě před nedávnem zase Buchenau na nedostatečnost posavadní methody, v náuce o květenstvích užívané, si stěžoval. Svědomitý tento badatel, jenž si svou pěknou prací o květenstvích *Juncacei* a prvním rozpoznáním vějířka a srpka zvláštní zásluhy o celou náuku získal, jest toho náhledu, že se mají vymítnouti statná jména, jimiž se jednotlivé formy květenství označují. On má za to, že takovýmito názvy, leda by se do nekonečna téměř rozmnožily, nelze dokonale vystihnouti nevyčerpatedlnou rozmanitost ve květenstvích se jevící. Substantiva, praví, vyžadují pevnou definici, která se pak mnohdy se skutečností, na kterou se vznáší, dokonale neshoduje. Statná jména sluší prý zvláštním orgánům rostlinným, ne však pouhým způsobům postavení a uspořádání, na nichž květenství se zakládají. Květenství nemají býti ostře definována a definice nemají býti statnými jmény jaksi strnulé, nýbrž má se užívati toliko popisujících adjektiv, tak jako jednotlivé formy listů, korun atd. přídavnými jmény se opisují. Na místě hrozen, klas, okolík má se říkati květenství hroznovité, klasovité, okolíkovité (inflorescentia spicata, racemosa, umbellata). Jestliže však nějaké květenství s klasem, hroznem atd. dokonale se neshoduje, nýbrž jen jakousi podobnost s takovým má, budiž označováno jakožto květenství klasu, hroznu atd. podobné (inflorescentia spicoides, racemoides atd.).

Snadno však každý nahlédne, že by se takovouto reformou nedostatkům methody nepomohlo; domnělá ta náprava není věcná, nýbrž čistě formální. Název inflorescentia umbellata není nikterak významnější neb přesnější než název umbella, ovšem ale delší a rozvláčnější. Pojmenováním inflorescentia pleonastica namísto pleiochasium nenapraví se chybné rozeznávání takovéhoto způsobu vrcholíka od obmezeného okolíka. Buchenau se totiž jinak úplně při-

držuje pojmů klassifikace Eichler-ovy. Co se však týče vedlejší řady adjektivních názvů: spicoides, racemoides atd., nelze v zavádění jich spatřovati nějaký pokrok, leč pravý opak jeho; neboť vymoženost pokročilejší morfologie právě v tom spočívá, že se zřekla zásady pouhých habituelních podobností (dle které na př. vijan sympodiální považován byl za klas nebo hrozen), na místě jichž zavedla pevné pojmy, vážené z důkladného vědeckého pozorování. Jak neurčité a dvojsmyslné byly by názvy racemoides, umbelloides; okolíku podoben jest na př. chocholík, kterýž u Buchenau-a již ve hlavní řadě stojí, též pleiochasium, které on dle Eichler-a k vrcholíkům klade, též květenství bezu černého neb kaliny, které však mezi laty patří. Na závadu posavadních systémů nejsou pojmy příliš ostré, nýbrž naopak druhdy nedosti určité.

Statná jména k označování pevných pojmů nejsou vinna nedostatky nynější náuky, toliko přílišnost ve tvorbě statných jmen k označování podřízenějších rozdílů, zvláště když se netýkají tvaru květenství samého, nýbrž jiných vedlejších vlastností jako rozkvétání, nedokonalosti květů a p., jest zavržení hodna. Vědecké roztřídění a pojmenování hlavních jednolitých forem květenství ostatně nevyžaduje tak velikého množství statných jmen, neboť celkem 14, totiž 4 pro latovité, 5 pro hroznovité, 5 pro vidlanovité květenství úplně stačí (viz přehled na str. 25. a 26.); pro formy z těchto složené pak vůbec zvláštních názvů třeba není.

Popisující aneb vlastně porovnávající přídavná jména jsou na místě tam, kde porovnání s předměty nebotanickými vůbec známými jest možné a pravé představě napomáhá, pročež se v popisné botanice mluví o listech vejčitých, srdčitých, o korunách zvonkovitých, nálevkovitých atd. Leč přídavné jméno hroznovitý, klasovitý jest odvozeno od substantivného b o t a n i c k é h o názvu hrozen, klas, který neslouží nějakému porovnání, nýbrž sám přesně definován býti musí. K vyznačení hlavních a podstatných forem květenství nelze se bez botanických terminů substantivních obejíti; ovšem lehčejší modifikace a přechodní tvary přiměřeněji adjektivními přídatky vyznačíme.

Vady posavadních rozvržení květenství a zvláště methody, kteréž při tom užíváno, jak jsem hned v úvodu se vyslovil a jak z historického přehledu vývoje celé náuky poněkud již na jevo vyšlo, jsou naprosto jiné, věcnější a podstatnější. V následující části svého pojednání vynasnažím se o jich odstranění, o zdokonalení celé soustavy květenství a především o vysvětlení jejich logických a pokud možno i fylogenetických vztahů a o souvislé jich odvození z prvotného tvaru základního. Připomínám jen napřed, že soustava, ku které jsem po mnohém studiu v přírodě a po mnohém přemýšlení došel, nejvíce se podobá soustavám Braun-ově, Wydler-ově a Pax-ově, jejichž základy, pokud jsem je shledal správnými, ovšem jsem podržel, na nichž jsem však samostatně dále stavěl.

II.

Nové základy.

Jak již v předchozí stati naznačeno, rozeznávám netoliko dva, nýbrž tři hlavní typy květenství: totiž 1. latovité neb thyrsoidní, 2. hroznovité neb botrytické, 3. vidlanovité neb brachiální (cymosní ve smyslu Braun-ově). Latovité květenství nepovažuji tedy s Braun-em a Pax-em za podřízený druh téhož typu, ku kterému také hroznovité neb klasovité květenství náleží, nýbrž za zvláštní typ sám o sobě, a sice za typ nejvšeobecnější a nejpůvodnější.

Latovité květenství jest vždy alespoň do třetího, obyčejněji však do vyšších ještě stupňů prýtů dle jednotného zákona rozvětveno. Tento zákon v tom záleží, že mocnosti, délky a mohutnosti rozvětvovací na souřadných osách všech stupňů k vrcholku (někdy též k dolejšku) poměrné osy mateřské, zvláště též osy hlavní, stále ubývá. Pobočné osy ku konci své poměrné osy hlavní jsou stále kratší, slabší a jednodušší, jak co se týče počtu souřadných os od nich zplozených, tak co se týče počtu os podřaděných, které dalším rozvětvováním do vyšších stupňů od nich pocházejí. Největší počet souřadných os (z osy hlavní vycházejících) a největší počet os podřaděných čili stupňů rozvětvení, na nejsilnějších větvích prvořadých, v typické latě jsou si přibližně rovny, neb aspoň nemnoho rozdílny. Jinak může býti lata velice složená anebo co nejvíce jednoduchá (toliko do třetího stupně prýtů rozvětvená), jen když zákon rozvětvení, jejž jsem právě vyložil, v obou případech stejně k platnosti přichází, pročež nesprávně dí Eichler o latě, že jest to květenství vůbec »bohatě složené«. (Diagr. I. str. 42.) Tak na př. patří květenství obr. 3., ačkoli velmi jednoduché, mezi laty, neboť má tři osy vedlejší a tři stupně os květních, a rozvětvení k vrcholku ubývá. Ale též obr. 2. představuje latu, ovšem dle téhož zákona značněji složitou, bohatěji až do 5. stupně prýtů rozvětvenou, s osmi vedlejšími osami na hlavní ose, jichž nejdolejší 5 souřaděných větviček druhořadých nese a na nejdolejších z nich do 5. stupně prýtového dochází.

My můžeme latovité květenství vyjádřiti malou formulkou, totiž zlomkem $\frac{m}{n}$, jenž značí poměr mezi největším počtem podřaděných generací os m a největším počtem souřadných os n, při čemž m i n jsou větší čísla než 2. V typické latě jsou m a n málo rozdílny, čím větší se stává m u poměru k n, tím více se lata blíží vidlanu, čím větší n u poměru k m, tím jest lata bližší hroznu.

Květenství latovité, byť sebe více rozvětvené a složité, má přece jednotný ráz, právě proto že jedním zákonem se spravuje; hojnost a stupeň rozvětvení každé větévky stanoveny jsou uvnitř celkového květenství místem, na němžto ona vznikla. Květenství to nelze rozložiti ve stejná květenství částečná, podřízená, ze kterých by složeno býti mohlo; jako můžeme rozložiti složený hrozen v jednotlivé jednoduché hrozny, z nichž se právě skládá. Jest to tedy

květenství původní, svérázné a samostatné, kteréž toliko neprávem z řady květenství samostatných bývá vylučováno.

Další vlastnost laty, ze způsobu jejího rozvětvení vyplývající, jest, že souřadné osy vedlejší všelikých stupňů rozvětvení jsou mezi sebou i naproti mateřské své ose nerovny, to jest nestejné hodnoty, nesou totiž nestejný počet listů (listenů) a nestejný počet souřadných os pobočních, a rozvětvení jejich jde do rozličných stupňů.

Zcela jinak se to má s květenstvími jednak botrytickými, jednak vidlanovitými. Ve květenstvích botrytických (které kratčeji botryce slouti mohou) převyšuje počet souřadných os rozhodně počet stupňů rozvětvení čili počet os podřaděných, který pro jednoduché základní formy toliko dvě obnáší, převyšuje jej tím více, čím hojnokvětější květenství to jest. Položíme-li počet podřaděných os 2 do čítatele, počet postranních souřadných květů n, který původně vždy více než dvě obnáší, do jmenovatele, možno číselný poměr os subordinovaných ke koordinovaným, $2 \cdot n$, vyjádřiti pravým zlomkem $\frac{2}{n}$. Zlomek ten jest tím menší, čím hojnokvětější jest botryce, kterou vyznačuje. Jestliže se hlavní osa končí neb obmezuje květem, což jest původnější tvar botrye, jsou všecky postranní květy zplozeny osou květu konečného, jsou všecky tomuto jednomu květu podřaděny. Tak v obr. 13. jest pět postranních květů, které jsou prvořadému květu konečnému podřaděny, poměrný zlomek, jímž hrozen ten vyjádřen býti může, jest $\frac{2}{5}$. Květenství hroznovité stává se však ještě typičtějším, jestliže konečný květ se nevyvinuje, což jest častějším pravidlem; pak nalézáme toliko souřaděnost všech květů, žádnou podřaděnost květů více. Osy květní jsou sice jako prvé podřaděny hlavní ose květenství, ale poněvadž tato netvoří květu, jsou všecky květy vespolek souřaděny. Takovouto neobmezenou botryi (hrozen) představuje obr. 15., jejížto poměrný zlomek jest $\frac{2}{11}$, v němž 2 znamená sice počet generací os vůbec, ne však generací květních (květonosných) os, kteréžto všecky jedné generaci náležejí, takže by se poměr generací květních ku počtu květů zde zlomkem $\frac{1}{11}$, a všeobecně $\frac{1}{n}$ vyjádřiti mohl.

Ježto se v jednoduché botryi souřadné osy květní dále nerozvětvují, tedy jsou vedlejší osy souřadné vespolek sobě rovny; někdy nesou všecky neb dolejší z nich dva sterilní listence, obyčejně však jsou vesměs bezlistenné; hlavní ose však, kteráž četné listeny nese (aspoň původně, ač tyto mohou se potlačiti) a četnější postranní osy vysýlá, obyčejně také sama květem nekončí, hodnotou nejsou rovny.

Zbývá nyní ještě v úvahu vzíti botrye složené čili diplobotrye, jak bychom je krátce nazývati mohli.[1]) V této jsou postranní květy jednoduché botrye a někdy i konečný květ nahrazeny opět botryemi, tedy hrozny

[1]) Eichler nazýval je po příkladě Guillarda dibotryemi, což by ale značilo spíše květenství ze dvou hroznů složené, kdežto se zde jedná o botrye dvojnásobné neboli dvojnásob složené.

okolíky atd. Rozvětvení složitého květenství hroznovitého (obr. 23) jde tudíž do třetího stupně prýtů, tak jako ve velmi jednoduché latě. Podstatný rozdíl složené botrye a laty však záleží v tom, že rozvětvenosti v onéno neubývá ponenáhlu a po stupních jako v latě; nýbrž souřaděné vedlejší osy prvořadé jsou buďto vespolek stejny (jestliže konečná botrys není vyvinuta, jako často v okolíku složeném), tak jako vedlejší osy druhořadé (celkem třetiřadé) sobě sou rovny, anebo, jestli vyvinuta konečná botrys (obr. 23.), tu hlavní osa, vytvořivší nejprve vřetena botryí postranních v rozvětvenosti náhle sklesá na vytvořování květních os konečné botrye. I v tomto případě panuje rovnost os květních v jednotlivých botryích, jak v postranních tak v konečné, a na hlavní ose aspoň rovnost os, botrye sekundární nesoucích (vřetének) v dolejší části celkového květenství.

Složená botrys dělí se neb článkuje v podřízená, sobě vespolek dle zákona botryí rovná a dle téhož zákona botryticky rozvětvená květenství částečná, kdežto lata, byť i do vyšších ještě stupňů rozvětvená, má povahu květenství jednotného, nikde ve stejnotvárné souřadné časti se nerozdělujícího.

Jediný pohled na laty obr. 2. a 3. a na složené botrye obr. 23. poučí každého o podstatné jich rozdílnosti. Spočívá to tudíž na patrném omylu, jestliže se lata za květenství z hroznů aneb jinak složené vydává, anebo pouze jakožto název »květenství bohatě složeného, zvláštního celkového jmění, avšak nikoliv ostře charakterisovaného«, jen v dodavku k vlastní soustavě květenství a jen jako nějaké nezbytné zlo uvádí a připomíná. Námitky, proti svéráznosti lat a jich rozdílnosti od složených botryí a i jinak složených všelijakých květenství častěji (jako od Payer-a a Eichler-a) pronášené, povstaly z nedorozumění, neboť jest pravda, že není všecko latou, co se v popisné botanice ze zvyklosti a povrchního názoru latou nazývá. Kaštan koňský na př. nemá latu nýbrž hrozen z vijanů složený, a květenství sveřepu a jiných trav latnatých není lata čistá, nýbrž z klásků složená, t. j. na konci všech svých větviček v botrytické květenství (klásek) vycházející, tudíž heterotaktická; také květenství kýchavice černé *(Veratrum nigrum)* nesmí se vůbec latou nazývati, jelikož jest to vskutku hrozen složený dle vzoru obrazce 23.

Ovšem jest pravda, že jsou, jako vůbec všude, i mezi složeným hroznem a mezi latou přechody. Tak na příkl. obr. 4 představuje latu ptačího zobu *(Ligustrum vulgare)*, která se již více než lata v obr. 2. složitému hroznu podobá. Na konci hlavní osy a silnějších větví dolejších vidíme tu více květů jednoduchých v hroznovitém sestavení, a prostřední větévky jsou celé hroznovité. Přibližnost k hroznu složitému dá se i číselně znázorniti, neboť rozvětvení jde na dolejších větvích toliko do 4. stupně, kdežto souřadných os vedlejších na hlavní ose jest tam 16, tedy mnohem více než stupňů prýtových, poměrný zlomek jest $\frac{4}{16}$. Přece však jest květenství to lata, nikoli složený hrozen, zač je na př. Payer (Éléments pag. 106) nesprávně vydává, neboť rozvětvenosti ve směru souřadném i podřadném ku konci celého květenství i doleních větví poznenáhlu ubývá, takže mezi částečným hroznem konečným a prostředními hrozníčky pobočnými, též pod konečnými hrozníčky nejdolejších hlavních větví jsou vě-

tévky pouze troj- a dvoukvěté. Ovšem kdyby větévky tyto scházely neb byly redukovány na jednotlivé květy, byl by z tohoto květenství složený hrozen. V tom ohledu jest taková přechodní forma laty velice zajímavá, poněvadž názorně nás o tom poučuje, jakým způsobem mohl z laty povstati složený hrozen. Lata, jakou má ptačí zob (a podobně i šeřík), může nazvána býti latou složito-hroznovitou. Pro takovouto modifikaci jest přídavné jméno, jaké žádá Buchenau, zcela místné.

Diplobotrye mohou býti buď stejnotvárně neb nestejnotvárně složeny, podle toho, zdali botrye druhého stupně neboli květenství částečná s hlavním prvořadým květenstvím ve speciální botrytické formě se shodují neb neshodují. Stejnotvárně složené neboli homomorfické diplobotrye jsou složený hrozen, okolík atd., o nichž právě povědíno. Nestejnotvárně složené neb heteromorfické (jinak méně určitým názvem také smíšené) jsou na př. hrozen z klasů (klásků) u některých trav *(Brachypodium, Alopecurus agrestis)*. hrozen z okolíků u břečtanu (obr. 25.). Též se vyskytují, ačkoli velmi pořídku, květenství stejnotvárně i nestejnotvárně zároveň složená, na př. složený obmezený okolík ze strboulů (u *Cladanthus prolifer* obr. 27.).

Původně mají složené botrye konečnou botrys parciální, poněvadž to původ jejich z laty hroznovité s sebou přináší. (Srv. obr. 4. a 23.) Tak na př. složený hrozen od *Veratrum*, složený klas od *Lolium*, hrozen z okolíků u břečtanu (obr. 25.).

Ve složených okolících *Umbellifer* však bývá konečný okolík (okolíček) z pravidla úplně nevyvinut (potlačen), a pouze výjimkou se vyvinuje. Tak jsem nalezl jednou u *Aegopodium podagraria* konečný okolíček statně vyvinutý a sice proliferující (obr. 21.); hlavní osa z okolíka prorostlá tam vytvořila hustě pod konečným okolíčkem dva stopkaté postranní okolíčky (bez podpůrných listenů), níže však z paždí trojklaného listenu (v okolíku i v okoličkách tohoto okoličnatce jsou listeny — obaly a obalíčky — jak známo úplně zaprtalé) třetí okolíček postranní. Tento prorostlý okolík nám ještě ukazuje původnější tvar, poukazující na latu, ze kteréž povstal. U mrkve plané (mrkvous zvané) končí se hlavní osa mezi paprsky okoličnatými často květem hnědobrunátně zbarveným. Aspoň se útvar ten namnoze za květ udává. Z pozorování mého však vychází na jevo, že zdánlivý ten květ jest vlastně konečný jednokvětý okolíček. Stopka jeho totiž nese asi uprostřed 1—2 obyčejné listénky obalné, někdy jsou i tři listénky, a v paždí každého jeden kvítek, z nichž jeden, největší a brunátný postavil se do prodloužení hlavní osy toho malého konečného okolíčka. Ten to jest, jenž se obyčejně, když jest samoten vyvinut, za konečný kvítek považuje. Zde tedy jest konečný okolíček již velice schudlý, redukovaný, a naznačuje nám tím cestu, kterou okolíček ten posléze u nejmnožších *Umbellifer* úplně byl potlačen.

Třetí typ květenství, totiž vidlanovitý (brachiální neb »cymosní« [1]) ve smyslu Al. Braun-a), jenž obsahuje vidlany neboli brachie, jest pravý opak

---

[1]) Já jsem též dávnější, na př. v Přírodopisném Atlase rostlinstva (1865) a pak ve svém spracování Pokorného přírodopisu rostlinstva, pojmenoval tento typus vrcholíkovitým

typu botrytického. Ve vidlanech přesahuje počet subordinovaných prýtů neboli stupňů rozvětvení více méně značně počet souřadných prýtů v každém stupni rozvětvení, kteréžto nanejvýše dva, aneb toliko jeden obnáší, a převyšuje jej tím více, čím hojnokvětější květenství to jest. Ve květenství hroznovitém není podřaděnost květních prýtů buď žádná (schází-li prvořadý konečný květ), buď jest na minimum, na dvě generace květních prýtů obmezena, ve květenství vidlanovitém naproti tomu není buď žádná souřaděnost květních prýtů (je-li totiž v každém stupni rozvětvení pouze jeden květ vyvinut), neb jest obmezena na minimum, totiž na dva květy v každém stupni čili generaci prýtů. Poměrné číslo, pro brachie platné, analogicky číslu pro botrye psané, totiž $\frac{m}{2}$ neb $\frac{m}{1}$, ve kterém m znamená počet stupňů neboli generací rozvětvení, jest nepravý zlomek, jehožto hodnota jest tím větší, čím hojnokvětější jest vidlan, jenž se jím vyznačuje.

Poněvadž počet os stejné generace ve vidlanu může býti buď 2 neb 1, tedy se rozeznává vidlan dvojí, vidlan dvouramenný (vidlan v užším smyslu, dichasium neb dibrachium, obr. 29, 30, 31), a vidlan jednoramenný (monobrachium, obr. 33, 34). Tento druhý představuje typ brachiální co nejdokonaleji, mezi ním a hroznem neobmezeným neb vůbec botryí neobmezenou jest kontrast největší. Vidlan jednoramenný totiž nemá žádnou souřaděnost prýtů květních, všecky jeho květy jsou podřaděné, náležejíce různým posloupným generacím; hrozen neobmezený opět nemá žádnou podřaděnost prýtů květních; všecky jeho květy jsou souřaděné, náležejíce téže generaci. Pozoruhodno jest, že vzdor tomu vidlan jednoramenný může míti největší podobnost s hroznem, totiž tehdy, když nabývá vzrůstu sympodiálního, tím že všecky generace prýtů postaví se basalními články svými v jeden směr, v jednu rovnou čáru, při čemž stopky květní odkloní se na stranu. Takovéto sympodiální vidlany byly také dávněji a částečně ještě nejnověji na základě pozorování vývoje za skutečné hrozny pokládány. Viděti z toho, že nikoli podobnost neb stejný habitus, nýbrž toliko přesná analysa a přesné pojmy rozhodují o povaze květenství. Nejeden zmatek v náuce o květenstvích povstal z toho, že mnozí auktoři příliš mnoho dbali na povrchní takovouto podobnost, důkladnému, ovšem také pracnějšímu rozboru se vyhýbajíce.

Ponětí těch dvou typů, které většina auktorů rozeznává, typu hroznovitého a typu vidlanovitého (»vrcholíkovitého«), nespočívá tedy jedině v poměrném počtu postranních os, je-li jich mnoho neb málo, tři, dva neb jeden, neb je-li ten počet »určitý« neb »neurčitý«, nýbrž záleží v různém poměru prýtů květních souřaděných ku prýtům podřaděným. Jedině tím možno logicky odůvodniti rozeznávání dvou podstatně rozdílných, anobrž kontrastujících pojmů typových. Jinak, kdyby se jednalo toliko o větší neb menší počet os pobočných, jenž může v souvislé řadě od mnoha až do jedné osy se měniti, nebylo

---

(cymosním), nazývaje vrcholíkem ovšem také květenství kaliny neb bezu černého, kteréž však správněji do typu latovitého náleží. Nyní, když vrcholík (cyma) z typu brachiálního vyloučen a k latám připočten jest, nemůže typ brachiální název vrcholíkovitého neboli cymosního více podržeti.

by dostatečného důvodu pro rozeznávání těch dvou typů. Avšak onen jedině správný a postačitelný výměr má v zápětí ještě další konsekvenci. Jestliže totiž v typu hroznovitém jsou subordinované generace květních prýtů v minimálním počtu, pouze dvé neb jen jedna, souřaděné prýty v této generaci však četné (ve složených botryích tři generace, avšak rozdělené na částečné inflorescence, které se jak jednoduché botrye chovají), a jestliže naopak v typu vidlanovitém souřaděné prýty jsou v minimu anebo žádné, za to však podřaděné generace prýtů četnější: tož v obou spočívá odkaz k typu třetímu, ve kterém ani souřaděné ani podřaděné osy nejsou v počtu tak minimálním až i žádné, nýbrž ve kterém oboje kategorie prýtů hojněji a stejnoměrněji vyvinuty jsou, a tento typ jest typ latovitý, jehož oprávněnost, již dříve ze samé povahy jeho dokázaná, ve srovnání s oběma druhými typy na novo se potvrzuje.

Typ hroznovitý i vidlanovitý možno též odvoditi jakožto zvláštní případy z typu latovitého, jakožto povšechnějšího. Ukázal jsem již příkladně na hroznovité latě ptačího zobu, kterak z laty typické může povstati hrozen, ovšem složený. Jestliže však si v latě všecky podřaděné generace prýtů myslíme redukované až na jednu generaci poboční, což se ochuzením a zjednodušením takové laty konečně státi může, tedy z laty povstane hrozen jednoduchý. Naopak kdyby v latě do vyšších stupňů rozvětvené pobočné souřadné osy v každé generaci se redukovaly na dvě neb na jednu, povstal by z ní vidlan dvoj- neb jednoramenný. Tak tedy předpokládá různost anobrž protiva hroznů a vidlanů latu, jakožto útvar prvotnější a povšechnější, ve kterém obě protivy jsou vyrovnány. Všeliké protivy v přírodě organické rodí se ze stavu indifferentního differencováním. V tom jeví se vývoj.

Dle výměru vidlanovitého typu, zjištěného srovnávacím způsobem a odvozením z latovitého typu, vyžaduje vidlan, zvláště dvouramenný, rozvětvení aspoň do třetího stupně prýtového, aby tento byl větší nežli počet souřadných prýtů, totiž 2. Jednoduchý, toliko do druhého stupně prýtů rozvětvený vidlan neodpovídá zcela pojmu vidlanů, jak též zlomek $\frac{2}{2}$ ukazuje, jenž sice není ještě pravým zlomkem jako v botrytickém květenství, ale také neobnáší více než 1, jak má obnášeti v typu vidlanovitém. Zkrátka, nejjednodušeji vidlicovité troj- neb dvoukvěté květenství, s jedním květem konečným a dvěma neb jedním pobočným (neb i po zakrsání konečného květu toliko se dvěma květy pobočnými), jest vlastně květenství obojetné, nerozhodné, stojící na hranici obou typů. Přece však je v jednotlivých určitých případech nemůžeme nechati stranou mimo všeliký typus. Vskutku mohou takové jednoduché vidle náležeti do všech tří typů. Jednak se totiž objevují v latách jakožto zcela nesamostatné, podřízené součástky jejich, tvoříce přechod mezi souřadnými osami jednokvětými a vícekvětými (viz obr. 2 a 4.). Kde však se vyskytují osaměle neb jako zvláštní součástky květenství heterotaktického, tu mohou náležeti buď do typu vidlanovitého neb hroznovitého.

Ku hroznovitým květenstvím musí se klásti takové chudé květenství o 2 neb 1 postranní ose květné, které pochází ochuzením z typické hojnokvětější botrye, o čemž svědčí buď variace posud se vyskytující aneb nejbližší příbu-

zenstvo rostliny, o kterou tu běží. Tak se někdy spatřují u samorostlíka (*Actaea spicata*), kterýž mívá dosti chudokvěté obmezené hrozny se stopkami bez listenců, velmi schudlé hrozníčky úžlabní pouze o 1 až 2 kvítkách postranních pod květem konečným. Ty tedy zajisté patří též do typu hroznovitého. Takovéto schudlé botrye prozrazují se začasté již tím, že jim schází konečný květ, jenž byl již v hojnokvětější botryi pot'ačen (ačkoli také nejjednodušší vidlan dvoukvětý může býti bez konečného květu, na př. u zimolézů ze sekce *Xylosteum*, a u buku ♀), dále potlačením neb vůbec nedostatkem listenců pod květy postranními, nejjistěji však nejbližším příbuzenstvem. Připomínám toliko neobmezené 2- až i 1květé hrozny některých vikví (*Vicia tetrasperma*, *monantha*, *lathyroides* atd.) neb 1květý (zřídka 2květý) okolík rodu *Tetragonolobus*. Jiné druhy *Vicii* mají totiž neobmezené hojnokvěté hrozny, které jsou zajisté původnější nežli ty schudlé 1—2květé, ježto z oněch zajisté povstaly. Hojnokvěté okolíky pak má rod *Lotus*, s nímžto rod *Tetragonolobus* jest nejblíže příbuzný.

Schudlé 1-2květé botrye jsou celkem vzácné zjevy. Převalná většina takových chudých dvou- až trojkvětých, obyčejně konečným květem opatřených, samostatných květenství nepovstala ochuzením z typických botryí, nýbrž ty buď pocházejí fylogeneticky z redukovaných vidlanů, pročež také do vidlanovitého typu vším právem náležejí; aneb jsou to takořka nevyvinuté zárodky neb prvopočátky typických vidlanů, které z nich také vidlanovitým rozvětvením do vyšších stupňů vyvinouti se mohou. Proto že jsou to pouhé nedosti typické prvopočátky vidlanů, které se od typických botryí pouze minimálním počtem vedlejších os (2 neb 1), nevšak rozvětvením do vyšších stupňů liší, mohou se od typických vidlanů neboli brachií názvem archibrachie zvláště rozeznávati. Že však do typu vidlanovitého patří, jeví se tudíž tím, že někdy v témže rodu anobrž i při témže druhu rostlinném jak tyto jednoduché archibrachie, tak na jejich místě složitější vidlany se vyskytovati mohou Tak na př. u některých silének nalézáme typicky rozvětvené hojnokvětější úžlabní vidlany dvouramenné, místo nich však, třebas u téhož chuději vyvinutého rostlinného druhu, též tříkvěté archibrachie, a konečně redukcí těchto na hlavní prvorodou osu pouze jednotlivé květy v úžlabí listů. (Srovnej na př. *Silene nutans, italica, longiflora, inflata* a j.)

Dvoukvětá ženská inflorescence buku, v číšce čtyrlaločné uzavřená, jest také jednoduchý vidlan čili archibrachium, jehožto konečný (prostřední) květ, jenž obyčejně jest potlačen, jedenkráte jsem nalezl dobře vyvinutý.[1]) Že tento nejjednodušší vidlan jest schopen dalšího vidlanovitého rozvětvení, to dokazují ony zajímavé abnormity mnohoklaných číšek, ve kterých též vidlan do 3ho i 4ho stupně rozvětvený se nachází, jak jsem o tom podal zprávu v níže citovaných pojednáních. Kde postranní květy trojkvětého archibrachia vytvořují dva listence, tam jest také možnost dalšího vidlanovitého rozvětvení, pročež, vůbec řečeno, takovéto květenství ráz typu vidlanovitého projevuje a tudíž tam

[1]) L. Čelakovský: O morfologickém významu kupuly (číšky) a pravých kupulifer. (Věstník kr. č. spol. nauk 1886) — Über die Cupula von Fagus und Castanea (Pringsh. Jahrb. XXI.).

také kladeno býti zasluhuje, jako na př. trojkvěté neb potlačením konečného květu dvoukvěté archibrachie zimolézů (*Lonicera*).

Z ponětí vidlanovitého typu dále následuje, že může býti vidlan toliko jednoramenný neb nanejvýš dvouramenný. Květenství jednoduché o třech vedlejších osách pod květem konečným není více vidlanem, nepatří více do typu vidlanovitého, nýbrž do typu hroznovitého; jsou-li tyto osy silně sblíženy, jest to nejchudší obmezený okolík. Neboť při třech osách vedlejších tento počet převyšuje již počet stupňů os, zlomek $\frac{2}{3}$ jest již zlomek pravý, jímž květenství hroznovité se vyznačuje, počtem tří jest překročena hranice, která typus vidlanovitý od hroznovitého dělí. Vidlany trojramenné (trichasie, »cymy« trichotomické) a vůbec víceramenné (pleiochasie) neexistují, ponévadž jsou to pojmy chybné, protimyslné; jsouť to okolíky tří- a vícepaprsečné, aneb jsou-li výše rozvětveny, jsou to vrcholíky z typu latovitého.

Teprva při dalším rozvětvení do třetího stupně prýtového, jímž z jednoduchého trojpaprsečného okolíka povstal by okolík složený, rovnal by se poměrný zlomek $\frac{3}{3}$ jedné celé. Trojpaprsečný složený okolík stojí tudíž skutečně na rozhraní mezi typem botrytickým a typem brachiálním. Dvouramenný vidlan, do druhého stupně rozvětvený neliší se vskutku od takovéhoto okolíka ničím jiným než počtem dvou pobočních os v obou stupních.

Viděli jsme, že redukcí z typických jednoduchých botryí mohou chudá 2- až 1květá květenství povstati, která sice počtem pobočných os rovnají se archibrachiím, však dle původu svého přece musí se považovati za schudlé botrye. Totéž možno říci o botryích složených. I v těch může počet primárních větví (paprsků) sklesnouti až na dvě, aniž by tím již povstal pravý vidlan. Tak na př. mezi Okoličnatými u dejvorce *(Caucalis daucoides)*, který míval z pravidla tři hlavní paprsky (tedy i tři okolíčky v okolíku), může někdy dvoupaprsečný okolík se objevovati, a u *Helosciadium inundatum* jest hlavní okolík konstantně dvoupaprsečný. Že okolík ten povstal z okolíka vícepaprsečného, tudíž není vidlanem, jemuž se podobá, vysvítá i z toho, že okolíčky z více než dvou květů sestávají, ježto by vidlan i v druhém stupni dvěma osami květními se rozvětvoval.

Redukcí může tudíž jednoduchá i složená botrye na méně než tři osy vedlejší sklesnouti, avšak nikdy nemůže vidlan, nemá-li pojem zvláštního typu zrušen býti, více než dvě poboční souřadné osy obsahovati. Sama definice Payer-ova a Eichler-ova by k tomu měla vésti, neboť pouze ve vidlanech jest počet vedlejších os opravdu určitý, jak tomu již názvy monobrachium a dibrachium svědčí; kdežto v tak zvaném pleiochasium již dle samého názvu jest počet os větší sice (πλεῖος, několik), avšak neurčitý; skutečně také v »pleiochasium« pryšců, jichž květenství za takové se vydává, mění se počet někdy od 3 do 5, u jiných od pěti až do zcela neurčitě velkého počtu; u *Sedum bolonicnse* jsou hlavní větve květenství namnoze sice 3, však mění se také na 4 neb 2.

Alex. Braun měl ještě jiný důvod, pro který již r. 1835 obmezoval typus »cymosní« (t. j. vidlanovitý) na formu dvouramennou a jednoramennou. Uva-

žuje totiž o zákonech postavení listů dle Schimper-ových ostrovtipných ideí, veden byl též k rozhovoru o »jistých poměrech rozvětvení ze dvou na ose úžlabní prvorodých listů neb listenců (prophylla, Vorblätter); kteréžto poměry nejsnáze v tak zvaných cymosních květenstvích nalézti možná, ačkoliv se vesměs i mimo květenství vyskytují«. Rozvětvením ze dvou předchozích listenů může ovšem toliko dibrachium, aneb, jestliže rozvětvení jen z jednoho listenu vychází, monobrachium povstati. Skutečně vznikají také nejmnožší vidlany v paždí listů a již proto musí býti tyto vidlany buď dvou- neb jednoramenné. Braun, jenž z důvodů již dříve vytčených uznával toliko vidlany úžlabní, neznal proto také jiné »cymy« než dvou- neb jednoramenné.

Začasté zakrněním neb úplným potlačením vždy jednoho prýtu v každém stupni rozvětvení dibrachiálního povstává monobrachium (ačkoli ovšem všeobecně nelze každé monobrachium z dibrachia odvoditi, poněvadž prýty v monobrachiích již původně a typicky jediný listenec zplozovati mohou), a i v tom jeví se ještě blízká příbuznost monobrachií s vidlany dvouramennými.

Ve vidlanech dvouramenných bývají listeny do stejné výše na ose sblíženy a více méně přesně vstřícně postaveny, protož se nejraději u rostlin se vstřícnými listy, v tom případě také nejspíše v konečném postavení na lodyhách a větvích objevují.

Co se dotýče znaků pro vidlany od Al. Braun-a vytčeného, že totiž vedlejší osy v každém stupni rozvětvení jsou rovny mateřské své ose, jest to pouhý následek onoho způsobu rozvětvení, kterým se vidlany charakterisují. Jest to následek toho, že se osy v každém stupni rozvětvení stejným způsobem dále do vyššího stupně rozvětvují, kdežto v botryích jednoduchých se již vedlejší osy prvorodé dále nerozvětvují, v latách ale různé osy souřadné nestejně se rozvětvují. Srovnáme-li vidlany s botryemi a latami, můžeme říci, že v latách jak podřaděné tak i souřadné osy jsou vespolek nerovny; v botryích staly se souřaděné osy vedlejší sobě rovny, zůstala však nerovnost s osou hlavní, jíž jsou podřaděny; ve vidlanech pak nejen souřadné osy, nýbrž i podřaděné generace os staly se sobě rovnými.

Ovšem třeba hned doložiti, že i ve vidlanu poslední generace aspoň potud nerovná se předcházejícím, že žádných dalších květních prýtův nezplozuje; také se může státi, že poslední prýty, na př. dle Eichler-a a Wydler-a u třezalek *(Hypericum)*, ani listenců více netvoří, nýbrž hned první své listy do kalicha přijímají. Je-li vidlan nějaký k lodyze neb větvím konečný, pak zase první osa, která níženeji lupeny nese, nerovná se celá prýtům pozdnějším, než toliko hořejší část její, která ku květenství samému náleží.

Také co se týče botryí složených, není rozdíl jich od vidlanů v tom ohledu již tak patrný, právě proto, že ve složeném hroznu, okolíku atd. vedlejší osy prvořadé podobně jak hlavní osa, totiž botryticky se rozvětvují. Ve složeném okolíku na př. první, hlavní osa (pokud ku květenství patří) nese četnější listeny s úžlabními prýty, druhé osy (paprsky okolíka) rovněž tak, rovnají se tedy ose první, teprva třetí osy květní, bezlistenné, již dále nerozvětvené, jsou od prvních dvou rozdílny. Pro botrye uvedený znak nerovnosti osy hlavní

a vedlejších neplatí tedy pro celé diplobotrye, leč toliko pro součásti, z nichž se skládají (pro tak zvané jejich parciální inflorescence).

Z pravé zde vyložené povahy a z pravého pojmu tří hlavních typů květenství vyplývají dále ještě dva znaky těchto typů, totiž skoro tytéž, na kterých Röper byl založil své rozvržení květenství, jenže musí se pojímati poněkud jinak. Míním odstředivost a dostředivost a pak obmezenost a neobmezenost celého květenství. Co se týče odstředivosti a dostředivosti, nesmí se však hleděti pouze na postup v rozkvétání, který, jak v úvodu jsem ukázal, rozličnými příčinami vedlejšími může býti modifikován, nýbrž musíme míti na zřeteli celý vývoj. A tu nelze neuznati, že vidlany mají vývoj odstředivý neb centrifugální, právě proto, že ráz toho květenství spočívá ve vyvinování os posloupných, které se od hlavní osy a vrcholku jejího vždy více vzdalují. Naproti tomu botrye mají vývoj dostředivý neb centripetální, poněvadž jejich květní osy jsou koordinované a tudíž na ose hlavní od zpodu k vrcholku jejímu, tedy akropetálně neb centripetálně se zakládají a dále vyvinují, ačkoli není zapotřebí, aby přesně v tomtéž pořádku rozkvétaly. Posléze thyrsy mají vývoj obojí, dostředivý i odstředivý, poněvadž souřadné osy na poměrných hlavních neb mateřských svých osách akropetálně, posloupné generace os však centrifugálně se zakládají a vyvinují. Tedy i v tomto ohledu jeví se thyrsy jako zvláštní typ, který se i vývojem tímto od botrytického květenství liší.

Druhý znak, totiž obmezenost a neobmezenost květenství, ovšem nikoli ve smyslu Röper-ově, nýbrž dle výkladu Payer-ova, do jisté míry také má svou platnost. Vidlany jsou zajisté květenství co do počtu souřadných os obmezená, t. j. obmezená na jednu neb dvě osy postranní, avšak ohledně počtu generací os jsou zase neobmezená, mohouce se rozvětvovati do stupňů neurčitých. Zcela opačně se chovají botrye, kteréž jsou co do počtu os souřadných neobmezené, avšak, co se týče počtu generací os květních, jsou nanejvýš obmezené. Latovitá květenství jeví i v této stránce svou největší původnost, neboť jsou thyrsy v obojím ohledu neobmezeny.

Ovšem třeba na paměti míti, že neobmezenost počtu os souřadných v botryích a neobmezenost počtu os podřaděných ve vidlanech jest pouze v zásadě neboli v potenci přesná, jelikož archibrachie, ač mají zásadnou schopnost k dalšímu rozvětvování neb ačkoli z neobmezených vidlanů redukcí povstaly, vskutku přece jsou na druhou generaci os obmezeny; a s druhé strany opět botrye některé zřejmou redukcí mohou se státi na 2 neb 1 osu postranní obmezenými, ačkoli pocházejí zajisté z botrye neobmezené.

Payer hleděl toliko na neobmezenost neb obmezenost prýtů souřadných; proto obdržel pouze dvě skupiny květenství, opomínaje thyrsy, jimž neporozuměl, avšak není pražádné příčiny, proč by se obmezenost neb neobmezenost počtu podřaděných generací osních zanedbávati měla. Šetříme-li i této, pak obdržíme též zase tři skupiny květenství, a právě laty neb thyrsy jakožto nejpůvodnější.

Mám za to, že tímto způsobem dokonale odůvodněno, že třeba rozeznávati řečené tři typy květenství, jejichž pojmy jen tak, jak se stalo, mohou býti přesně logicky stanoveny a ohraničeny. Dále jsem ukázal, že z typu latnatého oba dva ostatní dají se snadno odvoditi. Že vskutku latnaté květenství jest nejpůvodnější, možná takto dokázati.

Květenství, jakožto celek od vegetativní rostliny rozdílný, povstalo teprva později. Prvotně byly květy jednotlivě konečné na lodyze listnaté a na listnatých větvích jejích; všecky prýty tedy byly původně zároveň vegetativní i (hořeji) reproduktivní, jak to podnes v některých familiích, na př. Pryskyřníkovitých, Růžovitých a j. shledáváme. Obě hlavní funkce rostlinné, vegetace a reprodukce jsou tu ještě všude v těchže prýtech spojeny. První zrůznění (differencování) — abych užil slov Nägeli-ho (v Theorie der Abstammungslehre str. 383) — záleží obyčejně v tom, že jedny větve stanou se výhradně vegetativními, jiné toliko reproduktivními, s čímž bývá spojen další rozdíl ten, že vegetativní osy silnější, zhusta neobmezený vzrůst získají, zatím co osy reproduktivní se skracují a vždy obmezenými zůstávají.

Tam, kde zrůznění ve větve vegetativní a pouze reproduktivní ještě neprovedeno, nalézáme na lodyze a větvích hlavních nejprve poznenáhlé přibývání statnosti a rozvětvenosti postranních větví, na vrcholku opět ubývání. Počet listů na postranních větvích od dolejška neb od prostředka k vrcholku lodyhy stává se menším, na nejhořejších toliko 2 neb 1 list se tvoří, a totéž ubývání pozorujeme na větvích stupňů dalších. Nejmohutnějším rozvětvením ve stupně vyšší vyznamenává se někdy prostřední část, někdy však toto leží blíže hořejška rozvětvení. Zvolil jsem za příklad květoucí lodyhu kuklíka *(Geum urbanum)* (obr. 1.). V úžlabí všech listů, které jsou na lodyze a hlavních větvích lupenovité, vznikají tuto prýty postranní; prýty třetího stupně jsou častěji již chudinké neb zakrnělé, toliko na hořejších, zvláště na předposlední větvi prvořadé jsou silněji vyvinuty a mají v paždí svých dvou malých lístků zakrnělé kvítky čtvrtého stupně. Ostatně vyskytují se také mohutnější a do vyšších stupňů rozvětvené exempláře, na hořejších větvích až do šestého stupně rozvětvené, veskrze dvěma větévkami, tedy dichasiálně a s přerůstáním. *Geum urbanum* tedy patří mezi ony rostliny, u nichž nejmohutnější rozvětvení do vyšších stupňů pod samým vrcholkem leží, kde hořejšek jest stejnovrcholný neb vrcholičený.

Veškerý systém větví květem ukončených jest však latovitý; povstaloť by z něho pravé květenství latovité, kdyby podpůrné listy vesměs v listeny byly přeměněny. Typičnější lata ovšem by byla tenkráte, kdyby jak největší počet třetiřadých prýtů tak i největší mohutnost rozvětvovací do prostředních neb nejdolejších větví položena byla.

Vyvinuje-li se lodyha kuklíka slaběji, zakrní prýty třetiřadé již úplně (na pouhé rudimenty); rozvětvení pak přechází v hroznovité. Kdyby se všecky větve prvorodé skrátily a listence jich, pouze v počtu dvou, staly se dokonale jalovými, posléze i listence tyto se potlačily, povstal by jednoduchý hrozen konečný. Poněvadž jindy pochod fylogenetický ve zrůznění stejných částí záleží, mohlo by se namítati, že takovéto sestejnění os ve hroznu, když

dříve v latě byly nestejnými, nemůže býti pochodem fylogenetickým, avšak tu třeba uvážiti, že při tomto sestejnění os souřadných zvýší se různost jich u porovnání s osou hlavní, zvláště když tato ještě pozbude květu konečného. Hlavní osa stává se tím výhradně ploditelkou a nositelkou květních prýtů a jich listenů podpůrných, tyto prýty pak nemají nic jiného na práci, nežli věnovati se pohlavnímu rozplozování a vytvořovati formace listů, k výkonu tomu potřebné.

Správně a důmyslně odvodil tudíž již Nägeli (l. c. pag. 384) jednoduchý hrozen neobmezený z laty do vyšších stupňů posloupně rozvětvené. Pravil tam, že ona přeměna, která v tom záleží, že postranní větve květné, z nichž dolejší byly původně silnější a mohutněji rozvětvené, stávají se sobě rovnými a nerozvětvenými, vysvětluje se dokonalejším zrůzněním za spolupůsobení redukce fylogenetické.

Tomuto fylogenetickému procesu odpovídá dokonale moje definice květenství hroznovitého, dle které subordinované generace prýtů až na větve prvořadé vymizely a koordinované prýty na hlavní ose pozůstalé staly se sobě rovnými.

Také složená botrys vznikla z latovitého rozvětvení differencováním a redukcí. Kdyby totiž v obr. 1. hořejší tři větve se skrátily a na jediný květ konečný redukovaly, na dolejších pak větvích prýty třetiřadé staly se stejnými a jednokvětými, povstal by z latovitého rozvětvení hrozen složený. Další totální redukcí konečného hroznu částečného povstane posléze neobmezená diplobotrye, jakou ve formě složitého okolíka u nejmnožších Okoličnatců shledáváme.

Další možnost jest, že lupeny na hlavní ose se zachovají, kterážto pozbyvši schopnosti tvořiti květ konečný, stane se čistě vegetativní, čímž ostřejšího zrůznění hlavní osy naproti větvím postranním, nyní výhradně reproduktivním, se docílí. V tomto případě povstanou místo složité botrys úžlabní hrozny (pak okolíky, strbouly atd.) na lodyze vegetativní, jako na př. u *Veronica chamaedrys*.

Též vidlany dlužno odvoditi z laty, ve které nastala redukce primárních větví až na jednu neb dvě ze dvou listenů vzniklé, dále do vyšších stupňů též jenom ze dvou neb jednoho listence se rozvětvující, zcela dle definice, kterou jsem pro vidlany byl formuloval. Z latovitého rozvětvení kuklíka v obr. 1. povstal by konečný vidlan dvouramenný tím snadněji, poněvadž zde již hořejší větve laty mají tendenci k rozvětvení vidlanovitému. Zapotřebí jest toliko, aby všecky dolejší větve staly se vegetativními, neb vůbec se nevyvinovaly, toliko 2 nejhořejší aby zůstaly reproduktivními. Byl by z toho vidlan konečný jak u *Silene armeria*. Kdyby však v obr. 1. lupeny na hlavní neobmezené ose se zachovaly a všecky jich úžlabní větve staly se rovnými nejhořejším vidlanovitě rozvětveným, obdrželi bychom lodyhy s vidlany úžlabními, jaké u *Silene nutans* a p. se nacházejí. Právě tímto fylogenetickým odvozením z jednoho původního a sice latovitého typu rozvětvení vysvětluje se, že na př. v rodu *Silene* některé druhy mají vidlany konečné, jiné toliko úžlabní. Poněvadž ale úžlabní vidlany na lodyze své, jak vidno, hroznovitě jsou sestaveny, povstane z laty dokonalý hrozen z vidlanů složený, jestliže zároveň listy na lodyze v listeny se

metamorfují. Poznáváme z toho, že i květenství různě složená, heterotaktická, z rozvětvení původně latovitého povstati mohla.

Nemá se tím ovšem popírati, že květenství botrytická (i vidlanovitá) též samostatně povstati mohla na ose původně jednokvěté. Z postranních pupenů na takovéto ose mohly se vyvinouti prolepticky osy pobočni rovněž jednokvěté; redukcí jejich listů vegetativních mohly povstati stopky jednokvěté a tím osa rozvětvená, nejprv konečným květem obmezená, pak i neobmezená, mohla přejíti v hrozen konečný.

Z možnosti fylogenetického odvození různých způsobů květenství následuje, že rozličné tři typy květenství nejsou žádné tuhé, neproměnlivé typy, zvláště typ latovitý, ze kteréhož všecky možné formy květenství odvozeny býti mohou. Z té příčiny jest zcela přirozeno (a nelze z toho činiti námitku proti rozeznávání těch tří typů), že z laty redukcí neb seslabením může povstati hrozen, neb z konečného okolíka dibrachiálně rozvětveného konečné dibrachium; aneb že přechody z jednoho typu do druhého existují, kterými však typy samy, jsouce přesně určeny, nikterak újmy netrpí, aniž může kdy nastati pochybnost, do kterého typu které květenství, byť i přechodní, přináleží. Botanika popisná musí si takových přechodních forem všímati a je přídavnými jmény označovati; tak na př. popíše květenství ptačího zobu neb šeříka jakožto latu částečně hroznovitou nebo-li do složeného hroznu přecházející.

III.

Soustava květenství.

Přistoupím nyní k soustavnému přehledu a podrobnějšímu uvažování jednotlivých forem květenství. Především musí se, dle předcházejícího příkladu Payer-ova, Hofmeister-ova a Pax-ova rozeznávati květenství čistě dle jednoho typu vytvořené, po případě i složené, a květenství částečně dle jednoho, částečně dle některého jiného ze tří hlavních typů rozvětvené. Prvnější nazývám homotypně, druhé heterotypně rozvětvené. Jest to název určitější než ten, kterého užil Pax, jenž prvnějšímu říká homotaktické, druhému heterotaktické.

Dle toho, co v předcházejícím oddílu vyloženo, musíme tři typy květenství homotypních v krátkosti takto charakterisovati:

Ve květenství latovitém jest počet jak generací květních, tak os souřadných neurčitý a tudíž neobmezený, vždy větší než 2, a počtu obojích os k vrcholku květenství a ve vyšších stupních rozvětvenosti ubývá. Poměr největšího počtu generací květních k největšímu počtu souřadných os jest $m : n$ čili $\frac{m}{n}$, při čemž m i n větší jest než 2. Ani osy souřadné vespolek ani posloupné generace os květních vespolek i s oněmi nejsou si rovny. Vývoj celku jest z části dostředivý (centripetální), z části odstředivý.

Ve květenství botrytickém jest počet generací květních obmezen (resp. redukován) na minimum, t. j. na 1 neb 2, počet květních os souřadných n

jest neurčitý a neobmezený, typicky větší než 2 (toliko výjimečně fylogenetickou redukcí původní hojnokvětější botrye sklesnouti může na 2 neb 1). Poměr generací květů k počtu os souřaděných jest $2 : n$ neb $1 : n$, jinak $\frac{2}{n}$ neb $\frac{1}{n}$, což jest pravý zlomek. Souřadné osy vedlejší jsou si vespolek rovny, hlavní ose však jsou nerovny. Vývoj květenství toho jest dostředivý.

Ve květenství vidlanovitém jest počet generací květních neurčit a neobmezen, typicky větší než 2 (toliko výjimečně ve formách začátečních čili v archibrachiích obnáší toliko 2 neb potlačením květu první generace pouze 1), však osy souřadné jsou obmezeny na minimum, t. j. na 1 neb 2. Poměrný zlomek tohoto květenství $\frac{m}{2}$ neb $\frac{m}{1}$ jest nepravý zlomek (pro archibrachii $\frac{2}{2}$ rovná se 1). Osy všech generací květních jsou si vespolek rovny. Vývoj jest odstředivý neb centrifugální.

A. Květenství homotypní (homotaktická).

I. Typ latovitý neboli thyrsoidní (typus thyrsoideus).

Užívám pro typ latovitý též povšechného latinského názvu thyrsus neb typus thyrsoidní, jenž odpovídá názvům typu botrytického a brachiálního. Jindy se ovšem vyrozumívala názvem thyrsus hojno- a hustokvětá forma laty vlastní, která však zvláštního pojmenování statným jménem nezasluhuje, pročež název thyrsus v tomto smyslu stal se úplně zbytečným. De Candolle užil ho opět jinak pro pojmenování květenství heterotypního, totiž hroznu z vidlanů složeného, ale ani toho netřeba, poněvadž ani jiným květenstvím heterotypním zvláštních názvů, jimiž by se terminologie náramně spletitou stala, nedáváme. Název thyrsus nalézá se tudíž posud v disponibilitě.

Latovitých květenství možná rozeznávati čtyři druhy neb formy, které vesměs již od Al. Braun-a byly vytknuty, totiž: 1. latu vlastní (panicula), 2. kytku (corymbothyrsus), 3. kružel (anthela), 4. vrcholík (cyma). Z důvodu, který k posledu vyložím, můžeme první dva způsoby thyrsů spojiti pod názvem lat hroznovitých a poslední dvě formy pod názvem lat vrcholíkovitých.

AA. *Laty hroznovité.* (Thyrsi racemosi.)

1. Lata (panicula).
(Lata vlastní.)

Lata v pravém toho slova smyslu tím se vyznačuje, že má hlavní osu prodlouženou a do samého vrcholku celého květenství vystupující, a že osy vedlejší, posloupně vždy kratší a kratší, vrchole nedosahují (obr. 2.—4.). Z té příčiny má lata podobu jehlancovitou, podlouhlou neb vejčitou.

Jinak nelze tuto o latě mnoho se šířiti. Nedím, že by snad nejevila značnější rozmanitost v podrobnější své úpravě, v poměrech délky svých rozličných os, v hustotě květů, ve všeobecném obrysu, větší neb menší složitosti — četné

příklady nejrozmanitějších tvarů laty najdeme na př. v jediném velkém řádu trav —, avšak podrobnější líčení všech těchto poměrů přesahovalo by valně obor této rozpravy, jejížto účel, položiti pevnější základy náuky o květenstvích, podrobností takých nevyžaduje.

Toliko k tomu budiž poukázáno, že někdy v latách, jejichž hlavní osa a hlavní větve prodlouženy jsou, poslední větévky bývají velice zkrácené, květy tudíž kratičce stopkaté, takže malé strboulovité shluky činí, kterým se klubka říká. Jindy opět se míní vidlany velmi stažené tímto názvem nedosti určitým. Pokud se týče laty, jejíž větve v klubka vycházejí, může se ovšem nazývati latou klubkatou (panicula glomerata).

Že se vyskytují přechody z vlastní laty do složitého hroznu, a že z ní redukcí na jednoduché větve prvořadé povstává hrozen, nejprve obmezený se stopkami květními ku konci jeho stále kratšími, pak neobmezený, se stopkami květů stejně dlouhými, bylo již výše zpomenuto.

2. Kytka (corymbothyrsus).
(Lata chocholičnatá.)

Také toto květenství má osu hlavní prodlouženou, až do konce svého neb aspoň blízko k němu dosahující; avšak vedlejší osy prvého i vyšších stupňů jsou tak prodlouženy, nejdolejší nejvíce, že květy všecky v stejné výši, neb v jedné ploše stojí, někdy konečný květ něco málo i přesahujíce. Jen někdy, když větve prvořadé dolejší více od sebe jsou vzdáleny, často pak již z paždí lupenů vznikajíce, bývají tyto kratší, takže vrcholku nedosahují, jako na př. u řebříčku (jehož kytka jest ovšem heterotypní, poněvadž místo jednotlivých květů strboulky nese). Jiný pěkný příklad kytky, a sice homotypní, ukazuje *Hydrangea arborescens* Schema tohoto latovitého květenství podáno v obr. 5.

Někteří botanikové kladli a kladou tento druh thyrsu mezi složené chocholíky (corymbi compositi), poněvadž vůbec květenství latovitého od složené botrye nerozeznávají; tak na př. Bischoff a po něm i Presl. Al. Braun přenesl název corymbus výhradně na toto latovité květenství; chocholík jednoduchý a pak i složený, jejž za modifikaci hroznu, tu jednoduchého tam složitého považoval, pojmenoval racemus umbelliformis. Já však z důvodů, které ještě uvedu, liším chocholík od hroznu, pročež musím v souhlase s jinými auktory onomu ponechati název corymbus (simplex et compositus); tudíž zapotřebí pro latu chocholičnatou nového, jak latinského tak českého jednoduchého statného jména. Navrhuji názvy corymbothyrsus a kytka. Presl sice kytkou vyrozumíval thyrsus starších auktorů, latu hustokvětou, pro kterou žádného zvláštního názvu nepotřebujeme. Název kytka hodí se však dobře k označení laty chocholičnaté, myslíme-li při tom na plochou formu moderních kytic divadelních neb koncertních.

Co se pak týče rozdílu kytky od chocholíka složeného, který na př. shledáváme u *Chrysanthemum corymbosum* (obr. 24.), jest to tentýž rozdíl, který mezi vlastní latou a mezi složeným hroznem se jeví. V kytce, jako vůbec v latovitém květenství, ubývá od spodu k vrcholku jejímu po stupních složi-

tosti co do počtu souřadných i podřaděných os, a souřadné osy jsou tedy velmi nestejny, kdežto v chocholíku složeném na konci hlavní osy i na konci silnějších větví prvořadých více jednokvětých stopek v chocholíčku sestavených se nalézá, prvořadé větévky dolejší jsou tedy mezi sebou rovny, a hořejší rovněž mezi sebou rovny. V chocholíku složeném toliko délky hlavních větví, a ovšem i počtu os třetiřadých na nich, k vrcholku květenství stupňovitě ubývá, v čemž ještě se zvláště jasně zračí původ jeho z kytkovité laty, poněvadž i chocholík jednoduchý pro nestejnou délku svých stopek květních více na latu upomíná nežli hrozen, jehož stopky květní staly se stejně dlouhými.

BB. *Laty vrcholikovité* (Thyrsi cymosi).

3. Kružel (anthela).

(Lata kruželovitá.)

Kružel se liší od nejblíže stojící kytky, do kteréž také někdy přechází, na př. u *Juncus Gerardi* (viz Buchenau v Pringsh. Jahrb. IV. obr. 16), silným skrácením hlavní osy a větvemi prvořadými silně prodlouženými a daleko hlavní osu přerůstajícími, z nichž nejdolejší nejvíce jsou prodlouženy a stejným způsobem jak hlavní osa dále se rozvětvují. Dolejší články hlavní osy jsou delší a tudíž i dolejší hlavní větve od sebe oddálenější nežli hořejší. Ostatně dle zákonu latovitého rozvětvení ubývá rozvětvenosti na hořeních mnohem kratších větévkách a sice dosti rychle. Pravidelně stejnovrcholný stínidlovitý tvar, jaký má kytka, pro velikou nestejnost větví v kruželi není možný. Viz obr. 6.

Kružel nachází se hlavně u některých druhů z rodů *Juncus* a *Luzula*, jejichžto květenství velmi důkladně probral Buchenau v pojednání výše citovaném, též u některých Šáchorovitých (na př. u *Scirpus silvaticus)*, kdež ovšem poslední větévky místo jednotlivých květů nesou klásky, takže květenství jest tam heterotypní; též má velmi význačný a silně složený kružel *Spiraea ulmaria*, což správně již Sachs udal a též v mém Prodromu květeny české uvedeno. Celkem jest to květenství vzácné.

Pojem kružele a latinský jeho název uvedl do botaniky E. Meyer ve své Monographia Juncacearum 1819, kterýž spolu připomíná, že květenství to již před tím F. C. Mertens rozeznával a německy Spirre (metathesis slova Rispe) pojmenoval. Co se dotýče českého názvu, kružel, podotýkám, že jej utvořil zesnulý můj otec, když jsem si mu jako jinoch stěžoval, že se nám názvu pro toto květenství, které Presl neznal, nedostává. Má jím býti naznačeno, že prodloužené větve na spodu květenství kolem do kruhu vynikají.

Také kružel vychází na posledních nejslabších větvičkách, tak jako jiné laty, častěji v dvoj- neb jednoramenné archibrachie, pro které však ještě nevstupuje do řady květenství heterotypního, což se však může státi, jestliže se poslední větvičky do druhého stupně neb výše vidlanovitě rozvětvují.

Oproti tomu může zjednodušením neb redukcí vzejíti z kružele též květenství hroznovité, a sice chocholík (s brachiálními východy neb bez nich),

konečně i vidlan pouhý. Obojí možná pozorovati nezřídka při *Juncus bufonius*. V typickém kruželi ubývá délky a rozvětvenosti postranních větví poznenáhla; tu bývají nejhořejší hlavní větévky krátké a jednokvěté, níže stojící dvou-, pak trojkvěté atd., jako to vidíme na př. u *Luzula albida*. Tyto kratičké jedno- až trojkvěté hoření větévky (nazvemež je vrcholovými) scházejí v kruželi od *Juncus bufonius*. Počet hlavních větví pod konečným krátce stopkatým květem i na rostlinách nejstatnějších není valný, ponejvíce jsou čtyři, všecky prodloužené — nejdolejší větev ovšem nejvíce, nejhořejší nejméně, a rozvětvují se třemi až dvěma větévkami (rameny) dále. Kterak dle zákona thyrsu ubývá rozvětvenosti k hořejšku květenství, pozná se nejpřehledněji z následující tabulky, ve které I.—IV. znamenají větve prvořadé, 1—3 větévky druhořadé tohoto květenství. Viz obr. 13.

I. tříramenná (větévka): 1. tříramenná, 2. a 3. dvouramenná (dibrachiální); všecka ramena vycházejí v srpky.
II. tříramenná: 1. a 2. dvouramenná s rameny srpkovitými, 3. jednoduchý srpek.
III. dvouramenná: 1. a 2. tvoří srpky.
IV. jako III., jen že srpky chudokvětější.

Celé květenství jest tedy heterotypní, jest to kružel ze srpků. Týž povstal silnou přerůstavostí nemnohých souřadných větví všech stupňů, z nichž větve druhého a třetího řádu klesají počtem na 2 a 1, tím vycházejí ve vidlany dvouramenné a k posledu jednoramenné. Pokročilejším zjednodušením může z takového kružele povstati, právě také u *J. bufonius*, pouhý chocholík, jehož větve se heterotypně dílem srpkovitě, dílem (nejdolejší z nich) nejprve dibrachiálně a pak srpkovitě dále vyvinují. Pakliže ještě počet hlavních větví na slabých lodyžkách i na 2 se zredukuje, přemění se celé květenství v konečný vidlan dvouramenný, jehož obě ramena se nadále slabě srpkovitě neb nejprv ještě dvouramenně větví.

Z velmi jednoduchého kružele, ve kterém rozdíl jednoduchých větviček vrcholových a nemnohých slabě rozvětvených větví doleních není tak velký a očividný, může povstati zcela jednoduchý homotypní chocholík, jestliže i dolení větve zůstanou jednoduchými. Tak má na př. *Luzula pilosa* (Buchenau l. c. obr. 22) jednoduchý kružel, velmi příbuzná *L. flavescens* (ibidem fig. 21) ale jednoduchý chocholík, jehož stopky květní nad konečný květ skoro stejně jsou prodlouženy.

4. Vrcholík (cyma).

Květenství, které tímto názvem vyrozumívám, má největší podobnost jednak v kruželem, jednak s kytkou; též jeho hlavní osa jest značně skrácena a nese nemnohé větve prvořadé, jichžto dolejší (nazveme je základními, poněvadž tvoří základ celého květenství a někdy jen tyto mohou býti vyvinuty) jsou též nejstatnější, prodlouženy a přerostavy, avšak, na rozdíl od obou předešlých forem thyrsoidních, v přeslen více méně dokonalý staženy neb aspoň silně sbliženy. Někdy, jako u bezu černého, seřaďují se na delším

článku hlavní osy též hoření, mnohem slabší a kratší, i slaběji rozvětvené větévky vrcholové do druhého přeslenu pod konečným květem primárním. Na větvích základních opakuje se totéž přeslenovité sblížení větví druhořadých a třebas i ještě dále třetiřadých atd., toliko dle zákona laty poněkud jednodušeji. Poslední větvičky, někdy již i slabé větévky vrcholové, vycházejí, pokud vím, vždycky v dibrachie neb krátké monobrachie, pročež vrcholík asi vždy ako květenství heterotypní se vyskytuje, ačkoli hlavní a prvotní část jeho až po vidlanovité východy mezi homotypní a sice latovitá květenství náleží. Povšechný obrys vrcholíka jest stejnovrcholný a stínidlovitý jako v kytce, jelikož paprsky hlavní co do délky a rozvětvení dosti stejně jsou vyvinuty a téměř rovnovážně z hlavní osy vycházejí, jakož i větve dalších stupňů tímže způsobem do plochy se rozkládají, čehož nejznámějším dokladem jest květenství černého bezu *(Sambucus nigra)*. Poněvadž paprsky hlavní přeslenovitě jsou sestaveny, má vrcholík též podobnost s okolíkem ovšem složeným neb heterotypně rozvětveným.

Také vrcholík řídčeji se vyskytuje nežli lata vlastní a kytka; hlavně a nejdokonaleji v rodech *Sambucus, Viburnum* a *Cornus*, též u některých *Crassulacei*.

Příkladně proberu podrobněji květenství bezu černého (obr. 11.).[1]) Jest to vrcholík velmi složitý; jest to příklad Röper-ovy »cyma composita«, poněvadž nad hlavním přeslenem čtyr silných paprsků po delším článku hlavní osy následuje druhý přeslen 4 slabších paprsků, načež osa hlavní primárním květem se končí. Přesleny ty nejsou dokonalé, neboť dva paprsky vstřícné (I, I v obr. 11. *A*) stojí o malounko níže než dva paprsky (II, II) s nimi se střídající. Paprsky I, I níže stojící jsou také trochu více složité, totiž bohatěji rozvětvené nežli paprsky hořejší. Také v hořením přeslenu jsou paprsky dolejší III, III více rozvětveny nežli paprsky hořejší IV, IV. Velmi statné, bohaté vrcholíky mohou nad druhým přeslenem vytvořiti ještě třetí, ovšem ještě slaběji vyvinutý (ze dvou jednoduchých dichasií a ze dvou jednokvětých paprsků se skládající) přeslínek, dříve než osa hlavní květem se ukončí. Vzácná variace vrcholíka jest ta, když pod dvěma přesleny, delším článkem odděleny, dvě silné vstřícné větve květonosné se vyvinou.

Popatřme nyní na hlavní paprsky, z nichž jeden z hořejšího páru (II) vyobrazen v 11 *B*. Takovýto paprslek opět tvoří čtyrpaprsečný přeslínek, který však má zvláštní ráz dorsiventrální. Dva paprslečky jeho na vnější (hřbetní) straně celého vrcholíku stojící (*D*) jsou mnohem statnější, dva vnitřní (břišní) *v* však mnohem slabší; onyno rozvětvují se opět čtyrčetně přeslenovitě a rovněž tak dorsiventrálně, což se opakuje na vnějších silnějších paprscích třetiřadých, anebo odtud již dibrachiální a posléze i jednoduché monobrachiální rozvětvení následuje, aneb stojí, jako pod květem *x* (čtvrtořadým), na vnitřní straně (břišní) ještě jedna jednokvětá větévka. Poněvadž hřbetní silnější větve v přeslenech všech stupňů více rovnovážně odstávají než krátké větévky *v* břišní, stává se tím, že

[1]) Wydler vyložil toto květenství ve Floře r. 1845, nepovšimnul si však veškerých podrobností, o nichž tuto zprávu podávám.

veškeré květy přece téměř v jedné ploše stojí. Dorsiventrálnost (nestejné vyvinutí hřbetní a břišní strany) jeví se dále tím zvláštním způsobem, že listeny podpůrné všech hřbetních paprsků scházejí (jsouce potlačeny neb ablastovány), kdežto pod větévkami břišními a pod malými větévkami konečného výhonku paprsků prvořadých (někdy i druhořadých) malinké, blánovité, bělavé listénky se nalézají. Pod břišními větévkami stojící listénky na paprscích prvořadých, hřbetních druho- a třetiřadých mívají po straně obyčejně zelenou, kyjovitou, na konci pohárkovitě vtisklou žlázku stipulární, jaké se zhusta též po stranách lupenů nalézají. Zvláštní a povšimnutí hodný jest úkaz, že listénky pod malými větévkami na konečném výhonku paprska vynikajícími nestojí přímo pod těmito větévkami, nýbrž o celý článek konečného výhonku níže se nalézají, jinými slovy, že větévky ty na své hlavní ose nad listen svůj podpůrný jsou pošinuty. Obr. 11 *C*, představující paprslek hlavní se silněji než v obr. 11 *B* rozvětveným konečným výhonkem, a diagram k němu v obr. 11 *D* nakreslený to vysvětlí. *DD* jsou silné dorsální paprsky druhořadé, *vv* ventrální slabší paprsky, *bb* jejich listeny podpůrné; málo výše mezi *v* a *v* na břišní i na hřbetní straně jsou listence b^1 b^1, ku kterýmž náležejí značně výše na středním výhonku sedící větévky *m* a m^1, pak následují dva vstřícné a s b^1 b^1 střídající se listénky b^2 b^3, z nichž jeden b^2 má úžlabní květ, avšak až pod květ konečný *T* nahoru pošinutý, druhý b^3 jest sterilní.

Z této analysy vysvítá náležitě povaha složitého vrcholíku. Jest to lata, ve které počet souřadných os ve všech generacích byl redukován a tudíž i osy je nesoucí skráceny. Tím, že dolejší v přeslen shloučené větve tak mohutně, hořejší (vrcholové) větévky tak seslabeně vystupují, nachází se zde rychlý přechod od oněch k těmto. Menší počet souřadných os již na hlavní ose a jich přerůstání přes hlavní osu, kteréž se opakuje ve vyšších stupních, ve kterých souřadných paprsků stále ubývá, vede přirozeně k tomu, že posléze latovité rozvětvení v brachiální přechází.

Vrcholík bezu černého měl by, jakožto květenství centrifugální ve smyslu Röper-ově, rozkvétati od středu k periferii; avšak znak ten se zde neosvědčuje. Rozkvétání jest dosti nepravidelné. Nejprve rozkvétají na silnějších hřbetních paprscích květy čtvrtého a pátého stupně, jako *x* a *y* v obr. 11 *B*, potom pokračuje rozkvétání vzhůru i dolů dle poměru mohutnosti; květy vrcholových větviček s konečným květem primárním, patrně proto, že jsou tak slabé, teprva k posledu se otevírají.

Původ vrcholíka z laty vlastní neb z kytky jest patrný, povstaltě skrácením hlavní osy, zmenšením počtu souřadných os a jich sblížením ve dva, zřídka tři, a posléze, jak uvidíme, v jediný přeslen. Není tudíž divno, že v rodech *Cornus*, *Sambucus*, *Sedum* vedle vrcholíků nacházíme u jiných druhů také ještě původnější laty neb kytky.

Dalším skrácením hlavní osy a redukcí čili nevyvinováním větviček vrcholových pod konečným květem mohou povstati přechody z vrcholíka do okolíka a posléze okolík sám. O přechodech do okolíka složitého promluvím v odstavci o tomto jednajícím, tuto popatřme toliko na přechody v jednoduchý okolík s vidlanovitě rozvětvenými paprsky. Ty vzniknou tehdy, když

hned při základních větvích redukuje se počet větviček sekundárních na dvě, takže nastane hned vidlanovité rozvětvení, a dále pak i tím, že malé vrcholkové větvičky více se nevytvoří, takže nad základními větvemi hlavní osa hned květem se ukončí. Oboje se pozoruje u *Cornus sericea* L. Ze dvou do přeslenu sblížených párů vstřícných větví základních nesou dolejší častěji sice ještě tři větve druhořadé pod svým konečným květem, leč někdy již jen dvě, představují tedy dibrachie do vyšších stupňů rovněž dvouramenně rozvětvené. Poněvadž i vrcholové větévky, pouze dvě pod květem primárním, dibrachiálně se dělí, mění se tu vrcholík v okolík ze čtyr postranních a jednoho konečného dibrachia složený. Nezřídka ale na témže kři místo konečného dibrachia pouze jeden květ uprostřed čtyr paprsků se vyvine, čímž okolík z vidlanů (dvouramenných) dovršen jest.

Porovnáme-li pak dále některé druhy rozchodníků (*Sedum*) mezi sebou, seznáme podobné přechody jednak do okolíka, jednak z kytky do vrcholíka. Tak mají na př. *Sedum telephium, purpureum* atd. pravidelnou, trochu vypouklou kytku, často s východy dibrachiálními; u *Sedum spurium* povstal velmi jednoduchý vrcholík. Osa hlavní totiž se (v obr. 7.) skrátila, dolejší silné čtyři větévky (základní) se přeslenovitě sestavily; krátkých vrcholových větviček vyvinují se již jen dvě slabé, 1—2květé. Ze základních větví rozvětvují se dvě dolejší ještě třemi nestejnými rameny, hořejší jen dvěma, a ostatní rozvětvení o dva stupně jest di- neb monobrachiální.

Nezřídka u tohoto rozchodníka malé vrcholové větvičky se nevyvinují; takový vrcholík jest ještě podobnější okolíku, pročež budiž nazván okolíkovitým na rozdíl od vrcholíka typického, v němž vrcholové větévky se nalézají. Vrcholík okolíkovitý může snadno v okolík s vidlanovitými východy přejíti, což se též u *Sedum spurium* přihází, jestliže totiž všecky čtyři paprsky pouze ve dvě ramena se dělí. (Obr. 8.) Jest to tentýž přechod, který, jak jsem výše uvedl, u *Cornus sericea* se pozoruje.

Sedum bolonienso a *S. acre* mají již jenom okolík z vidlanů ponejvíce jednoramenných; 3 neb 4 větve primární jsou tu sestaveny okolíkovitě (nejdolejší někdy pooddálena) pod konečným květem (obr. 44.), a buď veskrze ve vijany vycházejí, neb nejdolejší 1—2 se rozvětví nejprve dibrachiálně (častěji u *S. bolonienso*); vyvinou-li se jen dva vijany pod konečným květem, přejde okolík ve dvouramenný vidlan z vijanů.

Vrcholík okolíkovitý blíží se již velice složenému okolíku, od něhož se však vždy ještě značně liší nestejně mocným rozvětvením svých paprsků, jehož dle zákona laty od nejdolejšího k nejhořejšímu paprsku ubývá, a pak od vrcholíka pocházející tendencí k brachiálnímu rozvětvení netoliko ve vyšších stupních prýtů, nýbrž již na hořejších paprscích primárních; konečně i tím, že má nad paprsky svými toliko květ jeden konečný, kdežto složené botrye, na př. okolíky, buď mají botryi konečnou, neb když tato zanikla, staly se neobmezenými.

Vrcholík okolíkovitý a z něho odvozený okolík s brachiálními paprsky jest totéž květenství, které Eichler nazýval pleiochasium a které kladl do téhož typu s květenstvím vidlanovitým. Ono však náleží s kytkou a kruželem do

typu latovitého, aneb zjednodušením (redukcí) v okolík se pozměnivši, do typu hroznovitého, ačkoli snad vždycky do brachiálního rozvětvení přecházejíc a tudíž v heterotypní formě se vyskytujíc.

Také charakteristické, mnohokráte rozebírané a různě vykládané květenství pryšců *(Euphorbii)* jest vrcholík (anebo častěji redukcí z vrcholíka povstalý okolík), s paprsky dibrachiálními a posléz někdy (na př. u *Euphorbia peplus*, *helioscopia*) vijanovitými, leč nikoli z květů jednotlivých, nýbrž z malých skupin květních, tak zvaných »cyathií«. Kdyby cyathie tyto byly květy jednoduchými, za které je Payer, Baillon a j. považovali, bylo by toto květenství obyčejný vrcholík okolíkovitý. Avšak cyathie pryšců jsou zvláštní malá květenství, mezi okolíčkem a strboulkem uprostřed stojící, ve kterýchž okolo stopkatého samičího květu konečného uvnitř obalu (involucrum) zvonkovitého stojí pěticetný přeslínek stopkatých samčích květů, které však nejsou jednoduché, nybrž ze spodu brachiálně se rozvětvujíce, stažené, totiž přisedlé vijany tvoří. Cyathie jsou tudíž heterotypní květenství, nejprve obmezeně botrytického pak monobrachiálního rozvětvení.

Porovnáme-li tento vrcholík pryšců se stejnorodějším vrcholíkem bezu černého, shledáváme, že cyathie rovnají se hořenímu přeslenu pod konečným květem. Zapotřebí jen, aby větévky tohoto přeslínku, ponejvíce dibrachiálně rozvětvené, staly se sobě rovnými a monobrachiálně (vijanovitě) se rozvětvovaly, dále aby podpůrné jich listeny srostly v zvonkovité involucrum, a máme cyathium pryšců. Jinak jest rozdíl ve květenství bezu jen ještě ten, že tam vrcholové větvičky pouze na hlavních paprscích, nanejvýš ještě na sekundárních se tvoří, kdežto cyathie až do posledních stupňů rozvětvení se nalézají. Dorsiventrálnost bezu ve vrcholíku pryšců ovšem nenalézáme, ta však jest zvláštností bezového květenství, kterou i jiné vrcholíky, na př. od *Sedum spurium*, nemají.

Obr. 9. jest schema vrcholíka okolíkovitého z cyathií u *Euphorbia helioscopia*, a obr. 10. jest diagram neb půdorys téhož. Hlavních paprsků jest zde 5, každý z nich jest třípaprsečný; paprsky druhořadé rozvětvují se pod cyathiem obyčejně dvouramenně, částečně ale ještě tříramenně, neb aspoň mají tři listeny v přeslenu, z nichž vnitřní bývá často již sterilní. U některých druhů (*E. Esula* a j.) nalézají se v paždí hořeních listů lodyžních pod konečným vrcholíkem úžlabní větve, stejného neb podobného rozvětvení jak paprsky vrcholíka; skrácením článků osních hořejší z těchto větviček přistupují těsně pod paprsky a vcházejí tím ve složení samého vrcholíka, kterýž se jimi stává mnohopaprsečným.

Vrcholík pryšců má též velikou podobnost se složeným okolíkem (a skutečně okolík *Umbellifer* také povstal z podobného vrcholíka, jak brzy ukážu), přece však se ještě liší od okolíka složeného, že paprsky jeho jsou co do mohutnosti, délky a rozvětvení nestejny a že paprsky druhořadé některé často ještě 3 listeny a částečně i tři ramena z jich paždí vysýlají. U mnohých druhů pryšcových přešel však vrcholík tento jak u rozchodníků v okolík brachiálně rozvětvený (ovšem z cyathií), ježto hned prvořadé paprsky vesměs dichotomicky se rozvětvují a tím, jakož i mohutností svou úplně rovnými sobě se stávají.

Jakožto typický okolíkovitý vrcholík s konečnými květy (ne však cyathiemi) nad přesleny uvedu ještě květenství kamejky lékařské *(Lithospermum officinale)*. Statné, bujně rozvětvené lodyhy toho druhu jsou latovitě rozvětveny; dolejší hlavní větve na lodyze stojí oddáleně, mají hojnější listy a hroznovitě sestavené větévky druhořadé, na nichž zdola k hořejšku hlavní větve olistění a dílem i rozvětvenosti dle zákona laty ubývá, jelikož dolejší větévky druhořadé nejprv dvouramenně, ostatní hned jednoramenně a sice vijanovitě dále se větví. Hořejší tři větve hlavní pod konečným květem primárním jsou přeslenovitě neboli okolíkovitě sešoupnuty (obr. 12.); také na nich pozoruje se úbytek dle zákona laty, jelikož nejdolejší z nich často ještě třemi rameny, hořejší dvě již dvouramenně se dělí. Větévky jejich druhořadé, které dle postavení svého jsou silnější, dichotomují opět, načež teprva jich dvě ramena jak vijany dále se větví; které jsou slabší, ihned ve vijany se rozvětvují. Celé květenství jest tedy latovité; hořejší část z větví okolíkovitě sblížených jest vrcholík, dolejší větévky mají ráz obecné laty a rovnají se větévkám pod vrcholíkem mnohých pryšců z lodyhy vynikajícím.

Na slabších lodyhách kamejky lékařské spatřují se tři okolíkovité, též i dolejší stojící roztroušené větve ihned dvouramenné, ramena pak vijanovitě rozvětvená Celý systém rozvětvení květonosného přešel dolejší v hrozen, nahoře v okolík z vidlanů dvouramenných ve vijany přecházejících. Konečně u *Lithospermum arvense* redukováno jest květenství co nejvíce na jednoduchý okolík z vijanů, tím že dolejší hroznovité větve se zde vůbec nevyvinují a paprsky okolíka od počátku jen jedním ramenem, jakožto vijany se vyvinují.

Přehlédněme nyní souhrnem přeměny, jimiž vrcholík vznikl a dále se přeměnil. Nejprve, u *Sambucus racemosa*, *Cornus paniculata*, *Sedum telephium* nalézáme obyčejné laty neb kytky. Skrácením hlavní osy, úbytkem primárních větví, z nichž dolejší silnější v přeslen se shrnou, hořejší (vrcholové) náhle seslabené následují, povstane vrcholík, jenž se stane okolíkovitým, jestliže se ani vrcholové větvičky více netvoří, takže silné paprsky přeslenu přímo pod konečným květem vynikají. Dále z vrcholíka okolíkovitého povstane okolík z brachií, když hlavní paprsky ihned brachiálně rozvětvovati se počnou *(Sedum spurium*, *Lithospermum)*, z tohoto pak, sklesne-li počet ramen na 2, béře původ konečné dibrachium *(Sedum boloniense* a *Euphorbia Lathyris* někdy).

V historické části této rozpravy vyložil jsem rozmanité názory o vrcholíku, zejména také jsem dokázal, že květenství zde vylíčené jest pravá cyma Linné-ova dle definice i dle příkladů, od slavného původce toho jména uvedených. Jestliže později název cymy a cymosního květenství převeden byl hlavně neb výhradně na květenství vidlanovité, stalo se to neprávem a jest na čase, aby název cyma vrácen byl onomu květenství, kterému původně od Linné-a dán byl, tím více, ježto bychom jinak žádného jednoduchého názvu pro tento význačný druh květenství latovitého neměli. V praxi botanické, v popisných dílech, v květenách a p. podnes vyrozumívá se cymou (Trugdolde) toto latovité květenství, a poněvadž jest to zcela správné, musí theorie, libovolně se odchýlivší, k praxi se přizpůsobiti. Český název vrcholík, od Presl-a utvořený, hodí se také velmi dobře na tento druh květenství, jenž se větév-

kami vyšších a vyšších stupňů stále do vrcholku rozvětvuje, ačkoli Presl tak jako Bischoff vyrozumíval jím spolu též vidlan dvouramenný (»vrcholík rozsochaný«) a leccos jiného (na př. kytku s vidlanovitými východy jako u *Valerianella dentata)*, a ačkoli ovšem i vidlany se do vrcholku rozvětvují.

Braun a Ascherson považovali cymu Linné-ovu za formu podřízenou kytky, pročež ji nazývali corymbus cymiformis, Trugdoldenrispe; též Eichler byl toho mínění, a Pax květenství toto vůbec nerozeznává od kytky, jelikož květenství rodů *Sambucus* a *Viburnum* mezi kytkami uvádí. A přece má vrcholík tutéž oprávněnost jako kružel, jemuž skrácenou svou hlavní osou a rozhodným přerůstáním svých větví stojí blíže nežli kytce, od níž se též přeslenovitým sestavením základních větví více nežli kružel liší. Jedině tím se podobá vrcholík kytce, že květy celkem v jedné rovnovážné ploše stojí, což ale také na složeném okolíku *Umbellifer* vidíme.

Srovnáme-li ku konci této stati o květenstvích latovitých čtyři jejich hlavní formy vespolek, shledáme, že jednak lata a kytka stojí si blíže v tom ohledu, že mají hlavní osu prodlouženou až do vrcholku květenství, jehož postranní více méně četné osy nedosahují, neb aspoň zřejmě nepřesahují, což platí též o větvích vyšších stupňů; jednak opět vrcholík a kružel v tom se shodují, že hlavní jich osa více méně jest skrácena, a vedlejší osy, obyčejně méně četné a více méně sblížené, zvláště dolejší, vrchol její značně přesahují neb přerůstají; též větve vyšších stupňů přerůstají pokaždé svou osu mateřskou. Jinak řečeno, u dvou poslednějších mají vedlejší osy převahu nad onou částí poměrné osy hlavní, pod nížto vznikají, u prvnějších tato část poměrných os mateřských má převahu nad osami vedlejšími neb aspoň se jim co do mohutnosti a rozvětvenosti vyrovnává. Lata a kytka se v tom ohledu vyrovnávají hroznům a chocholíkům mezi inflorescencemi botrytickými i mohou proto také společným názvem laty hroznovité (thyrsus racemosus) zahrnuty býti; kdežto vrcholík a kružel sloučiti lze v názvu laty vrcholíkovité (thyrsus cymosus). Úkazem přerůstání přibližují se laty vrcholíkovité k nejmnožším vidlanům, při nichž také přerůstání velmi zhusta, třebas nikoli všeobecně, jakožto znak charakteristický se nalézá. Pro tento společný znak snadno pochopíme, že zvláště vrcholíkovité laty rády ve svých zakončeních ve vidlany přecházejí, ačkoli také laty hroznovité, ovšem že ne tak zhusta, vidlanovité východy míti mohou. Za příčinou tohoto společného znaku byly také vidlany s vrcholíky i s kruželi (Sachs) do jednoho typu kladeny, totiž oboje za vrcholíky jmíny; naproti tomu laty hroznovité nejčastěji se složenými hrozny a chocholíky pomíchávány. Že však přerůstání nemůže býti znakem společného typu, vysvítá zřejmě odtud, ježto jsou i vidlany bez přerůstání, i také botrye, a sice okolíky, i některé chocholíky, se zřejmým přerůstáním. Ve všech třech typech, které rozeznávati musíme, může tedy přerůstání hlavních os vedlejšími se objevovati. Uvnitř typu latovitého ovšem stačí tento znak k rozeznávání lat hroznovitých (nepřerůstavých) a vrcholíkovitých (přerůstavých). Nejvíce se liší vlastní lata a vrcholík, kytka a kružel jsou na přechodu a spojují blíže skupinu lat hroznovitych a vrcholíkovitých.

II. Typ hroznovitý neboli botrytický (typus botryoides).

Květenství botrytická se dělí na jednoduchá a složená; tato zas na stejnotvárně složená (homomorfní) a nestejnotvárně složená neboli heteromorfní.

1. Botrye jednoduché.

Květenství hroznovitého rozeznávají se obyčejně čtyři jednoduché formy, jak je Schleiden nejprve vytknul a odůvodnil: hrozen, klas, okolík a strboul. Ve hroznu jsou osa hlavní i osy vedlejší, květní, prodlouženy, v klasu osy květní skráceny, v okolíku osa hlavní skrácena, vedlejší prodlouženy, v strboulu obojc skráceny. Třeba však tuto řadu doplniti chocholíkem, jejž i Payer a j. za zvláštní formu uznávali. Chocholík liší se od hroznu tím, že nejdolejší vedlejší osy jeho jsou nejdelší, hoření nejkratší, tak sice, že všecky květy téměř v stejné výši stojí, kdežto ve hroznu všecky osy vedlejší jsou stejně dlouhé neb aspoň dolejší, jsou-li i něco delší, konečného květu daleko nedosahují, vůbec tedy květy v nestejných výškách stojí. Srvn. obr. 14. neb 15. (hrozen) s sedmnáctým (chocholík). Mohlo by se sice proti rozeznávání chocholíka namítnouti, že i v okolíku poměrnou délku stopek květních proměnlivou vidíme, jelikož známe okolíky ze stopek stejně dlouhých i z nestejných, vnějších delších, vnitřních kratších, jako u mnohých *Umbellifer*.

Vskutku by nebylo dosti odůvodněno, rozeznávati zvláště chocholík, kdybychom brali ohled pouze na jednoduché botrye. Ale my musíme uvažovati květenství v celku, v souvislosti. Tu pak jsme již shledali, že chocholík povstati může z kytky, přejde-li tato do typu hroznovitého, hrozen naproti tomu z laty vlastní. Jestliže tedy rozeznáváme, a to právem, latu a kytku, musíme též od sebe lišiti hrozen a chocholík. A jako kytka stojí dosti uprostřed mezi latou a vrcholíkem, tak i chocholík mezi hroznem a okolíkem, zvláště proto, že články jeho hlavní osy bývají více skráceny nežli v hroznu, jak porovnání obr. 13., 15. a 16. ukazuje. Třebas pak jednoduchý chocholík od hroznu méně jest rozdílen, vystupuje v složených jich formách rozdílnost obou mnohem patrněji. Chocholík totiž nestejnou délkou svých vedlejších os více než hrozen má ještě ráz thyrsu, pročež také ve složeném chocholíku jednotlivé chocholíčky částečné ne tak ostře jako částečné hrozny ve složitém hroznu od sebe se různí a celý chocholík složený více jednotné květenství představuje než onen, a vzezřením méně od kytky se odchyluje, nežli složený hrozen od laty. Porovnání obr. 23. s 2., pak 24. s 5., a 23. i 24. mezi sebou potvrdí vše, co zde povědíno.

Máme tedy 5 forem jednoduchých botryí, tři s více méně prodlouženými osami vedlejšími a dvě s týmiž osami zcela skrácenými, s květy tudíž přisedlými, dle tohoto vzorce:

a) Vedlejší osy prodlouženy.
1. Hrozen (racemus). 2. Chocholík (corymbus). 3. Okolík (umbella).

b) Vedlejší osy skráceny:
4. Klas (spica). 5. Strboul (capitulum).

Obr. 14.—19. představují známé tyto druhy botrytického květenství.

Tři prvnější formy odpovídají třem formám thyrsoidním, totiž latě, kytce a vrcholíku; klas a strboul jsou více odvozené formy, a patří již i proto do nejbližšího sousedství a do jedné skupiny, že jsou nejméně proti sobě ohraničeny. Známeť strbouly, na př. u komposit, štětek *(Dipsacus)*, jetelů a j., jejichž osa hlavní již dosti jest prodloužena a které toliko hustým postavením květů a tudíž skráceností článků osních tvar strboulu zachovávají.[1]) Že pak kružel z inflorescencí thyrsoidních nemá žádné zvláštní analogon mezi hroznovitými květenstvími, to se vysvětluje tím, že z kružele, přejde-li do typu botrytického, též chocholík povstává, jelikož hlavní větve jeho pak se v délce méně nestejnými a stejnovrcholnými stávají.

Strboul se svou skrácenou hlavní osou i skrácenými osami vedlejšími jest, ve fylogenetickém ohledu, nejposledněji povstalou formou květenství, hrozen a chocholík jsou botrye nejpůvodnější, poněvadž prodloužené osy ve květenství jsou původnější nežli osy skrácené. Též v latovitém květenství jsou osy všecky prodlouženy, a nejen v tomto, nýbrž i v předchozím latovitém rozvětvení vůbec, ve kterém ještě nenastala metamorfosa lupenů v listeny, jak u kuklíka (obr. 1.) jsme to viděli.

Původně jsou i botrye jako laty obmezeny, totiž hlavní osa jich květem ukončena, ačkoliv se konečný ten květ jen pořídku, v botryích chudokvětějších (obr. 14., 18.), nejčastěji však v chocholíku (obr. 17.) zachoval.[2]) Obmezené hrozny mají posud na př. *Berberis, Actaea,* okolíky vlašťovičníka *(Chelidonium)*, některé *Umbellifery* (okolíčky totiž), klasy obmezené má *Symphoricarpus*, *Luzula spicata* (částečné inflorescence), obmezené strbouly má *Adoxa*. Ve všech formách botrytických kromě potlačení konečného květu přiházívá se také někdy redukce postranních květů na 2 neb 1. Je-li botrys jednokvětá, pozná se toliko dle povahy botrye u nejbližších příbuzných, zdali povstala z hroznu neb okolíka, z klasu neb strboulu. Za jednokvětý hrozen musíme dle toho považovati květenství vikve jednokvěté *(Vicia monanthos)* a j., za jednokvětý okolík květenství od *Tetragonolobus* (které ostatně vskutku co dvoukvětý okolík variruje), jednokvěté klasy (klásky) mají mnohé trávy, jednokvěté strbouly *Echinops*, mnohé *Vernoniey*. Též listence květů obyčejně v botryích bývají redukovány, řídčeji, na př. u *Ribes*, *Symphoricarpus,* zachovalé se spatřují.

Botrye jsou tudíž rozličnými redukcemi nejvíce přeměněná nejpokročilejší květenství ze všech, naproti tomu thyrsy, zejména lata vlastní, nejpůvodnější, z čehož mimo jiné následuje, že nesluší klásti laty mezi květenství botrytická.

---

[1]) Proto nelze mimochodem řečeno. nikterak schvalovati Behrens-ův nápad jenž rozeznává květenství hroznovité a okolíkovité, počítaje k prvému hrozen a klas do druhého ale okolík a strboul.

[2]) Ovšem třeba podotknouti, že konečný květ také již dříve redukován býti mohl, nežli povstal vlastní listenatý hrozen. Tak na př. mají některé Veroniky květy v úžlabí listů na lodyze již neobmezené postaveny; u jiných příbuzných druhů přecházejí listy (lupeny) v listeny, a tím hrozen ovšem již bez konečného květu, povstává.

2. Botrye složené (Diplobotrye).

a) Stejnotvárně složené (homomorfické).

Sem náležejí složené hrozny, chocholíky, okolíky, klasy a strbouly. Ty povstaly obyčejně z lat, jejichž prvořadé osy vedlejší a konečný díl osy hlavní botryticky přeměněny jsou. Ač tedy mají původ z lat, nesmějí se s latami pomíchati; pro tento původ však jest to pochopitelno, že existují mnohé přechody od thyrsů k diplobotryím, na př. z laty vlastní do složeného hroznu, z kytky do složeného chocholíka, z vrcholíka do složeného okolíka, které však, pokud diplobotrye nejsou čistě a dokonale z nich vyvinuty, vždy ještě mezi thyrsy náležejí.

Jakožto příklad ukáži na žanyklu *(Sanicula)*, kterak povstal složitý okolík *Umbellifer. Sanicula,* jak známo, patří k oněm Okoličnatým, u kterých okolíky (neb strbouly) toliko nedokonale sestaveny jsou v okolíky složité. Jednotlivé jednoduché botrye *Saniculy* tvoří jakýs přechod z okolíka do strboulu, skládají se z přisedlých obojakých a ze stopkatých samčích květů, končí pak obyčejně květem přisedlým. Lodyha končí se takovýmto strboulkovitým okolíkem; hlavní větve její pod tímto v počtu 4—2 okolíkovitě směstnané, částečně v paždí více lupenovitých listů odděleně stojící a vesměs strboulkovitým okolíčkem končící, mají dva listence hned nad dolejškem, hned nad prostředkem (obr. 22. A.). V úžlabích listenců těch vynikají opět stopkaté okolíčky (třetího stupně), které často již zakrňují, jindy však na statnějších rostlinách náležitě se vyvinují, na své prodloužené stopce taktéž nad spodem neb uprostřed 2. listence, a někdy dokonce (jak na šumavské rostlině jsem viděl) okolíčky stopkaté čtvrtého stupně zplozují. (Obr. 22. *B.*)

Celé to květenství má velikou podobnost s květenstvím mnohých pryšců, jako *Euphorbia Esula* a j.; okolíčky zastupují tu cyathie a jsou hroznovitou přeměnou vrcholových větviček vrcholíka, kdežto spodní statné větve tvoří hlavní paprsky vrcholíkové, které se, jak u oněch pryšců paprsky pod svým sekundárním cyathiem, pod svým konečným okolíčkem dvěma rameny rozvětvují. Složený okolík jiných *Umbellifer* (obr. 20.) povstal pak patrně z takovéhoto květenství tím, že primární paprsky potratily své listence a s nimi další možnost dvouramenného rozvětvení. Květenství *Saniculy* jest přeměnou vrcholíka, jehož vrcholové větévky přetvořily se na okolíček, a tudíž i typicky složený okolík *Umbellifer* povstal z vrcholíka, t. j. z květenství thyrsoidního.

Původ svůj z latovitého květenství připomínají složité okolíky a vůbec diplobotrye často ubýváním délky paprsků a mnohosti květů v sekundárních botryích k vrcholku květenství. Botrys konečná začasté zcela se redukuje, jakož se to stává v složitých okolících.

Složené botrye mohou toliko do druhého stupně složeny býti, pravé diplobotrye. Rozvětvuje-li se totiž složitější květenství do vyšších stupňů, tu již vždycky poznenáhlý stupňovitý úbytek rozvětvenosti dle zákona laty k platnosti přichází, a botrytická přeměna děje se toliko s posledními větévkami laty. Místo hroznu neb chocholíka do třetího neb čtvrtého stupně složeného tvoří se více méně složitá lata s hroznovitými, neb kytka s chocholíkovitými zakončinami.

V přírodě tudíž nacházíme laty, složené hrozny a laty z hroznů, taktéž kytky, chocholíky složené a kytky z chocholíků. Tak na př. má *Veratrum nigrum* složený hrozen (obr. 23.), réva vinná má latu, *Veratrum album* a *Spiraea aruncus* (obr. 28.) latu z hroznů; *Chrysanthemum corymbosum* má složený chocholík (ze strboulů), *Achillea millefolium* a *Hydrangea arborescens* kytku, *Spiraea callosa* kytku z chocholíků. Tyto tři rozličné případy obyčejně se posud nerozeznávají a všecky buď jako složený hrozen neb chocholík, neb jako lata a kytka vůbec, bez rozdílu chybně za jedno se považují.

Dibotrye homomorfické dosti vzácně se vyskytují. Jako příklady složeného chocholíka uvádím *Chrysanthemum corymbosum*, hroznu složeného *Veratrum nigrum,* druhy *Yucca, Mahonia, Aconitum, Menispermum canadense* (sem tam s malou upomínkou na latu), okolíka složeného Okoličnaté, složeného klasu *Triticum, Lolium* atd., složených strboulů *Echinops,* některé *Vernoniey.*

b) Diplobotrye různotvárně složené (heteromorfické).

Rozmanitost v této skupině mohla by býti tak veliká, kolik rozličných kombinací jednoduchých forem hroznovitých býti může, ačkoli ve skutečnosti všecky kombinace se nevyskytují. Všeobecně řečeno, započíná povšechné neboli prvořadé květenství formou, jejíž osy prodlouženy jsou, kdežto květenství druhořadá neb částečná skrácené osy hlavní nebo vedlejší míti mohou. Pročež hlavní květenství prvořadé nejčastěji bývá hrozen neb chocholík. Řídkým jest úkazem, že prvořadé neb dokonce druhořadé květenství jest složeno; anebo že troje rozličné formy hroznovité společně jedno květenství pospolité skládají. Nechtěje a nemoha vyčerpávati všecku rozmanitost těchto květenství, sestavím toliko ty kombinace, které znám, aneb aspoň sobě připomínám, spolu s některými příklady:

α) Povšechné květenství hrozen, chocholík neb okolík.

Chocholík z klasů (corymbus e spicis formatus). — *Luzula campestris* a j. Chocholík má postranní osy přerůstající, a povstal zjednodušením kružele. (Obr. 26.)

Chocholík ze strboulů. — *Chrysanthemum corymbosum.* Chocholík jest tu obyčejně složený, na slabších rostlinách též jednoduchý.

Hrozen z okolíků. — *Hedera helix* (obr. 25.), *Phaseolus multiflorus.* Okolíčky poslednějšího jsou dvoukvěté, hlavní jich osa malým pupencem z listenů uzavřena.

Hrozen ze strboulů. — *Petasites.*

Hrozen z klasů (klásků). — *Brachypodium, Alopecurus agrestis,* druhové palem, ostřic. U ostřic jsou klásky samičí složené, klásky druhořadé jednokvěté.

Okolík ze strboulů. — *Cladanthus prolifer.* Okolíky ty jsou dílem jednoduché, dílem složené o nemnohých paprscích. (Obr. 27.)

β) Povšechné květenství klas neb strboul.

Klas ze strboulů. — *Typha, Sparganium minimum.* Klas u tohoto druhu někdy, u *Sparganium simplex* vždy na dolejšku přechází v hrozen, jelikož jsou pak dolejší strbouly stopkaté. U *Sparganium ramosum* jsou klasy ze strboulů opět do jednoduchého hroznu sestaveny, celé květenství jest hrozen z klasů ze strboulů.

Strboul z klasů. — *Holoschoenus* a jiné *Cyperacey.*

Též diplobotrye různotvárně složené pocházejí z thyrsů. Srovnejme na př. květenství od *Luzula campestris* (obr. 26.) s oním od *L. albida* (str. 6). Toto jest kružel, tedy květenství latovité; na vrcholku jeho hlavní osy a jeho prodloužených paprsků jest již několik jednoduchých prýtů květních botryticky seřaděno. Třeba pouze, aby (v obr. 6.) všecky vrcholové větvičky na hlavní ose a všecky větévky na prvotních paprscích staly se jednoduchými a stejnými, i obdržíme chocholík z klasů složený. To jest také pravdě podobno fylogenetický původ tohoto květenství. Klasy u *Luzula spicata* a *pediformis*, které mají totéž květenství, mají také ještě konečný květ, z původního kružele zděděný, který u *L. campestris* již vymizel (ablastoval).

Jako druhý příklad ohledejme ještě okolík ze strboulů od *Cladanthus prolifer* (obr. 27.). U této komposity vynikají hustě pod konečným strboulem 3—4 paprsky v přeslenu (někdy stojí některé níže), které buď prostě končí strboulem, anebo pod tímto opět přeslen paprsků úborem zakončených vysýlají. Všecky paprsky jsou listnaté, jest to tedy květenství ve smyslu širším (bez listenovité metamorfosy). Kdyby tuto místo strboulů byly krátké rozvětvené větvičky vrcholové (ze kterých fylogeneticky povstala botrys, tedy konečně i strboul), měli bychom před sebou vrcholík. Vskutku také Willkomm ve své Botanice uvádí květenství toto jakožto výtečnou cyma verticillata, jako u *Sambucus nigra.* Vrcholík (cyma) jest ovšem latovitý pratvar jeho, avšak botrytickou přeměnou větviček vrcholových povstala z ní dávno heteromorfní diplobotrye, totiž složený neb jednoduchý okolík ze strboulů.

Podobně možná i ostatní nestejnotvárné diplobotrye odvoditi v poslední instanci z latovitého květenství, leč příklady tyto postačí.

III. Typ vidlanovitý, rozsochatý neboli brachiální (typus brachialis).

1. Vidlany jednoduché.

Květenství, které tímto názvem míním, posud všeobecně se nazývá »cymosním« čili vrcholíkovitým. Po tom však, co jsem dříve dokázal, že totiž cyma Linné-ova jest květenství velice rozdílné a do typu latovitého příslušící, a po vymýtění tak zvaného vrcholíka víceramenného (pleiochasium) nelze více toho názvu k označení typu tuto míněného se přidržeti. Ráz tohoto typu spočívá ve vidlicovitém rozvětvení dvěma rameny neb jedním ramenem pod květem konečným, pročež typ ten latinským terminem nazývám brachiálním,

zkrátka brachium, a rozeznávám dibrachium (dichasium)[1]) a monobrachium; po česku vidlan, rozsocha, vidlanovité květenství, vidlan dvouramenný (neb vidlan v užším smyslu)[2]) a jednoramenný.

Květenství vidlanovitá badáním Al. Braun-a (a Schimper-a), pak Buchenau-a tak důkladně probrána jsou, že nic podstatně nového o nich pověděti nelze. Rozvržení rozsoch jest toto:

a) Každá osa květní se dvěma listenci plodnými po obou stranách mediány:

1. Dibrachium, vidlan dvouramenný neb vidlan v užším smyslu.

b) Každá osa květní má toliko jeden listenec plodný (monobrachium, rozsocha jednoramenná, vidlan jednoramenný), a sice:

α) po straně mediány postavený:

2. Bostryx, šroubel, 3. Cicinnus, vijan.

β) v samé mediáně postavený:

4. Drepanium, srpek, 5. Rhipidium (rhipis), vějířek.

Schemata těchto pěti způsobů vidlanovitého květenství zobrazil jsem v obr. 29.—35. Obr. 29. až 32. představují vidlany vlastní neb dvouramenné ve dvou formách, o nichž ještě dále pojednám. Nárysy jsou potud více schematické a nezcela přesné, pokudž neleží všecky osy květní a květy samy v jedné ploše; správnější představu podává půdorys neb diagram 29 *B*, na němž viděti laterální postavení obou listenců b^1 b^1 a b^2 b^2.

Rovněž i vijan a šroubel nelze v nárysu správně podati, pročež v obr. 35. *A* a *B* podány pouze diagramy. Diagram obr. 35 *A* představuje šroubel; listence 1, 2, 3 .... padají vždy na tutéž stranu (zde na levo) od mediány příslušného květu. Naproti tomu ve vijanu, obr. 35 *B* připadají listence 1, 2, 3... střídavě na levou a opět na pravou stranu od příslušné mediány.

Toliko srpek a vějířek možná schematicky správně vykresliti v nárysu, poněvadž v nich všecky osy a květy skutečně v jedné ploše, ve společné mediáně všech květů leží. V srpku obr. 34. připadají všecky plodné listence na přední stranu mediány, totiž pryč od květu mateřského a pro pozorovatele všecky na tutéž stranu (zde na pravo); naproti tomu ve vějířku obr. 33. vždy na zad v mediáně, totiž ku květu mateřskému, a pro pozorovatele střídavě jednou na pravo, jednou na levo.

---

[1]) Schimper a Braun nazvali vidlan dvouramenný dichasium; vidlanu jednoramennému pak dal Eichler analogické pojmenování monochasium, které však chybně tvořeno jest; dichasium totiž pochází od *διχάζω* (dvojím, dělím) a toto od *δίχα*, leč *μονοχάζω* neexistuje. Máme li však zapotřebí názvu brachium na místo »cyma« ve smyslu vidlanu, můžeme pohodlně odvoditi od toho dibrachium a monobrachium a tím se zbavíme nesprávného slova monochasium, jakož jsme se již zbavili rovněž nesprávného pleiochasium.

[2]) Aby se zamezilo nedorozumění, míní-li se vidlan v užším neb širším smyslu, bylo by dobře, nepřipojí-li se přídavek: jednoramenný, dvouramenný, vyrozumívati vidlanem pouze dichasium, a vidlan v širším smyslu, totiž květenství vidlanovité vůbec, nazývati rozsochou.

Co se týče vzájemného poměru vylíčených čtyř způsobů monobrachií, byl o to spor, zdali vějířek s vijanem neb se šroubelem má větší podobnost neb shodnost. Engler na př. klade vějířek k vijanu, jakožto modifikaci neb odrůdu tohoto, a sice jako odrůdu, ve které všecky osy v jednu plochu spadávají; srpek jakožto odrůdu stejným způsobem odchylnou ku šroubeli. Šroubel pak tím charakterisuje, že »postranní osy vždy na tutéž stranu spadávají«; vijan, jakožto monobrachium, ve kterémž »orientace postranních os od větévky k větévce se mění«. Eichler však se vyslovil proti tomu, aby se měl přirovnávati vějířek k vijanu a srpek k šroubeli. »Sestrojíme-li vijan, praví Eichler, ve kterém posloupné prýty silně k mediáně sešoupnuty si myslíme, a podobně i šroubel, tedy vidíme ihned, že vijan sešoupnutý nepřibližuje se k vějířku, nýbrž k srpku, sešoupnutý šroubel ale k vějířku, a postoupí-li sešoupnutí toto až do mediány, přejde vijan v srpek a šroubel ve vějířek« (Blüthendiagramme I. str. 39 obr. 20.).

Co jest tedy správnější? Smíme-li vůbec čtyři způsoby monobrachií redukovati na dva hlavní, vijan a šroubel? — a smíme-li, ku které z obou patří srpek a ku které vejířek? Jestliže posloupné prýty vijanu vždy ku předu k mediáně a posléze do mediány sešoupneme, obdržíme ovšem srpek, kdybychom je však sešoupli více na zad k mediáně mateřského květu, obdrželi bychom naopak vějířek. Sestrkování os v jednom neb druhém směru jest však libovolné a nemůže nic rozhodovati ohledně větší příbuznosti s tím neb oním brachiálním květenstvím.

Co se však Engler-ova názoru týče, jest i tento chybný, poněvadž pomíchává dvojí orientaci, jednu ohledně mediány každého květu a druhou z ohledu na pozorovatele. Ve vijanu spadávají listence střídavě na pravo a na levo od mediány, ve vějířku však vesměs na tutéž, totiž na zadní stranu v mediáně, a toliko pro pozorovatele střídavě na pravo a na levo; v srpku pro pozorovatele spadávají listeny stále na tutéž stranu, avšak ve šroubeli vidí je pozorovatel hned v pravo hned v levo, hned zas napřed aneb na zad připadati. My však nesmíme postavení listenů v monobrachiích jednou se stanoviska pozorovatele a jednou se stanoviska prýtů samých, jak se právě hodí, ustanovovati, nýbrž buďto vesměs s jednoho neb vesměs s druhého hlediště (jak analogicky též ustanovujeme dvojím způsobem směr, ve kterém úponky a lodyhy, aneb spirálky listů na lodyze se otáčejí), a tu seznáme, že vijan a vějířek, šroubel a srpek nic nemají společného, že vějířek ani s vijanem, ani se šroubelem sloučiti nelze, rovněž i srpek, že tedy musíme rozeznávati čtyři a ne toliko dva úplně různé způsoby monobrachií. Ovšem ale srpek a vějířek v tom se shodují, že listeny jejich v mediáně květní leží, tam v předu, tuto v zadu, a vijan se šroubelem mají to společné, že jich listeny stojí vždy laterálně od mediány, onde střídavě v pravo, v levo, tuto vždy po téže straně od mediány. Proto také u srpku a vějířku všecky osy květní v jedné ploše leží, u šroubele a vijanu v různých, se řežících plochách.

Toliko kde se jedná o schematický výkres neb nárys vijanu neb šroubele, můžeme tento důležitý rozdíl zanedbati, poněvadž se tyto monobrachie stěží mohou přehledně a přece přesně v jedné ploše kresliti, a můžeme nahraditi

vijan vějířkem (zaměňujíce více symbolicky střídavě opačnou orientaci prýtů ohledně mediány se střídavě opačnou orientací na též ploše pro pozorovatele), a taktéž šroubel srpkem, jakož jsem v některých obrazcích (34, 35, 37) si dovolil, musí se to však vždycky výhradně připomenouti.

Patero způsobů brachiálního květenství nerovná se však povahou svou formám květenství botrytického a thyrsoidního, neboť tyto založeny jsou hlavně na poměrech délky os (pročež je Pax zcela správně pod nadpisem »plastika květenství« uvádí); způsoby brachiálního typu však se liší počtem a postavením postranních os (ramen), tedy dle jiného dělidla než formy dvou druhých typů.

Ale i vidlany vykazují rozličnou plastiku. Abychom všecky možné formy této plastiky mohli soustavně vyčerpati, musíme na každé ose brachia rozeznávati dva oddíly, článek basální až po listen neb oba listeny a článek hoření, nad listeny stojící, květonosný, tedy stopku květnou. Jak článek basální tak i stopka květní mohou býti budto prodlouženy anebo silně skráceny neb nevyvinuty. Dle toho jsou možny a v přírodě se i vyskytují čtyři kombinace, tak jako v typu botrytickém dle vyvinutosti neb nevyvinutosti hlavní osy a vedlejších os čtyři kombinace se vyskytují.

Čtyři formy veškerých brachií jsou tyto: [1])

1. Články basální prodlouženy, stopky květní též.
2. Články basální prodlouženy, stopky květní skráceny.
3. Články basální skráceny, stopky prodlouženy.
4. Články basální skráceny, stopky květní rovněž skráceny.

Prvnější dvě formy mohou být nazývány rozsochami r o z k l a d i t ý m i (brachia effusa), druhé dvě se skrácenými články zpodními rozsochami s t a ž e n ý m i (brachia contracta, dříve cymae contractae). Připojí-li se k názvu tomu: s k v ě t y s t o p k a t ý m i neb s k v ě t y p ř i s e d l ý m i (floribus pedunculatis, floribus sessilibus), bude tvar květenství z ohledu na délky osní náležitě určen. Stažené vidlany s květy stopkatými podobají se poněkud okolíkům a mohou se tudíž nazvati o k o l í k o v i t ý m i; s květy přisedlými mají podobu strboulů a mohou se zkrátka vyrozumívati názvem rozsoch s t r b o u l o v i t ý c h (neb klubkovitých: viz níže!)

Všech pět způsobů květenství vidlanovitého může na oněch čtyrech modifikacích délky osní se objevovati, takže jest možno dvacet kombinací. Rozumí se samo sebou, že by to bylo nemírné a neprospěšné, snad i barbarské rozmnožování nomenklatury, kdyby každá kombinace zvláštní jméno obdržeti měla. Tu stačí opis neb adjektivní přídavek. Tak jest květenství obr. 29. vidlan (dvouramenný) rozkladitý s květy stopkatými, obr. 30. vidlan rozkladitý s květy přisedlými, obr. 32. jest vidlan stažený s květy stopkatými (neboli vidlan okolíkovitý). Podobně možná opsati vijan, šroubel atd.

---

[1]) Tyto 4 formy vytknul již Wydler ve Floře 1851, str 311, též Payer ve svých Éléments de botanique (1857).

Mezi botryemi jsou sice též podobně kombinované formy, totiž hrozen, okolík, klas a strboul, kterým dána byla zvláštní jména; avšak při těchto jest ten rozdíl, že jsou to formy v hroznovitém typu jediné, primární, poněvadž v typu tom takové způsoby květenství, jaké u vidlanů, dle počtu a postavení os vedlejších rozeznávati nelze. Krom toho se hrozen, klas atd. tak zhusta v rostlinstvu vyskytují, že jest výhodno míti pro ně zvláštní krátké, jednoduché názvy.

Jsouť sice i pro některé formy vidlanů zvláštní názvy v užívání, zejména vidlany stažené s květy přisedlými nazývají se častěji klubka (glomeruli); jsou-li stopky květní a články basální sice krátké, však přece znatelné, nazývá se vidlan taký svazek (fasciculus). Názvy ty ale nejsou dosti přesné, neboť i stažené laty a větve laty tímto jménem bývají označovány, tak na př. stažené laty s vidlanovitými zakončeninami u Silenkovitých *(Dianthus barbatus)*. Pročež nejlépe jest názvů těch neužívati neb nanejvýš v adjektivech k označení pouhé habituelní podoby. Tak jako se mluví o latkách neb větvích laty svazčitých neb klubkatých, tak možno mluviti i o vidlanech svazčitých neb klubkovitých.

Ještě budiž poznamenáno, že skrácení basálních článků v brachiích někdy, jako u *Labiát,* jest tak dokonalé, že jich aspoň ve stavu vyvinutém vůbec pozorovati nelze a že se zdá, jako by prýty v pravdě subordinované vedle sebe ze společného plochého podia, místo ze sebe, vynikaly. Také 3 neb 2 přisedlé samičí květy a plody v jednoduchém staženém dibrachiu uvnitř číšky kaštanu a buku zdají se souřadnými na též ploché ose; anobrž i četné plody dibrachia do vyšších stupňů rozvětveného ve mnohonásob rozeklané číšce abnormální odrůdy bukové, kteréž jsem poprvé popsal a vyobrazil, vynikají vedle sebe ze zpodu i z vnitřní stěny této číšky.

Ale ještě od jiné okolnosti, poměrné délky posloupných os se týkající, závisí tvar vidlanů, totiž od toho, zdali osy dceřiny mateřskou osu přerůstají čili nic. Již v úvodní stati jsem na to poukázal, že přerůstání není všeobecným znakem vidlanů, jak Sachs a Pax mylně za to měli. Vidlan dvouramenný v obr. 29. a 30. ukazuje přerůstání a může vidlanem přerůstavým nazván býti, avšak jsou také vidlany, ve kterýchž posloupné osy jsou stále kratší a kratší, délky mateřské osy své ani nedosahujíce. Takovýto vidlan nepřerůstavý vidíme v obr. 31., který jest zároveň rozkladitý a v rodu *Calamintha* (na př. *C. nepeta* a j.) se vyskytuje. Zvláště stažené vidlany, jako na obr. 32., samozřejmě i vidlany svazkovité a klubkovité, s květy přisedlými neb krátce stopkatými nemohou jeviti přerůstání.

Ve vidlanech jednoramenných má přerůstání neb nepřerůstání ještě jiný úkaz v zápětí. Osa přerůstající jest totiž silnější nežli díl mateřské osy nad vznikem jejím ležící (t. j. nežli stopka květní mateřského prýtu); protož je-li jediná, takže jí na straně protější žádná jiná osa souřadná nečiní protiváhu, postaví se do prodlouženého směru basálního článku osy mateřské a květní stopku této osy odkloní na stranu. To se opakuje s každou posloupnou osou přerůstající ve vidlanu jednoramenném a má za následek vytvoření sounoží neb sympodia (obr. 33. *B* a 34. *B*, *C*). Tak povstává jednoramenný vidlan

(vijan, srpek atd.) sympodiální. Sympodiální monobrachie mají vždy basální články více méně prodloužené, stopky květní pak mohou býti prodloužené neb skrácené. Ony napodobí květenství hroznovité (buď hrozen, jsou-li odkloněné květy stopkaté, anebo klas, jsou-li přisedlé), poněvadž jejich souosí jednoduchou hlavní osu botrytickou napodobí. Pro tuto podobnost dává se jim také často název lichohrozen a lichoklas.[1]) Názvy tyto jsou sice pohodlné a názorné, nestačí však, kde záleží na určitém vyznačení způsobu monobrachia, zdaliž to je vijan, šroubel atd. Pročež vědečtější jsou výrazy: hroznovitý neb klasovitý vijan, šroubel, srpek neb vějířek. (Obr. 33. *B* a 34. *B*, *C*.)

Vidlanovitá povaha lichohroznu a lichoklasu pozná se dle postavení listenů, někdy, když listeny ty pošinuty jsou, nezcela snadno; ještě více stíženo jest rozeznání od pravého hroznu a klasu, jsou-li listeny potlačeny. V tom případu jen srovnání s nepochybnými případy u příbuzných rostlin může pomoci; obyčejně také vývojem brachiální složení lichohroznu poznati možná. Přece však znám jest výstřední jeden případ, v němž postranní postavení stopek květních na sympodiu není výsledkem pozdějšího zatlačení prýtem dceřiným, nýbrž hned na počátku vývoje se objevuje. Tento případ, nejspíše známý u *Borragineí,* možná toliko fylogeneticky vysvětliti (asi tak jako úplný abortus čili potlačení), pročež zavdal těm, kteří jej pozorováním vývoje (ontogeneticky) vyložiti chtěli, příčinu k mylným náhledům a vedl ke kontroversám, o kterých jakožto odbytých jenom mimochodem se zde zmiňuji.

Jestliže ve vidlanu jednoramenném, obyčejně staženém, osy dceřiny nepřerůstají mateřské osy své, poněvadž jsou a zůstávají slabšími než tato, tedy se žádné sympodium netvoří a stopky květní zůstávají neodkloněny, každá v původním prodlouženém směru basálního článku svého. Takové nesympodiální vidlany vidíme v obr. 31. po obou stranách prostřední osy květné a můžeme je u mnohých *Labiát,* u *Moriny* a jiných rostlin nalézti.

Nejjednodušší rozsochy jsou ty, které po vytvoření os neb osy druhého stupně prýtového dále se nerozvětvují. Již v oddílu II. jsem na to kladl váhu, že takovéto jednoduché 3- neb 2květé brachie typ brachiální ještě dokonale nepředstavují, činíce přechod k botrýím, od nichž se pouze minimálním počtem (2 neb 1) os postranních, tedy jen relativně liší, a že vidlan teprvé rozvětvením do třetího a vyšších stupňů prýtových vidlanem typickým se stává; pročež jsem nedokonalým nejjednodušším brachiím dal název archibrachie. Klademe-li jednoduchost naproti větší rozvětvenosti, byly by archibrachie vidlany jednoduchými, výše rozvětvené brachie byly by složitými archibrachiemi, v témž smyslu, v jakém lišíme okolíky jednoduché od okolíků složených. Avšak mezi okolíky a vidlany dvojramennými jest ten podstatný typový rozdíl, že k ponětí okolíka a vůbec botrytického květenství patří jednoduchost co do

---

[1]) Oba tyto názvy ode mne byly stvořeny a ujaly se zvláště ve školních učebnicích. Též v německých spisech užívá se názvů Scheintraube a Scheinähre.

stupně rozvětvení, k ponětí typického vidlanu však složitost co do stupně rozvětvení. Okolík jest složený nejenom proto, že do třetího stupně prýtového se rozvětvuje, nýbrž také proto, že se okolík hlavní skládá z okolíků druhořadých (neb okolíčků). V stejném smyslu jest typický, výše rozvětvený vidlan složen z archibrachií, avšak z typických vidlanů druhořadých složen není. Vidlan, vijan, srpek atd., byť sebe výše rozvětvený, jest květenství jednoduché, což ale znamená tolik co jednotné, tak jako hrozen jednoduchý jest jednotné květenství. Také lata, ačkoli květenství složité, totiž z větví rozličných stupňů se skládající, jest jednotné a v tomto smyslu i jednoduché, poněvadž není z hroznů neb jakýchkoli jiných podřízených zvláštních květenství složené. V tomtéž smyslu jest také každý typický vidlan květenstvím jednoduchým, a tak tomu i Eichler rozuměl, když své »cymósní« květenství uvádí mezi květenstvími jednoduchými. Oprávněnost toho názoru vychází i z toho na jevo, že jsou také stejně složené vidlany tak jako botrye složené. Ve složených botryích na místě jednotlivých květů nalézáme opět jednoduché botrye, a tak i ve vidlanu složeném větve vidlanu primárního místo jednoduchým květem opět vidlanem sekundárním se končí. O těchto složených vidlanech bude řeč v následujícím odstavci.

Jakýs přechod do složených vidlanů dělají takové vidlany, které dibrachiálně začínají a monobrachiálně, nejčastěji vijanovitě, ale též srpkovitě atd., končí; což pochází odtud, že v původním dibrachiu ve vyšším některém stupni rozvětvení jeden z obou listenců jalovým se stává aneb docela se potlačí. Jest to zcela přirozené zeslabení ve vyšším stupni ze dvou souřadných větviček na jednu Zvláštní případ takového p o l o s l o ž e n é h o neb z e s l a b e n é h o vidlanu jest ten, když dvouramenné archibrachium ihned přejde v monobrachiální rozvětvení, a sice potom povstane d v o j v i j a n, jsou-li obě monobrachie vijany, d v o j š r o u b e l, d v o j s r p e k, jsou-li to šroubele, srpky atd. Dvojvijany nalézají se zhusta u *Labiát, Borragineí* a j.; dvojsrpky u *Juncus bufonius* a j. Obr. 38. představuje schematický dvojvijan (vlastně zcela přesně dvojvějířek) a obr. 37. rovněž tak dvojšroubel (přesně však dvojsrpek). Přesné schema dvojvijanu ukazuje diagram 36. B a schema dvojšroubele diagram 36. *A*.

2. V i d l a n y (r o z s o c h y) s l o ž e n é (Diplobrachie).

Zajímavější nežli dvojvidlany, o nichž ku konci předešlého odstavce zmínka se stala, jsou vidlany složené. Eichler je nazývá terminem Guillard-ovým dicymy, jejž ovšem nemohu zde pozměniti v dibrachie, poněvadž dibrachiemi něco jiného, totiž dichasie Schimper-ovy vyrozumívám. Můžeme je však vhodně nazývati d i p l o b r a c h i e m i, jako jsme složené botrye prvé označovali názvem diplobotrye.

Ve složeném vidlanu rozeznáváme vidlan hlavní, prvořadý a vidlany druhořadé, ze kterých se hlavní brachium skládá. Hlavní vidlan bývá jednoramenný (vijan neb šroubel), neb z počátku dvouramenný a pak v jednoramenný vidlan přecházeje, vidlany druhořadé však mohou býti také dvouramenné.

Vidlan složený může povstati dvojím způsobem: buďto zmohutnělým vzrůstem jedné větve původního dibrachia, anebo silným vzrůstem větévky,

která pokaždé pod brachiem původním z paždí níže stojícího listu vzniká. Příklad prvnějšího složení máme na kontryhelu *(Alchemilla vulgaris)*, příklad druhého vidíme u kakostovitých *(Geraniaceae)*.

a) Složený vidlan povstalý z dibrachia.

Obr. 41. ukazuje vrcholek lodyhy *Alchemilly*, jenž jest dibrachiálně rozvětven. Levé rameno (1) toho vidlanu však jest přeměněno ve vidlan složený, a sice tím způsobem, že při opětném dvouramenném rozvětvení tohoto ramena obě nová ramena nestejně se chovají; jedno po opětném dichotomování přechází ve vijany, t. j. tvoří dvojvijan; druhé však, pravé (2), roste mohutněji, dichotomuje opět, a opět rameno slabší tvoří dvojvijan, silnější (3) rovněž se prodlužuje a podobně se chová jak silnější rameno dřívější (2). To se opakuje vícekrát, jenže hořeji místo dvouvijanů povstávají toliko vijany jednoduché. Mohutné větve 1, 2, 3, 4 jsou na způsob šroubele vespolek sympodiálně spojeny; tak že celé to květenství označiti se musí jakožto šroubel doleji z dvojvidlanů a nahoře z vijanů prostých složený.

Zvláštní a na pohled překvapující jest, že tu vidlan mohutnějším vyvinutím vždy jednoho ramena pozbývá vzezření dibrachia a ve šroubel, tedy monobrachium, z jiných vidlanů (vijanů, dvojvijanů) složený přechází.

Podobně jako *Alchemilla* chová se dle Wydler-a [1]) *Schizanthus,* jehož květenství jest rovněž šroubel z vijanů.

b) Složený vidlan povstalý přímo z laty.

U *Geraniaceí* jest primární jednoramenný vidlan vijanem. Každý prýt, vijan ten skládající, nese nejprv 2 skoro vstřícné, nestejně veliké listy (lupeny, neb na hořejších prýtech jest jeden z nich dolejší, listenovitý) l^1 l^2, výše 2 vstřícné listeny a květ konečný. U kakostu *(Geranium pyrenaicum)* vyniká z paždí jednoho z těch listenů druhý květ (druhý listen jest sterilní) a tím jest vidlan, totiž jednoduché dvoukvěté archibrachium *a,* ukončen. (Obr. 40.) Z paždí druhého lupenu l^2 vyniká větev sympodiální, rovněž tak dvěma lupeny a na konci archibrachium tvořícím dvěma listeny posázená; a tak se stejným způsobem rozvětvení opakuje, při čemž povstává rovné vijanovité sympodium ze článků 1, 2, 3, 4.... Celé květenství, ovšem listnaté, jest vijan z archibrachií. V nejdolejší části lodyhy však mívá též i list l^1 v paždí svém květonosný prýt, jenže slabší, takže lodyha začíná nejprve dibrachiálně a teprva výše přechází ve vijan sympodiální.

U pumpavy *(Erodium cicutarium)* jest to podobné, jenže na místo dvoukvětého archibrachia jest tam hojnokvětější vijan okolíkovitý; veškeré květenství může tedy složeným vijanem slouti.

Že tento složený vidlan *Geraniaceí* povstal z chudé laty, dokazují zřejmě některé druhy rodu *Geranium,* jako *G. Robertianum,* u nichž primární vidlan sotva jest naznačen, jelikož větévky z paždí listů l^2 nejsou četné, nepřerůstají

[1]) Ve »Floře« 1866 str. 513.

a netvoří žádného sounoží. Obr. 45. představuje hořejšek květné lodyhy od *Geranium Robertianum*. Oba listy l^1 i l^2 mají v úžlabí větévku, leč větévka (2) v paždí listu l^2, ač jest silnější, avšak přece hlavní výhonek primárním květem ukončený nepřerůstá; též větévka 3 v paždí hořeního listu větévky 2 jest opět slabší a kratší než tato. Květenství právě vyložené jest patrně chudokvětá latka, z níž snadno povstane vijan z archibrachií v obr. 40, jestliže list l^1 se stane sterilním, a jestliže větévka 2 silněji se vyvinouc přeroste prýt 1, jakož zase ji samu přeroste prýt 3 atd.

Kdežto tedy u kontryhele vijan primární povstal z dibrachia, jehož jedno rameno zmohutněvší pokaždé přerůstá: jest vznik jeho u kakostů z laty, jejíž dolejší jedna větev taktéž vždy zmohutní, přeroste a tímže způsobem do vyšších stupňů se větví.

Podobně jako kakostovité chová se dle Wydler-a[1] ve květenství svém lípovitá *Sparmannia africana,* toliko že místo lupenu l zastupuje tam malá šupinka a místo archibrachia neb okolíkovitého vijanu jest tam okolíku podobné konečné květenství složitější, totiž vidlan ze dvou silně stažených dvojvijanů složený.

B. Květenství heterotypní (heterotaktická).

Dle všeobecného pravidla ubývá mnohosti prýtů souřadných i podřadných na vyšších stupních rozvětvení, a to tím více, čím vyšší stupeň. Ze tří typů jsou thyrsy v obojím ohledu nejbohatěji vyvinuty, v botryích ubylo subordinovaných, v brachiích koordinovaných prýtů až na minimum. Proto musí ve květenstvích heterotypních brachie v posledním, thyrsy v prvním stupni rozvětvení (pořadu složení) se nalézati. Latovitá květenství mohou v posledních rozvětveních vycházeti v botrye neb brachie, botrye ve brachie; ale botrye neb dokonce i brachie nemohou v posledních rozvětveních končiti latami. Přece však jsou zdánlivé výjimky z onoho všeobecného pravidla, totiž i taková květenství, která začínají na zdání brachiemi dvou- neb jednoramennými, jejichžto osy místo jednotlivého květu nesou botrye nebo thyrsy. Bližším ohledáním takovýchto heterotypních květenství nabudeme však přesvědčení, že ona odchylka od pravidla jest jenom zdánlivá.

O všech květenstvích heterotypních, poněvadž jsou složena a do vyšších (aspoň do tří) stupňů rozvětvena, možná tvrditi, že též odvozena jsou ze thyrsů působením redukcí nám již s dostatek známých.

Dle předběžného připomenutí mohou se květenství heterotypní děliti ve dvě skupiny, podle toho, zdali v nich dle pravidla ve květenstvích částečných druhořadých souřadnosti neb podřadnosti os ubývá, anebo zdali zdánlivě proti pravidlu souřadnosti os v květenství druhořadém přibývá. V prvním skupení jsou základem celého květenství, totiž květenstvím prvořadým, thyrsy neb botrye, mající četnější osy souřadné, v druhém pak jest prvořadé květenství povahy brachiální s minimálním počtem os souřadných. Prvější mají nejvíce

[1]) Ve »Floře« 1851 str. 359.

podobnosti s latami čili thyrsy, z nichž také pocházejí, a mohou tudíž nazvány býti thyrsoidy (De Candolle část jich, totiž brachiobotrye, vyrozumíval dávnějším názvem thyrsy); druhé nazval Bravais, ovšem spolu s diplobrachiemi, sarmentidy.

AA. *Thyrsoidy.*

(V prvním stupni složení jsou thyrsy neb botrye.)

1. Botryo-thyrsy.

(Thyrsy z botryí.)

Povšechné květenství prvního stupně jest thyrsus, jehožto poslední větve vycházejí v botrye. Sem náležejí:

Lata z hroznů. — *Spiraea aruncus* (velmi dokonale, obr. 28.), *Veratrum album, Hoteia japonica* (méně čistě, pořídku s přechodními větévkami 2—3květými).

Kytka z chocholíků. — *Spiraea callosa.*

Lata z okolíků. — *Aralia racemosa.*

Lata z klasů (klásků). — Trávy nejmnožší; některé palmy (*Corypha* a j.).

Lata a kytka ze strboulů. — Mnohé *Composity.*

Kružel z klasů (klásků). — Mnohé *Cyperacey.*

Kružel ze strboulů. — *Juncus lamprocarpus* a j.

2. Brachio-thyrsy.

Brachiální zakončeniny v latách jsou zjevem velice rozšířeným, přede vším ve vrcholíku, který sotva kde bez takovýchto zakončenin se spatřuje. Také tyto zakončeniny, jako vidlany vůbec, zhusta nejprve dvouramenně začínají, napotom v monobrachie přecházejíce; nezřídka též silnější větévky laty dibrachiálně, hoření slabší monobrachiálně se vyvinují. Sem náležejí:

Lata z vidlanů. — *Lychnis flos cuculi* (Lata velmi jednoduchá, téměř hroznovitá), *Dianthus barbatus* (Lata velmi jednoduchá, jak vidlany její stažená, svazkovitá), *Hypericum hirsutum* a *perforatum* (v silnějších exemplářích), *Lactuca muralis* (s rameny ve vidlanu oddálenějšími), *Erythraea Centaurium* (Lata jednoduchá, vidlany rozvětvené), *Galium mollugo* (Lata silněji rozvětvená, vidlany jednodušší). Jak ukazují příklady ze mnohých maně vybrané, vyskytuje se toto květenství v rozličných modifikacích.

Lata z vijanů. — *Heliotropium peruvianum.*

Lata ze šroubelů. — *Hypericum perforatum* (na jednodušších jedincích).

Kytka z vidlanů. — *Valerianella dentata; Sedum* sp.

Vrcholík z vidlanů. — Druhové rodů *Viburnum, Sambucus, Cornus, Sedum, Lithospermum.* (Vidlany často k posledku monobrachiální.)

Kružel ze srpků. — *Juncus bufonius* (v silnějších exemplářích. Obr. 13.)

3. Brachio-botrye. (Botrye z vidlanů.)
(Cymo-botrye Eichler-ovy.)

Též tyto jsou velmi rozmanité. Seřadím je zde dle tvaru prvořadého botrytického květenství.

a) Hrozny.

Hrozen z vidlanů. — Často se vyskytuje: *Chionanthus virginiana,* druhové rodu *Phlox, Weigelia, Ceanothus americanus, Clematis vitalba, Scrofularia nodosa,* mnohé *Labiáty* (u těchto i jinde obě ramena vidlanu zcela jednoduchého tvoří vijany, tedy dvojvijan).

Hrozen z vijanů. — *Aesculus, Echium.*

Hrozen ze šroubelů. — *Bomarea edulis.* U *Hypericum montanum* hrozen toliko v hoření části složen jest ze šroubelů, dolejí z vidlanů.

b) Chocholík.

Chocholík ze srpků. — *Juncus bufonius* (dílem, viz Buchenau l. c. obr. 18. a). Chocholík ten povstal z kružele zjednodušeného.

c) Okolíky.

Okolík z vidlanů. — *Cornus sericea* (viz str. 47), *Lithospermum officinale* (z části; vidlany přecházejí záhy ve vijany. Obr. 12.).

Okolík z vijanů. — *Sedum acre* (obr. 44.), *Lithospermum arvense, Pelargonium* (okolíky z vijanů na lodyze opět vijanovitě jsou sestaveny).

Okolík ze šroubelů. — *Bomarea stricta.*

d) Klasy.

Klas z vidlanů. — *Almus, Betula, Datisca cannabina* ♀, *Hordeum, Elymus, Leycesteria* a j.

Klas z vijanů. — *Dioscoreaceae* ♂.

e) Strbouly.

Strboul z vidlanů (archibrachií). — *Lonicera caprifolium* etc.

Strboul z vijanů. — *Armeria.*

Strboul ze šroubelů. — Druhové rodu *Allium.*

Že jsou thyrsy a botrye heterotypní povstaly z thyrsů homotypních, jako vůbec ústrojné části zrůzněné ze stejnotvárných neb nezrůzněných, samo sebou v zásadě nebude popíráno. Vskutku máme také k tomu dosti dokladů, totiž přechodů; tak na př. lata z hroznů u *Hoteja* není ještě dokonale z typické laty přeměněna, jelikož tu a tam mezi konečným hroznem hlavní osy a hlavních větví jejích a mezi hrozny postranními přechodní větvičky 2—3květé (archibrachie) se vyskytují. Kružel ze strboulů, jenž jest vlastní druhům sítin z příbuzenstva od *Juncus lamprocarpus,* povstal nepochybně z kružele homotypního. V tomto již někdy, jako u *Luzula albida,* nalézá se několik jedno-

tlivých květů na konci hlavní osy a hlavních větví poněkud shloučených; třeba jen, aby stopky těchto květů docela se skrátily, listenců pozbyly, a květ konečný aby všude ablastoval, i povstane z každé takové skupiny strboulek neobmezený jak u *Juncus lamprocarpus*.

Že též hroznovité květenství z vidlanů (brachiobotrye) z latovitého květenství a sice z vrcholíka povstati může, toho příklad seznali jsme (viz str. 49.) na okolíku z vidlanů neb vijanů v rodu *Lithospermum* (obr. 12.), neb na okolíku z vijanů u *Sedum acre* a *boloniense* (obr. 44.). I k tomu bylo již dříve poukázáno, jak chocholík ze srpků u *Juncus bufonius* povstává ze kružele srpkonosného, a tento z typického zase kružele redukován býti může. Dále i hrozny z vidlanů a vijanů u *Sapindaceí* (*Aesculus* atd) poukazují nazpět na laty typické, které se posud zachovaly u javorovitých *(Acerineí)*, s oněmi nejblíže příbuzných a začasté s nimi i spojovaných.

BB. *Sarmentidy*.

(V prvním stupni složení jsou brachie.)

Tato zcela zvláštní květenství mají velkou podobnost se složenými vidlany. Jak u těchto místo jednotlivých květů vidlanu prvořadého nalézáme celá květenství a sice opět vidlany, tak ve květenstvích, o kteráž právě běží, místo jednotlivých květů prvořadého vidlanu buďto thyrsy neb botrye jsou vyvinuty. Tato květenství jeví zvláště velkou příbuznost s oněmi diplobrachiemi, které jako u kakostovitých povstaly z laty prodloužením a zmohutněním dolejší jedné větve.

Dvě kategorie sarmentid jsou možny, dle toho, jsou-li v druhém stupni thyrsy nebo botrye vyvinuty.

1. Thyrso-brachie. (Vidlany z thyrsů.)

Tohoto složení znám toliko dva případy, totiž vijan z latek u *Ampelopsis quinquefolia* (obr. 42.) a srpek z kruželů u *Luzula purpurea*. Hlavní osa celého květenství od *Ampelopsis* končí malou latkou z nemnohých 1- až 3květých větviček (tedy z části z archibrachií). Nejdolejší, více oddálená větev hlavní vyvinuje se silněji, tak silně jako hlavní osa sama, a rozvětvuje se podobně, nesouc na konci opět latku a pod ní silnější větev, která se též tak větví, což se tímtéž způsobem opakovati může. Silné nejdolejší větve všech stupňů, 1, 2, 3, 4 . . ., pojí se jedna k druhé dle zákona vijanu, tvoří tedy také vijan, jehož posloupné osy latami se končí.

Na všech posloupných osách 1, 2, 3, 4 . . ., jest tudíž vždy nejdolejší větev nejsilněji vyvinuta a rozvětvena, dle všeobecného zákona, od něhož tuto v pravdě není výjimky. Zvláštnost záleží toliko v tom, že nejdolejší větev každého stupně až příliš silně se vyvinuje a opětně rozvětvuje. Jest to jen zdánlivé, jako by primární rozvětvení bylo monobrachiální a vzdálenější rozvětvení thyrsoidní; vskutku však jest celé květenství lata, jejíž nejdolejší větve všech stupňů jsou nad obyčej silně vyvinuty a dle fyllotaktického zákona jednoduchého vijanu

k sobě postaveny a tudíž vijanovitě spojeny. Květenství od *Ampelopsis* tudíž také nepovstalo snad z původního vijanu, jehož osy by se byly pod konečným květem latovitě rozvětvily, nýbrž má svůj původ v typické latě.

Tuto původní latu ještě nacházíme u révy vinné *(Vitis vinifera)*, částečně též s dibrachiálními zakončeninami; nejdolejší větev jest i tam nejsilnější, přece však ne tak nemírně a přerůstavě vyvinuta a též pravidelně latovitě rozvětvena. Jak známo, může se lata révy přeměniti v úponku a přechody do úponky tvořiti. To se děje tím způsobem. že se též u révy nejdolejší hlavní větev laty prodlouží, avšak květy na vrcholku svém až na několik malých rudimentů listenových redukuje, vzdáleně od vrcholku silnou větev jako úponkovou větévku vysýlajíc. Jestliže i na hlavní ose lata květní se podobně zredukuje, nabude i tato osa úponkovitého tvaru, a tím se celé květenství v úponku vijanovitě rozvětvenou přemění. Vskutku nejsou úponky dle původu svého nic jiného než přeměněná květenství; pročež není správné, praví-li se právě naopak, že jsou květenství z úponek metamorfována.

U révy jsou úponky pouze jednou neb dvakrát rozděleny, protože květenství révy jest lata typická; úponky od *Ampelopsis* však mají větší počet posloupných os, poněvadž také již ve květenství samém vijanovité rozvětvení do vyšších stupňů se jeví.

Vijan latnatý od *Ampelopsis* má také velkou příbuznost s vrcholíkem, neboť vrcholík též povstal z laty prodloužením a mohutnějším vyvinutím doleních větví; jen že jest ve vrcholíku těch větví více, do přeslenu sestavených, kdežto u loubince jest v každém stupni toliko jedna větev tak prodloužena. Vijan z lat byl by tedy mohl také povstati z vrcholíka redukcí hlavních jeho paprsků na jediný.

Druhý případ thyrsobrachie, a sice srpek z kruželů, jest mi znám u kanárské *Luzula purpurea*, jejíž květenství vyobrazil Buchenau (l. c. Fig. 24.). Původní květenství jest kružel, jehožto nejdolejší větev tak silně se vyvinuje, že odkloňuje hlavní osu primárního kružele pod pravým úhlem na stranu, sama v prodloužený směr osy lodyžní se stavíc. Tato větev opět tvoří kružel o něco slabší, jehožto nejdolejší větev tak jako primární větev se chová, což se ještě asi dvakrát opakuje. Nejdolejší větve všech stupňů dohromady tvoří sympodiální srpek a končí každá kruželem, ovšem čím dále tím slabším. Jest tedy i toto květenství původní svou povahou latovité, a sice kružel, jehož nejdolejší větve prvo-, druho-, třetiřadé atd. srpkovitě jsou spojeny v sympodium

2. Botryo-brachie. (Vidlany z botryí.)
(Botryo-cymy Eichler-ovy.)

Tento způsob květenství heterotypně vzestupujícího mnohem častěji a v rozmanitějších kombinacích se spatřuje. Sem patří:

Vidlany ze strboulů. — Některé *Amarantacey, Composity, Dipsacey, Sanicula.* Ve vyšších stupních rozvětvení vrcholíka neb heterotypního okolíka *Euphorbií* též nalézáme vidlany z okolíkovitých strboulů, které se

opět z vijanů samčích květů (z cyathií) skládají, o kterých výše na str. 48 obšírněji jsem promluvil.

Vijany z hroznů. — *Phytolacca, Rivina, Fumaria,* některé *Cruciferae.*

Vijany z okolíků. — *Bowlesia, Chelidonium, Geranium anemonefolium.* Složené okolíky ve vijan na lodyze sestavené mají některé *Umbellifery: Anthriscus, Oenanthe* atd.

Vijany ze strboulů. — U *Vernoniacací*; tyto vijany bývají zase okolíkovitě neb hroznovitě sestaveny. *Pelargonium* má vijanovitě sestavené okolíkovité strbouly ze šroubelů kolem stopkatého konečného květu, tyto strbouly jsou tudíž podobně jako cyathie *Euphorbií* složeny.

Šroubele z okolíků. — *Caucalis nodiflora* a jiné Okoličnaté.

Šroubele ze strboulů. — *Cichorium* a jiné *Composity.* Šroubele ty chudokvěté jsou na lodyze latovitě rozvětvené v paždí listů postaveny.

Srpky ze strboulů. — V kruželi druhů některých sítin *(Juncus obtusiflorus)* nalézají se v posledních stupních rozvětvení (obr. 43.).

Posléze jmenovaný případ, srpek ze strboulů, vykreslen v obr. 43. Také on má původ z latovitého květenství, totiž z kružele nebo části kružele, ve kterém hoření díl, totiž větvičky vrcholové, botryticky jsou redukovány, a z dolejších prodloužených větví v každém stupni rozvětvení pozůstal pouze jeden, kterýž se tímtéž způsobem dále větví.

Brachie z thyrsů a z botryí, tak jako již diplobrachie z latek povstalé, nejsou brachie v přísném slova smyslu, neboť posloupné generace jejich prýtů nejsou redukovány na 2 neb 1 prýt vůbec, nýbrž toliko na 2 neb 1 prodlouženou silnou a přerůstající větev dolejší; jsou to tedy vesměs přeměněné a redukované thyrsy, jejichž nejdolejší větve různých stupňů dle zákona brachií jsou spojeny. Již Eichler poznamenal o těchto květenstvích, která Bravais nazval sarmentidy, že se jimi dokazuje příbuznost »cym« (t. j. brachií) s botrytickými (vlastně latovitými) útvary. Jakého způsobu tato příbuznost jest, totiž, že na genetickém původu sarmentid z lat, jakožto pratvaru všeho květenství spočívá, dokázal jsem na jednotlivých příkladech. Redukcí latek a obmezených hroznů v těchto sarmentidách obsažených na jednotlivý květ musila by ovšem květenství ta přejíti v pravé jednoduché brachie. Ovšem že redukce toho druhu nebyla ještě nikdy pozorována.

Výklad obrazců.

Obrazce jsou z největší části schematické; kolečka neb elipsy značí květy.

Tab. I.

Obr. 1. Květonosná latovitě rozvětvená lodyha kuklíka *(Geum urbanum)*.

» 2. Lata složitější, do 5ho stupně prýtů rozvětvená.

» 3. Latka nejjednodušší.

» 4. Lata hroznovitá, t. j. na přechodu do složeného hroznu u ptačího zobu *(Ligustrum vulgare)*.

» 5. Kytka.

» 6. Kružel sítiny *(Juncus)* neb biky *(Luzula*, na př. *albida)*.

» 7. Vrcholík jednoduchý od *Sedum spurium;* větvičky vrcholové pouze dvě.

» 8. Okolík heterotypní s paprsky veskrze vidlanovitými, povstalý z vrcholíka u téhož *Sedum spurium*.

» 9. Vrcholík okolíkovitý z cyathií u *Euphorbia helioscopia;* pouze jeden z 5 primárních paprsků jest ve výkresu proveden.

» 10. Diagram téhož květenství; 1—5 značí pořádek, ve kterém podpůrné lístky vrcholíka a jich úžlabní paprsky po sobě jdou.

Tab. II.

Obr. 11. Vrcholík bezu černého *(Sambucus nigra);* a sice:

11 *A*. Vrcholík v celku; vrcholové větvičky pod konečným květem jsou provedeny; čtyři hlavní paprsky v přeslenu toliko v zpodní části naznačeny; z paprsků těch stojí 2 (I, I) níže, 2 (II, II) výše, přeslen se tedy ze dvou dvojčetných silně sblížených přeslenů skládá; podobně přeslínek vrcholových větviček z přeslínků dvou, totiž III, III a IV, IV.

11 *B*. Jeden hlavní paprslek z přeslenu II, úplně provedený; *t* květ jeho konečný, *x y* květy vyšších pořadů, které nejprve rozkvétají.

11 *C.* Hlavní paprslek z druhého přeslenu II z jiného vrcholíka, bohatěji rozvětvený. Silné hřbetní (dorsální) paprsky jeho *D D* pouze naznačeny; *v v* břišní (ventrální) větvičky vidlovitě rozvětvené, *b b* jejich podpůrné listeny s kyjovitými žlázkami po straně. b^1 podpůrný listen větvičky mediánní *m*; m^1 druhá zadní větvička mediánní; b^2 podpůrný listen výše nad ním stojícího květu *K*; b^3 listen onomu vstřícný, prázdný; *T* květ konečný.

11 *D.* Diagram téhož paprsku; písmena značí totéž.

Obr. 12. Okolíkovitý vrcholík od *Lithospermum officinale;* všecky větve zakončeny vijany, které však jsou v skutečnosti mnohem hojnokvětější.

» 13. Kružel, jehož větve vesměs jsou zakončeny srpky, od *Juncus bufonius.*

» 14. Hrozen ukončený květem čili obmezený.

» 15. Hrozen neobmezený.

» 16. Klas.

» 17. Chocholík.

» 18. Okolík obmezený.

» 19. Strboul.

» 20. Okolík složený, okolíčkem zakončený.

Tab. III.

Obr. 21. Okolík složený od *Aegopodium podagraria;* konečný okolíček byl mimořádně vyvinut; jeho osa nese v prostředku jeden, listenem podepřený okolíček a pod okolíčkem konečným ještě 2 okolíčky. Listeny čili lístky obalné jsou jak obyčejně u toho druhu potlačeny.

» 22. *A.* Nedokonalý složený okolík od *Sanicula europaea;* okolíčky jsou spíše strboulkovité; hlavní osa prodloužená končí sama okolíčkem; hlavní paprsky jsou vidlanovitě rozvětveny.

B. Jeden paprslek z bohatějšího okolíku též rostliny, dvakrát dibrachiálně rozvětvený.

» 23. Hrozen složený kýchavice černé *(Veratrum nigrum).*

» 24. Chocholík složený.

» 25. Hrozen z okolíků u břečtanu *(Hedera helix).*

» 26. Přerostlý chocholík z klasů u *Luzula campestris.*

» 27. Složený okolík ze strboulů u *Cladanthus prolifer.*

» 28. Hoření díl laty z hroznů od *Spiraea aruncus;* v dolejším díle laty jde rozvětvení až po hrozny čtvrtého pořadu.

» 29. *A.* Vidlan dvouramenný, přerůstavý, rozkladitý s květy stopkatými; *b* b_1 b_2 listeny posloupných generací prýtových.

B. Diagram k tomu, z něhož se pozná pravé vzájemné postavení všech květů.

» 30. Vidlan přerůstavý, rozkladitý s květy přisedlými.

» 31. Vidlan nepřerůstavý, rozkladitý.

Tab. IV.

Obr. 32. Vidlan nepřerůstavý, stažený, okolíkovitý.

» 33. *A.* Vějířek se souosím lomeným.
B. Vějířek se souosím narovnaným, hroznovitý.
C. Diagram téhož; čísla značí posloupné květy a jich listeny.

» 34. *A.* Srpek se souosím lomeným.
B. Srpek se souosím narovnaným, hroznovitý.
C. Srpek se souosím narovnaným, klasovitý.
D. Diagram srpku; čísla jak prvé.

» 35. *A.* Diagram šroubele.
B. Diagram vijanu.

» 36. *A.* Diagram dvojšroubele.
B. Diagram dvojvijanu.

» 37. Dvojsrpek; symbolicky může také značiti dvojšroubel, myslíme-li si posloupné květy, kreslené v jedné ploše, náležitě z plochy této vystouplé.

» 38. Dvojvějířek; symbolicky může každý vějířek také zde i v některých následujících obrazcích značiti vijan, s touže podmínkou.

» 39. Vijan z vijanů (symbolicky jak prvé jsou zde vijany zastoupeny vějířky) čili vijan složený; u *Erodium cicutarium.*

» 40. Vijan (vějířkem představený) z jednoramenných archibrachií *a* od *Geranium pyrenaicum;* 1, 2, 3 .... po sobě jdoucí generace prýtů, jimiž souosí primárního vijanu tvořeno, l^1 l^2 první, druhý list každého prýtu.

» 41. Květenství kontryhelu *(Alchemilla vulgaris);* dvouramenný to vidlan, jehož levé rameno přeměněno ve šroubel (se souosím 1, 2, 3 ....), doleji z dvojvijanů, hořeji z vijanů jednoduchých složený.

» 42. Květenství loubince *(Ampelopsis quinquefolia):* vijan, jehož souosí tvořeno prýty 1, 2, 3, 4 ..., složený z latek parciálních.

» 43. Srpek ze strboulků z květenství kruželového sítiny *Juncus obtusiflorus.*

» 44. Okolík tříramenný z vijanů rozchodníku ostrého *(Sedum acre).*

» 45. Květenství od *Geranium Robertianum;* 1, 2, 3 posloupné prýty, vijanovitě spojené, l^1 a l^2 první a druhý list prýtu (dle Eichler-a).

Résumé.

Theorie der Blüthenstände

auf deductiver (vergleichend-phylogenetischer) Grundlage.

Die Lehre von den Blüthenständen, wie sie von den neuesten Autoren (Eichler, dem die meisten folgen) tradirt wird, ist in mehrfacher Hinsicht mangelhaft. Buchenau,[1]) der sich um diese Lehre durch seine Untersuchungen über die Blüthenstände der *Juncaceen* und durch die Aufstellung der Fächel und Sichel sehr verdient gemacht hat, findet neuestens den Hauptfehler in dem Gebrauche der Hauptwörter für die einzelnen Blüthenstandsformen und empfiehlt dringend Eigenschaftswörter zu deren Bezeichnung, also statt Traube, Ähre — traubiger, ähriger, resp. auch traubenähnlicher, ährenähnlicher Blüthenstand. Da er aber die ganze Eintheilung und die Begriffsbestimmungen von Eichler wesentlich beibehält, so wird damit keine sachliche Besserung erreicht. Die Fehler liegen nicht in der formellen Behandlung, sondern in folgenden weit sachlicheren Punkten.

1. Alle Autoren von Röper an, mit Ausnahme von Al. Braun und Wydler, statuiren zwei Hauptclassen oder Typen der Blüthenstände, nämlich die botrytischen (racemösen) und die cymösen. Es existirt aber noch ein dritter, jenen gleichwerthiger Typus, der der rispigen (oder thyrsoiden) Blüthenstände. Die Rispe ist zuerst von de Candolle, Payer, dann auch von Eichler, Engler u. s. w. als eigener wohlcharakterisirter Blüthenstand gänzlich gestrichen worden, sie ist aber nicht nur ein solcher, sondern sogar der Hauptrepräsentant eines eigenen Typus. Al. Braun hat (nach der Darstellung von Ascherson, 1864) zwar zunächst auch nur zwei primäre Gruppen unterschieden, erstens die trugdoldigen Inflorescenzen, dann aber eine zweite Gruppe, der er keinen Namen gab und die er sofort in zwei Untergruppen, die der ährigen und rispigen Blüthenstände zerlegte. Thatsächlich hat er also doch die 3 obengenannten Gruppen aufgestellt. In der Gruppe der rispigen Blüthenstände unterschied er: 1. die eigentliche Rispe, 2. die Doldenrispe (Schirmrispe) mit einer Unterart, der Trugdoldenrispe, und 3. die Spirre. Noch treffender theilte

[1]) Buchenau: Zwei Abschnitte aus der Praxis des botanischen Unterrichts. Bremen 1890.

Wydler (schon 1851) die Blüthenstände unmittelbar in 3 Gruppen ein, in die ährigen, rispigen und gabeligen oder dichotomen Blüthenstände (letztere den cymösen Braun's gleichwerthig). Diese sehr richtige Eintheilung hat aber den Beifall der Botaniker leider nicht gefunden. Nur Pax hat 1890 die Rispe wenigstens wieder als eigene Blüthenstandsform anerkannt, aber neben der Botrys (= den ährigen Blüthenständen Braun's) dem botrytischen Typus eingeordnet und hiermit die Auffassung Al. Braun's adoptirt. Er leitet überdies ganz richtig die Botrys von der Rispe als der ursprünglicheren Form ab.

2. Der zweite Mangel der herrschenden Auffassungsweise ist der, dass die Gruppe der cymösen Blüthenstände gegen die der botrytischen nicht richtig abgegrenzt und unzureichend definirt wird. Eichler, dem auch hierin fast alle Neueren folgen, begreift unter den cymösen Blüthenständen das Pleiochasium, das Dichasium und das Monochasium. Das Pleiochasium unterscheidet sich aber in nichts von einer begrenzten armstrahligen Dolde (resp. einer doldenartigen Rispe), gehört also zu den botrytischen (resp. rispigen) Blüthenständen. Wenn es trotzdem auch den cymösen Blüthenständen beigezählt wird, so ist das ein grober Verstoss gegen alle Eintheilungslogik. Das Pleiochasium als cymöser Blüthenstand ist einfach zu streichen und es bleiben in der »cymösen« Gruppe nur die Dichasien und Monochasien, d. h. nur die gabeligen oder dichotomen Blüthenstände, wie sie Wydler genannt hat. Auch Al. Braun hat in seiner cymösen Gruppe nur das Dichasium, die Wickel und die Schraubel, und bereits Payer (1857) führt nur die Cyma bipara und unipara (zu denen auch seine Cyma contracta als blosse Modification gehört) auf. Wenn aber die cymöse Gruppe nur auf die dichotomen Blüthenstände eingeschränkt wird, so darf sie den Namen cymös nicht weiter führen. Die Cyma ist von Linné aufgestellt worden, der darunter den Blüthenstand von *Sambucus*-, *Viburnum*- und *Cornus*-arten, also einen rispigen Blüthenstand, die Trugdoldenrispe Braun's, höchstens noch eine heterotaktische Dolde mit gabeligen Endigungen *(Ophiorrhiza)*, keineswegs aber eine gabelige Inflorescenz verstand. Daher muss der Name Cyma, Trugdolde, der Trugdoldenrispe verbleiben.[1]) Ich nenne die gabeligen Blüthenstände auch brachiale Blüthenstände oder Brachien (inflorescentia brachialis oder brachiata, brachium), wozu das Dibrachium (Dichasium, zweiarmige Gabel oder Gabel schlechthin) und die Monobrachien (statt des sprachwidrig gebildeten Monochasium, einarmige Gabel) gehören.

Die gangbarste Definition der »cymösen« Blüthenstände lautet: Die Zahl der Seitenachsen an einer Hauptachse ist bestimmt; bei den botrytischen aber ist sie unbestimmt. Diese Definition, welche zuerst Payer aufstellte, Eichler beibehielt, ist aber selbst sehr unbestimmt. *Caucalis daucoides* hat eine meist 3strahlige Dolde, *Euphorbia falcata* ein 3strahliges Pleiochasium; wie kann die Zahl drei einmal bestimmt, einmal unbestimmt heissen? Hofmeister und Sachs legten wiederum ein besonderes Gewicht auf die Übergipfelung der

[1]) Die Phytographen und Floristen, z. B. Döll, Garcke, nennen die Trugdoldenrispe noch jetzt vielfach Trugdolde oder Scheindolde, unbekümmert um die Theorien der Lehrbücher, und sind damit vollkommen im Rechte.

Endblüthe durch die subfloralen Seitenzweige, als Hauptcharakter der cymösen Blüthenstände, Sachs rechnet deshalb auch die Spirre zu denselben. Auch dieses Merkmal ist nicht durchgreifend und nicht wesentlich; es giebt, z. B. bei den *Labiaten*, gabelige, also »cymöse« Blüthenstände ohne Übergipfelung, dagegen findet bei der botrytischen Dolde ausgezeichnete Übergipfelung statt, mag die Hauptachse unbegrenzt oder mit einer kurzgestielten Blüthe (oder Döldchen), wie bei manchen *Umbelliferen*, begrenzt sein. Wesentlicher ist das von Braun hervorgehobene Merkmal, dass bei den Botryen die Nebenachsen ihrer Hauptachse ungleichwerthig, bei den »Cymen« (d. h. Brachien) gleichwerthig sind, aber für die zusammengesetzten Botryen trifft dies nicht völlig zu, ausserdem ist dies nur eine Folgeerscheinung einer wesentlicheren, nicht hervorgehobenen Verschiedenheit, welche vor Allem klargestellt werden muss.

3. Die bisher in der Lehre von den Blüthenständen befolgte Methode besteht darin, dass man bald dieses, bald jenes Merkmal hervorhob, um danach zwei der Anschauung sich darbietende Typen genauer zu bestimmen, welche ganz unvermittelt neben einander, ja einander fremd gegenüber stehen. Selbst bei Braun und Wydler ist es nicht anders, nur dass noch ein dritter Typus ebenso beziehungslos dazu kommt; die richtige Methode muss aber die Rispen oder Thyrsen als allgemeinsten, ursprünglichen Blüthenstand anerkennen, aus welchem durch verschiedene Reductionen logisch und, theilweise wenigstens, auch phylogenetisch einerseits die Botryen, anderseits die Brachien abzuleiten sind. Damit soll indess nicht geleugnet werden, dass Botryen und Brachien auch ursprünglich entstanden sein können, wodurch aber das faktische Verhältniss zu den Rispen nicht geändert wird.

In den Thyrsen ist die Zahl der subordinirten Blüthensprossgenerationen und der auf gemeinsamer Achse coordinirten Sprosse unbestimmt und unbegrenzt, doch immer grösser als 2, und den Bau des Ganzen beherrscht das Gesetz, nach welchem die Zahl der coordinirten Sprosse und der Verzweigungsgrad zum Gipfel (manchmal auch zur Basis) stufenweise abnimmt. Setzt man die grösste Zahl der Sprossgenerationen gleich m, die grösste Zahl der coordinirten Sprosse gleich n. beide grösser als 2, so ist der Thyrsus mit dem Verhältniss $m : n$ oder $\frac{m}{n}$ zu charakterisiren. Es folgt aus dem Gesetz der Gesammtverzweigung der Rispen, dass sowohl die coordinirten Sprosse unter sich, als auch ihrem relativen Hauptsprosse, als auch die consecutiven Sprossgenerationen unter sich ungleichwerthig sein müssen. Die Entwickelung des Thyrsus (nicht etwa nur die Aufblühfolge) ist theilweise, betreffend die coordinirten Blüthensprosse, centripetal oder acropetal, theilweise, die consecutiven Sprossgenerationen betreffend, centrifugal.

Die botrytischen Blüthenstände oder Botryen entstehen aus den Rispen, wenn die Zahl der Sprossgenerationen auf ein Minimum, d. h. auf 2, nämlich auf die Hauptachse und deren Seitenachsen beschränkt oder reducirt wird. Die Botrys wird noch vollkommener, wenn die Primanblüthe unterdrückt wird, so dass nur eine Generation von Blüthensprossen übrig bleibt; dann sind alle Blüthensprosse coordinirt, keine sind einander subordinirt. Die Zahl der

coordinirten Blüthensprosse ist wie in den Rispen unbestimmt und unbegrenzt, grösser als 2 (wieder $= n$ zu setzen), nur durch nachträgliche phylogenetische Reduction kann eine ursprünglich reichblüthigere Botrys 2—1blüthig werden (manche *Vicien* etc.). Das Verhältniss der Blüthengenerationen zur Zahl der coordinirten Seitensprosse ist $2 : n$ oder $1 : n$, oder auch $\frac{2}{n}$ oder $\frac{1}{n}$, welches ein echter Bruch ist, der um so kleiner wird, je reichblüthiger die Botrys sich bildet. Die coordinirten Blüthensprosse sind einander gleichwerthig geworden, bleiben aber der Hauptachse ungleichwerthig; durch Reduction ihrer Vorblätter steigert sich diese Ungleichwerthigkeit noch mehr. Die Entwickelung des ganzen Blüthenstandes ist rein centripetal oder acropetal.

In den brachialen oder gabeligen Blüthenständen finden wir die entgegengesetzte Reduction, wenn wir sie mit den Thyrsen vergleichen oder aus diesen ableiten wollen. Hier sind wiederum die coordinirten Sprosse jeder Generation auf ein Minimum von 2 und schliesslich von 1 beschränkt (resp. reducirt), d. h. die Coordination ist minimal, zwischen bloss 2 Blüthensprossen bestehend, oder sie ist gar nicht vorhanden, indem alle Blüthensprosse subordinirt sind und verschiedenen nachfolgenden Generationen angehören. Die Zahl dieser Generationen ist, wie in den Rispen, unbestimmt und unbegrenzt, gleich m, typisch grösser als 2; der Verhältnissbruch für die Brachien ist also $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m}{1}$, ein unechter Bruch, der um so grösser wird, je reichblüthiger das Brachium sich entwickelt. Das Charakteristische der »Cymen« im Sinne Braun's und so vieler Autoren, d. h. der Brachien, besteht also nicht bloss darin, dass die Zahl der coordinirten Seitenachsen »bestimmt«, d. h. auf ein bestimmtes Minimum 2 oder 1 begrenzt ist, sondern auch darin, dass die Zahl der Sprossgenerationen unbestimmt gross, jedoch grösser als 2 ist. Aus diesem Baue der Brachien ergiebt sich ferner, dass alle Blüthensprosse, sowohl die subordinirten, als auch eventuell die 2 coordinirten einander gleichwerthig oder gleichartig sein müssen. Die Entwickelung erfolgt centrifugal.

Ein sehr einfacher 2—3blüthiger Blüthenstand, der aus einer Hauptachse und 1—2 Nebenachsen ersten Grades besteht, ist nach der soeben entwickelten und wohlbegründeten Definition des brachialen Typus von diesem letzteren ausgeschlossen. In der That ist es ein an und für sich unbestimmter, unentschiedener Blüthenstand, der gleichsam die Grenze zwischen Brachien und Botryen bildet. Er kann als Bestandtheil eines Thyrsus auftreten (wie in Fig. 2, 4) und ist dann als unselbständig nicht weiter zu beachten; er kann aber auch als besondere ganze kleine Inflorescenz oder als Partialinflorescenz in einem heterotaktischen Blüthenstande auftreten. Wenn sich nachweisen lässt, dass er aus einer typischen Botrys durch weitergehende Reduction hervorging (*Vicia monanthos*, schwächliche, 2—3blüthige begrenzte Seitenträubchen von *Actaea spicata*), so gehört er als atypische Form zu den Botryen; wenn dies aber nicht der Fall ist, wenn er entweder aus einem typischen Brachium reducirt oder nach sonstiger Verwandtschaft als einfachster, gleichsam embryonaler Ansatz zu einem solchen anzusehen ist (wie bei *Lonicera, Fagus, Castanea* ♀,

Silenen), so wird man ihn als atypische Form den Brachien anreihen. Um ihn jedoch auch in diesem Falle von den typischen Brachien zu unterscheiden, nenne ich ihn Archibrachium, welches nun ebenfalls 2- oder 1armig sein kann und durch Ablast der Terminalblüthe sogar wie eine Botrys *(Lonicera*-Arten, *Fagus)* unbegrenzt werden kann. Ein zweiarmiges Archibrachium hat den Verhältnissbruch $\frac{2}{2} = 1$, welcher also in der Mitte steht zwischen den unechten und echten Brüchen der typischen Brachien und Botryen.

Andere Blüthenstandstypen als die rispigen, botrytischen und brachialen, abgesehen von den aus diesen gemischten Inflorescenzen, giebt es nicht. Wenn man vielleicht die auf Grund der Entwickelungsgeschichte aufgestellten »dorsiventralen Inflorescenzen«, die den »radiären« entgegengesetzt worden sind, in unserer Eintheilung vermissen sollte, so wäre dagegen zu bemerken, dass dieselben gar keine natürliche Gruppe von Blüthenständen ausmachen. Die Dorsiventralität ist eine secundäre Erscheinungsform, die in den Blüthenständen aller drei Typen auftreten kann. So sind in der Cyme von *Sambucus nigra* die Strahlen dorsiventral gebaut (Fig. 11); es können auch echte Trauben, z. B. bei *Leguminosen (Vicien)*, dorsiventralen Bau erhalten; die Wickeln sind der Anordnung ihrer Blüthensprosse zufolge immer dorsiventrale Blüthenstände, und wenn auch deren Entwickelungsweise, wie bei den *Borragineen* u. a., eine dorsiventrale Traube täuschend nachahmt, so fällt der umsichtige comparative Morphologe dieser Täuschung doch nicht zum Opfer. Kurzum, es giebt zwar dorsiventrale Blüthenstände mannigfacher Art, sie bilden aber ebenso wenig eine natürliche, sondern ebenso sehr eine aus heterogenen Bestandtheilen gemischte Gruppe, wie etwa die übergipfelnden (für cymös erklärten) Inflorescenzen.

Es folge nun eine Übersicht der Formen oder Arten der Blüthenstände innerhalb jedes einzelnen Typus. Doch ist zuvor zu bemerken, dass in einer Inflorescenz entweder nur ein Typus oder zwei derselben (selten alle drei) combinirt verwirklicht werden können. Hiernach sind zunächst reine, oder besser homotaktische (nach Pax), oder noch bestimmter homotype, und zweitens gemischte (nach de Candolle) oder besser heterotaktische oder heterotype Blüthenstände zu unterscheiden. Die homotypen können dann einfach oder zusammengesetzt sein.

A. Homotype (homotaktische) Blüthenstände.

I. Rispiger oder thyrsoider Typus (Thyrsen).

Die älteren Botaniker verstanden unter Thyrsus eine dichtblüthige Rispe, welche aber keinen besonderen Namen braucht, daher ich diesen vacant gewordenen Namen für den ganzen Typus verwende. Die Thyrsen de Candolle's (s. weiter) können dann Thyrsoiden heissen. Zu den Thyrsen gehören folgende 4 Formen:

1. Die Rispe (Panicula).

Die Hauptachse geht bis in den Gipfel der Inflorescenz durch, und die Seitenachsen erreichen den Gipfel nicht.

Man hat die Rispe oft für eine zusammengesetzte Traube erklärt. Dies ist unrichtig, der Vergleich von Fig. 2 und 23 zeigt den wesentlichen Unterschied. Wohl aber kann die Rispe einer zusammengesetzten Traube sich nähern, in sie übergehen, wie in Fig. 4, sie kann dann als zusammengesetzt-traubenförmige Rispe bezeichnet werden. Die echte zusammengesetzte Traube kann demnach auch selbst aus einer Rispe durch theilweise Reduction und theilweises Gleichwerden anfangs ungleicher Seitenachsen entstanden sein.

2. Die Schirmrispe oder der Ebenstrauss (Corymbothyrsus).

Auch hier ist die Hauptachse ganz oder nahe bis zum Gipfel verlängert, die Seitenachsen aller Grade aber sind so verlängert, dass sie, wenigstens die oberen, eben so hoch reichen und mit ihren Blüthen eine ziemlich ebene Schirmfläche bilden. Fig. 5.

Braun übertrug den Namen Corymbus, der sonst die Schirmtraube oder Doldentraube bezeichnet, auf die Schirmrispe, weil er die Schirmtraube nur für eine Form der Traube (racemus umbelliformis) hielt. Da ich weder das eine, noch das andere billigen kann, den Namen Corymbus also der Schirmtraube belasse, so muss ich für die Schirmrispe einen neuen Namen Corymbothyrsus (= Ebenstrauss) vorschlagen. Von dieser ist die zusammengesetzte Schirmtraube (Fig. 24) analog verschieden, wie von der Rispe die Traube, wenn auch der Habitus weniger abweicht.

3. Die Spirre (Anthela).

Die Hauptachse ist verkürzt, die Seitenachsen über dieselbe hinaus, am meisten die untersten derselben verlängert. Dieselbe Übergipfelung wiederholt sich in höheren Verzweigungsgraden. Die Stengelglieder der Hauptachse sind alle entwickelt, die untersten am meisten, daher die Äste alternirend. Fig. 6.

Die Spirre kommt nur bei *Juncaceen* und *Cyperaceen*, dann bei *Spiraea ulmaria* vor.

Sie geht öfter in Archibrachien oder in typische Brachien (*Juncus bufonius* Fig. 13) aus. Durch Reduction geht sie in Schirmtrauben (mit oder ohne brachiale Ausgänge), selbst in reine Brachien (bei *Juncus bufonius* manchmal) über.

4. Die Trugdolde oder Trugdoldenrispe (Cyma).

Dieser Blüthenstand hat wie die Spirre eine verkürzte Hauptachse und wenig zahlreiche Seitenachsen, welche die Hauptachse beträchtlich übergipfeln. Aber diese Seitenzweige sind entweder alle, oder doch die untersten kräftigsten quirlförmig gestellt, zu 3, 4 oder 6, daher auch in der Länge wenig differirend; weil dann auch in den höheren Verzweigungsgraden die unteren längeren Zweige unter stumpferem Winkel abgehen, so kommt (ausgezeichnet bei *Sambucus nigra*) ein schirmförmiger Habitus, wie bei der Schirmrispe, zu Stande. Des-

wegen hat Braun die Trugdoldenrispe nur als eine Abart der Schirmrispe angesehen, ebenso Eichler, und Pax übergeht sie ganz, indem er *Sambucus* und *Viburnum* als Beispiele für die Schirmrispe anführt. Sehr mit Unrecht, da die Trugdoldenrispe, von dem trügerischen doldenartigen Habitus abgesehen, viel mehr mit der Spirre als mit der Schirmrispe verwandt ist. Vergl. Fig. 6 und 7.

Die Trugdolde geht, soviel mir bekannt, immer in brachiale Verzweigung über, kommt also wohl nur heterotyp vor; trotzdem muss das Hauptgerüst der Cyme, welches mit den Brachien endigt, den reinen Thyrsen beigezählt werden. Dass sie aber so allgemein in Brachien ausgeht (wie auch die armstrahlige Spirre, z. B. von *Juncus bufonius*), erklärt sich daraus, dass sie bereits auf wenige Hauptstrahlen reducirt ist, daher auf diesen, weil die Zahl der coordinirten Seitenzweige in höheren Verzweigungsgraden nach dem Rispengesetze stetig abnimmt, sehr bald die Reduction auf 2 und 1 Zweig, also Brachienbildung mit Übergipfelung eintritt.

Dies ist die echte Linné'sche Cyma, welche diesen Namen auch behalten muss, um so mehr, da sie keinen anderen einfachen Namen besitzt. Dass dieser Name widerrechtlich auf die brachialen Blüthenstände übertragen worden ist, davon war der Grund der, dass Röper seinem unhaltbaren Eintheilungsprincip zufolge mit der echten Cyma nicht nur die begrenzte Dolde, sondern auch das Dichasium vereinigte. Als dann Braun erstere von den dichotomen Blüthenständen wieder abtrennte, beliess er den letzteren den üblich gewordenen Namen Cyma oder Trugdolde (obwohl das Dichasium mit einer Dolde geringe, die Monobrachien meist gar keine Ähnlichkeit haben), und gab der Linné'schen Cyma den Namen Corymbus cymiformis (Trugdoldenrispe), der nicht beibehalten werden kann, da die Cyme kein Corymbus, weder im gewöhnlichen, noch im Braun'schen Sinne ist.

Es lassen sich zwei Hauptformen der Cyma unterscheiden, die typische und die doldenförmige (cyma umbelliformis). Erstere hat über den kräftigen wirteligen Grundzweigen oder Strahlen noch kürzere Blüthenzweiglein (Oberzweige) an der Hauptachse (Fig. 7, 11 *A*), so dass Stärke und Verzweigungsgrösse nach dem Thyrsengesetze allmählicher abnimmt. An der doldenförmigen Cyma fehlen bereits die Oberzweige, daher sie der zusammengesetzten Dolde sich nähert (Fig. 9, 12), von welcher sie sich aber noch durch die ungleiche Verzweigung der Strahlen und die brachialen Ausgänge derselben, sowie durch das Dasein einer Terminalblüthe statt einem Terminaldöldchen oder einer unbegrenzten Hauptachse unterscheidet. Die Cyma von *Sedum spurium* (Fig. 7) bildet oft den Übergang aus der typischen in die doldenförmige Form; sie wird dort häufig zur heterotypen Dolde mit gleichartig dichasial verzweigten Strahlen (Fig. 8). Auch bei *Lithospermum officinale* geht die dreistrahlige doldenförmige Cyme (Fig. 12) leicht in eine heterotype einfache Dolde mit dibrachialen Strahlen über. Die *Euphorbien* besitzen ursprünglich typische Cymen, in denen jedoch die männlichen Oberzweige mit der weiblichen Terminalblüthe an der Hauptachse und auf allen Strahlen Cyathien bilden. Die Cyathien selbst stehen in doldenförmigen Trugdolden, welche aber schon im dritten Verzweigungsgrade zumeist dibrachial werden (z. B. *Euph. helioscopia* Fig. 9 und 10); wenn

aber schon die Primanstrahlen in dibrachiale Verzweigung ausgehen, wie bei so vielen Arten, so geht die Trugdolde wiederum in eine heterotype Dolde über.

Es geht also die Cyme vereinfacht öfters in die Dolde über, während die Schirmrispe in die Schirmtraube übergeht. Mit gleichem Rechte also, wie unter den Botryen die Dolde und die Schirmtraube, muss auch unter den Thyrsen die Trugdolde (Trugdoldenrispe) von der Schirmrispe wohl unterschieden werden. Der Vergleich der Fig. 5 und 7 zeigt auch deren wesentliche Verschiedenheit.

II. **Botrytischer oder racemöser Typus (Botryen).**

1. Einfache Botryen.

Hierher gehören die bekannten 5 Formen, welche ebenso wie die Thyrsen durch die Längenverhältnisse der Achsen charakterisirt werden. Sie bilden 2 Gruppen:

a) Nebenachsen verlängert.
1. Traube (racemus), 2. Schirmtraube (corymbus), 3. Dolde (umbella).

b) Nebenachsen verkürzt.
4. Ähre (spica), 5. Köpfchen (capitulum).

Die drei ersten Botrysarten entsprechen der Rispe, der Schirmrispe und der Cyme unter den Thyrsen, aus welchen sie auch hervorgehen können. Daher ist es auch nicht angezeigt, den Corymbus mit der Traube zu vereinigen. Die vierte Rispenform, die Spirre, geht, botrytisch vereinfacht, wie z. B. bei *Luzula flavescens* (s. Buchenau in Pringsh. Jahrb. IV. Taf. XXX), in eine die Endblüthe übergipfelnde Schirmtraube über.

Die Ähre und das Köpfchen sind aus Traube und Dolde abgeleitete Formen, von phylogenetisch späterer Herkunft.

Die von einer Primanblüthe begrenzten Botryen sind ursprünglicher, die unbegrenzten sind meist aus solchen entstanden. Doch kann die Terminalblüthe auch schon am Laubblattstengel mit axillären Blüthen, noch vor dem Entstehen einer eigentlichen Botrys geschwunden sein, wie die Gattung *Veronica* zeigt.

2. Zusammengesetzte Botryen (Diplobotryen).[1])

a) Gleichartig zusammengesetzte (homomorphe) Diplobotryen.

Dahin gehören die zusammengesetzten Trauben, Schirmtrauben, Dolden, Ähren und Köpfchen. Sie sind nicht etwa aus einfachen Botryen durch Verzweigung der Nebenachsen entstanden, sondern aus Thyrsen, in welchen die botrytische Reduction nicht nur am Ende der Hauptachse, sondern auch der stärkeren Primanzweige stattgefunden hat; oder auch durch nachträgliche Spros-

[1]) Eichler nennt sie nach Guillard Dibotryen, was eine Zusammensetzung aus zwei Botryen bedeuten würde, während es sich um zweifach zusammengesetzte Botryen handelt.

sung seitlicher Botryen unterhalb der terminalen Botrys. Sie besitzen ursprünglich stets am Ende der Hauptachse eine terminale Partialbotrys, letztere kann aber auch (z. B. in der zusammengesetzten Dolde) verloren gehen.

Die gleichartige Zusammensetzung findet stets nur in dem zweiten Grad statt; die botrytische Umbildung trifft nämlich immer nur die letzten stärkeren Zweige; daher bei hochgradiger Verzweigung eine aus Trauben zusammengesetzte Rispe (Fig. 28) auftritt.

Die zusammengesetzte Traube (Fig. 23) ist sowohl von der homotypen Rispe (Fig. 2), wie von der aus Trauben zusammengesetzten Rispe (Fig. 28), ebenso die zusammengesetzte Schirmtraube (Fig. 24) von der homotypen Schirmrispe (Fig. 5) und von der aus Schirmtrauben zusammengesetzten Schirmrispe (z. B. bei *Spiraea callosa*) zu unterscheiden.

b) Ungleichartig zusammengesetzte (heteromorphe) Diplobotryen.

Auch diese leiten vielfach ihren Ursprung von den Thyrsen her. So ist z. B. die Spirre von *Luzula albida* (Fig. 6) durch botrytische Umbildung des Terminaltriebs und der Primanzweige in die aus Ähren zusammengesetzte Schirmtraube von *L. campestris* (Fig. 26) übergegangen.

Von den zahlreichen Combinationen sind folgende wohl die wichtigsten:

Schirmtraube aus Ähren. — *Luzula campestris.* (Fig. 26.)

Schirmtraube aus Köpfchen. — *Chrysanthemum corymbosum.* Die Schirmtraube bald einfach, bald zusammengesetzt.

Traube aus Dolden (Dolden-Traube). — *Hedera Helix.* (Fig. 25.)

Traube aus Köpfchen (Köpfchentraube). — *Petasites Kablikianus.*

Traube aus Ähren (Ähren-Traube). — *Brachypodium.*

Dolde aus Köpfchen (Köpfchen-Dolde). — *Cladanthus prolifer* DC. Dolden theils einfach, theils zusammengesetzt, wenigstrahlig. (Fig. 27.)

Ähre aus Köpfchen. — *Sparganium minimum.*

Köpfchen aus Ähren. — *Holoschoenus* und andere *Cyperaceen.*

III. **Brachialer oder gabeliger Typus (Brachien).**

1. Einfache Brachien.

Während bei den Thyrsen und Botryen für die Classificirung derselben die Längenverhältnisse der Achsen vor allem massgebend sind, treten dieselben bei den Brachien in die zweite Reihe zurück. Die Beschränkung der coordinirten Achsen auf 2 oder 1 bringt es mit sich, dass eben die Zahl und bei Einzahl derselben die Stellung der Tochterachse zur Mutterachse für den Bau des Blüthenstandes wichtig wird. Danach ergeben sich die bekannten fünf Arten der Brachien.

a) Je zwei Seitenachsen.

1. Dibrachium (dichasium), Gabel.

b) Je eine Seitenachse (Monobrachium).

2. Bostryx, Schraubel, 3. Cicinnus, Wickel.
4. Drepanium, Sichel, 5. Rhipidium, Fächel.

An jeder Achse unterscheiden wir das Basalglied und den Blüthenstiel. Beide können entweder verlängert oder verkürzt sein, woraus sich für jede der 5 Brachienarten 4 schon von Wydler in Flora 1851 hervorgehobene Combinationen ergeben. Die 2 Combinationen mit verlängerten Basalgliedern (Fig. 29 und 30) können ausgebreitet (Brachia effusa), die mit verkürzten Basalgliedern (Fig. 32) zusammengezogen (Brachia contracta) heissen und durch den Zusatz mit gestielten oder mit sitzenden Blüthen (floribus pedunculatis vel sessilibus) näher bezeichnet werden. Die Monobrachien in allen vier Combinationen können auch traubenförmig, doldenförmig, ährenförmig oder köpfchenförmig heissen: die zusammengezogenen Dibrachien sind auch entweder doldenförmig oder köpfchenförmig.[1])

Die Übergipfelung der Terminalblüthe durch die Seitenblüthen ist zwar, wie bei den Spirren und Cymen, auch bei den Brachien eine sehr häufige und für sie charakteristische Erscheinung, aber keineswegs allgemein vorkommend. Bei den *Labiaten*, bei *Morina* u. a. sind die consecutiven Blüthensprosse immer kürzer und kürzer, daher keine Übergipfelung vorhanden.

2. Zusammengesetzte Brachien (Diplobrachien).[2])

Bestehen aus brachialen Partialinflorescenzen, welche durch je einen kräftigeren Basalzweig monobrachial (wickelig oder schraubelig) verkettet sind.

Bei *Alchemilla vulgaris* (Fig. 41) ist die primäre Inflorescenz, welche die partiellen Brachien trägt, eine Schraubel. Sie entsteht hier durch die kräftigere Entwickelung je eines Gabelzweiges des ursprünglichen Dichasiums; der andere Zweig ist im unteren Theile der Inflorescenz eine Doppelwickel, im oberen je eine Wickel.

Bei den *Geraniaceen* ist die primäre Inflorescenz eine Wickel; die Partialinflorescenzen sind ebenfalls Wickeln (*Erodium*, Fig. 39) oder meist 2blüthige Archibrachien (*Geranium*-Arten, Fig. 40). Hier ist die sympodiale Primanwickel nicht aus Armen eines Dibrachiums, sondern aus tieferstehenden, zu einem Laubblatt axillären Zweigen gebildet. Das Diplobrachium ist hier nämlich aus einer armblüthigen Rispe, wie sie z. B. *Geranium Robertianum* (Fig. 45) zeigt, durch kräftigere Entwickelung des aus dem zweiten Laubblatt I^2 kommenden Zweiges in mehrfachen nachfolgenden Sprossgraden hervorgegangen.

---

[1]) Die Termini Büschel und Knäuel sind minder gut, weil darunter auch zusammengezogene kleine Rispen mit brachialen Endigungen (wie bei *Dianthus barbatus*) verstanden werden

[2]) Bei Eichler Dicymen.

B. Heterotype (heterotaktische) Blüthenstände.

Hier sind zwei Gruppen zu unterscheiden: Die Thyrsoiden (Thyrsen DE CANDOLLE's und HOFMEISTER's) und die Sarmentiden (HOFMEISTER's, BRAVAIS's z. Th.). Der Gesammtblüthenstand der Thyrsoiden ist eine Rispe (Thyrsus) oder eine Botrys, deren letzte Zweige botrytisch oder brachial umgebildet sind; die Sarmentiden sind monobrachiale Gesammtblüthenstände mit rispigen oder botrytischen Partialblüthenständen.

AA. *Thyrsoiden.*

1. Botryo-Thyrsen.

(Thyrsen aus Botryen.)

Hierher gehören:

Rispe aus Trauben (Traubenrispe). — *Spiraea aruncus, Veratrum album.*
Schirmrispe aus Schirmtrauben. — *Spiraea callosa* Thunbg.
Rispe aus Dolden (Doldenrispe). — *Aralia racemosa.*
Rispe aus Ähren (Ährchen). — Die meisten Gräser.
Rispe oder Schirmrispe aus Köpfchen. — Viele *Compositen.*
Spirre aus Ähren (Ährchen). — Viele *Cyperaceen.*
Spirre aus Köpfchen. — *Juncus lamprocarpus* etc.

2. Brachio-Thyrsen.

Rispe aus Gabeln (Dibrachien). — *Lychnis flos cuculi, Dianthus barbatus* etc. Kommt sehr häufig und in verschiedenen Modificationen vor.
Rispe aus Wickeln (Wickelrispe). — *Heliotropium peruvianum.*
Rispe aus Schraubeln. — *Hypericum perforatum* (schwächere Exemplare).
Schirmrispe aus Gabeln. — *Valerianella dentata*, *Sedum*-Arten.
Cyme aus Gabeln (die zuletzt meist in Monobrachien ausgehen). — Arten von *Viburnum, Sambucus, Cornus, Sedum, Lithospermum.*
Spirre aus Sicheln. — *Juncus bufonius* (kräftige Stengel).

3. Brachio-Botryen.

(Cymo-Botryen EICHLER's.)

Sind auch sehr mannigfaltig combinirt; insbesondere:

Traube aus Gabeln. — Sehr häufig: *Chionanthus, Phlox* spec., *Weigelia, Ceanothus* etc.
Traube aus Wickeln (Wickeltraube). — *Aesculus, Echium.*
Traube aus Schraubeln. — *Bomarea edulis; Hypericum montanum* (oberer Inflorescenztheil).
Schirmtraube aus Sicheln. — *Juncus bufonius* (theilweise).
Dolde aus Gabeln (Gabeldolde). — *Cornus sericea*, *Lithospermum officinale* z. Th. (die Gabeln gehen alsbald in Wickeln aus).

Dolde aus Wickeln (Wickeldolde). -- *Sedum acre, Lithospermum arvense.*
Dolde aus Schraubeln (Schraubeldolde). — *Bomarea stricta.*
Ähre aus Gabeln (Gabelähre). — *Alnus, Betula* und *Datisca* ♀, *Hordeum, Elymus* etc.
Ähre aus Wickeln (Wickelähre). — *Dioscoreaceae* ♂.
Köpfchen aus Gabeln (Archibrachien). — *Lonicera caprifolium* etc.
Köpfchen aus Wickeln (Wickelköpfchen). — *Armeria.*
Köpfchen aus Schraubeln. — Arten von *Allium.*

Die Thyrsoiden haben meistens den Habitus von Thyrsen, sind auch früher vielfach als Rispen aufgeführt worden und sind auch aus Thyrsen vielfach abzuleiten. So die Köpfchenspirre der *Juncі* aus der Verwandtschaft von *J. lamprocarpus* aus einer homotypen Spirre, die Wickeltraube von *Aesculus* aus typischer Rispe, wie bei den *Acerineen* u. s. f.

BB. *Sarmentiden.*

1. Thyrso-Brachien.

Hiervon kenne ich nur 2 Beispiele, die Rispenwickel von *Ampelopsis* (Fig. 42) und die Spirrenfächel von *Luzula purpurea* (s. Buchenau l. c. Fig. 24). Erstere entstand aus der Rispe von *Vitis* durch kräftige Entwickelung des untersten Rispenzweiges, an welchem wieder der unterste Secundanzweig kräftiger sich bildet u. s. f., wobei die kräftig geförderten Grundzweige eine Wickel bilden. In gleicher Weise sind die untersten Zweige aller Grade in der Spirre zu einer Sichel bei *Luzula purpurea* verkettet.

2. Botryo-Brachien.
(Botryo-Cymen Eichler's.)

Gabeln aus begrenzten Wickeldöldchen. — Bei den *Euphorbien* die einzelnen dichasialen Strahlen der Cyme oder Dolde; die Wickeldöldchen führen den Namen Cyathien.
Gabeln aus unbegrenzten Köpfchen. — Manche *Compositen, Dipsaceen, Amarantaceen.*
Wickeln aus Trauben (Traubenwickeln). — *Phytolacca.*
Wickeln aus Dolden (Doldenwickeln). — *Bowlesia, Chelidonium.* — Zusammengesetzte Dolden in Wickeln bei manchen Umbelliferen *(Anthriscus, Oenanthe).*
Wickeln aus Köpfchen (Köpfchenwickeln). — Diese wieder doldig oder traubig zusammengestellt bei *Vernoniaceen.*
Schraubeln aus Dolden (Doldenschraubeln). — *Caucalis nodiflora.*
Schraubeln aus Köpfchen (Köpfchenschraubeln). — *Cichorium* und andere *Compositen.*
Sicheln aus Köpfchen (Köpfchensicheln). — Als letzte Auszweigungen in den Spirren mancher Juncusarten *(Juncus obtusiflorus).*

Die Botryo-Brachien können als reducirte Thyrsen gelten, in welchen der Obertheil botrytisch reducirt, und 1 oder 2 Basalzweige stark gefördert worden. Überhaupt sind aber die Sarmentiden den Diplobrachien verwandt, so dass Bravais die letzteren geradezu mit zu den Sarmentiden gerechnet hat. Bei beiden kommt die brachiale Gesammtinflorescenz durch kräftige Entwickelung von 1—2 Basalzweigen unter den successiven Partialinflorescenzen zu Stande; jedoch sind letztere bei den Diplobrachien mit der Gesammtinflorescenz homotyp, bei den Sarmentiden heterotyp.

Die vergleichende und auf unzweifelhafte phylogenetische Vorgänge Rücksicht nehmende Methode führt zu dem Resultat, dass die Thyrsen den allgemeinsten, ursprünglichsten Blüthenstand darstellen, was z. Th. schon Nägeli in seiner »Theorie der Abstammungslehre« ausgesprochen hat. Aus ihnen sind, logisch wenigstens, einerseits die Botryen, anderseits die Brachien abzuleiten. Aus der Rispe, Schirmrispe und Trugdolde gehen nicht selten durch botrytische Reduction die Traube, Schirmtraube und Dolde hervor. Auch die zusammengesetzten, d. h. in gesonderte Partialinflorescenzen sich gliedernden Blüthenstände, sowohl homotyper als heterotyper Zusammensetzung, lassen sich aus den Thyrsen ableiten und sind daher auch durch Übergänge mit ihnen verbunden. Ihre Abstammung von den Thyrsen lässt sich oft durch die Verwandtschaftsbeziehungen der Arten nachweisen.

Die Befürchtung Buchenau's, dass die substantivischen Bezeichnungen der Blüthenstandsformen, wenn sie genau entsprechen sollen, ins Ungemessene vermehrt werden müssten, trifft nicht zu, denn wir brauchen nur 14 solcher Benennungen, 4 für die Thyrsen, je 5 für die Botryen und für die Brachien. Die zusammengesetzten Formen sind auch durch Zusammensetzung der Namen zu bezeichnen. Leichtere Abänderungen und Annäherungsformen, die aber im Rahmen der scharf präcisirten Begriffe bleiben, sind allerdings angemessen durch Adjectiva, wie oben mehrfach geschehen ist, auszudrücken. Namen, wie Kolben, Kätzchen, Anthodium u. s. w. sind aber aus der Morphologie ganz zu verbannen, höchstens der beschreibenden Botanik, wofern sie bequem sind, zu überlassen.

Erklärung der Figurentafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Rispig verzweigter Blüthenstengel von *Geum urbanum,* als Prototyp aller Inflorescenztypen. Durch Reduction aller Blätter auf Hochblätter würde daraus eine Rispe mit dichasialer Tendenz (Reduction) der Zweige dritten, oberwärts bereits ersten Grades. Durch Unterdrückung der Zweige zweiter Ordnung, die an schwächeren Stengeln auch vorkommt, geht daraus eine einfache Botrys (Traube) hervor. Reduction auch der unteren Primanzweige auf nur 2 Vorblätter würde eine heterotype, aus Dibrachien zusammengesetze Traube ergeben. Durch Unterdrückung der Primanzweige bis auf die zwei obersten (die dann näher zusammenrücken) entsteht ein terminales Dibrachium.

» 2. Zusammengesetztere typische Rispe, in den 5ten Sprossgrad verzweigt.

» 3. Einfachste Rispe, mit nur 3 coordinirten Primanzweigen und nur 3 Achsengenerationen.

» 4. Rispe von *Ligustrum vulgare,* im Übergange in die zusammengesetzte Traube (traubenförmige Rispe).

» 5. Schirmrispe.

» 6. Spirre von *Juncus* und *Luzula (L. albida).*

» 7. Einfache Trugdolde (Cyma) von *Sedum spurium,* mit dibrachial ausgehenden Strahlen; Oberzweiglein nur 2, 1—2blüthig.

» 8. Einfache Dolde aus Dibrachien von *Sedum spurium,* durch Vereinfachung aus der Cyme hervorgegangen.

» 9. Doldenförmige Cyme aus Cyathien von *Euphorbia helioscopia,* mit dibrachialen Ausgängen, von einer zusammengesetzten, dibrachial ausgehenden Dolde aus Cyathien wenig (durch theilweise dreistrahlige Secundanzweige) verschieden.

» 10. Diagramm derselben Cyme.

Tafel II.

Fig. 11. Zusammengesetzte Trugdolde von *Sambucus nigra,* und zwar:

11 *A.* Die Cyma im Ganzen; die kräftigen Hauptstrahlen (Grundzweige) nur angedeutet, in einem aus zwei zusammengezogenen Quirlen I u. II gebildeten Quirl. Oberzweige ebenfalls in zwei zusammengezogenen Quirlen III und IV.

11 *B.* Ein Hauptstrahl aus dem Quirl II, ausgeführt; *t* die Terminalblüthe, *x y* Blüthen höherer Grade, welche zuerst aufblühen.

11 *C.* Hauptstrahl aus dem II. Quirl einer anderen Inflorescenz, reicher verzweigt. Die zwei dorsalen Secundanstrahlen *(DD)* nur angedeutet; *v v* die zwei ventralen, dibrachial verzweigten Zweiglein desselben, *b b* deren Deckblättchen mit den keulenförmigen Drüsenkörpern zur Seite; b^1 Deckblatt des am Mitteltrieb emporgehobenen medianen Zweigleins *m;* m^1 zweites, hinteres medianes Zweiglein; b^2 Deckblatt der emporgehobenen Blüthe *K;* b^3 letzterem opponirtes steriles Deckblatt; *T* Terminalblüthe des Hauptstrahls.

11 *D.* Diagramm desselben Hauptstrahls; Buchstaben wie früher.

Fig. 12. Doldenförmige Trugdolde mit wickeligen Ausgängen von *Lithospermum officinale;* die Wickeln nur angedeutet, in der Natur viel reichblüthiger.

» 13. Spirre von *Juncus bufonius,* mit Sicheln in allen Ausgängen.

» 14. Begrenzte Traube.

» 15. Unbegrenzte Traube.

» 16. Ähre.

» 17. Schirmtraube.

» 18. Begrenzte Dolde.

» 19. Köpfchen.

» 20. Zusammengesetzte Dolde, Hauptachse mit terminalem Döldchen.

Tafel III.

Fig. 21. Ungewöhnlich entwickelte zusammengesetzte Dolde von *Aegopodium Podagraria.* Hauptachse verlängert mit Terminaldöldchen, dicht unter diesem mit 2 Seitendöldchen, in der Mitte mit einem von einem entwickelten 3spaltigen Deckblatt gestützten Seitendöldchen. Auf den Rispentypus (u. zw. die Cyme) zurückdeutend.

» 22. *A.* Unvollkommene zusammengesetzte Dolde von *Sanicula europaea;* Döldchen kopfförmig (d. h. Blüthen z. Th. sitzend, z. Th. gestielt); die Hauptachse mit einem Döldchen beschlossen; die Hauptstrahlen dibrachial (archibrachial) einmal verzweigt.

B. Ein Doldenstrahl zweimal dibrachial verzweigt. Der Blüthenstand von *Sanicula* (und ähnlich von *Astrantia)* ist ursprünglicher, phylogenetisch älter als die vollkommene zusammengesetzte Dolde der meisten *Umbelliferen;* die dibrachiale Verzweigung deutet auf die Cyma zurück.

» 23. Zusammengesetzte Traube von *Veratrum nigrum.* Zu vergleichen mit den Rispen Fig. 2 und Fig. 4.

» 24. Zusammengesetzte Schirmtraube (corymbus compositus). Zu vergleichen mit der Schirmrispe Fig. 5.

Fig. 25. Doldentraube (d. h. aus Dolden zusammengesetzte Traube) von *Hedera helix.*

» 26. Übergipfelnde Schirmtraube (reducirte Spirre) aus Ähren von *Luzula campestris.*

» 27. Zusammengesetzte Dolde aus Köpfchen von *Cladanthus prolifer DC.* Zu vergleichen mit einer Cyme, in der die Oberzweiglein am Ende der Hauptachse und aller Strahlen botrytisch (in ein Köpfchen) umgebildet sind.

» 28. Oberer Theil einer Traubenrispe (d. h. einer aus Trauben zusammengesetzten Rispe) von *Spiraea aruncus.* Im unteren Theil der Rispe geht die Verzweigung bis in Trauben vierter Ordnung.

» 29. *A.* Dibrachium (Dichasium), übergipfelnd, ausgebreitet, mit gestielten Blüthen; b, b^1, b^2 nachfolgende Generationen der Deckblätter.
B. Diagramm dazu, worin die gegenseitige Stellung der Blüthen genauer als im Aufriss ersichtlich ist.

» 30. Übergipfelndes, ausgebreitetes Dibrachium mit sitzenden Blüthen.

» 31. Nicht übergipfelndes, ausgebreitetes Dibrachium.

Tafel IV.

Fig. 32. Nichtübergipfelndes, zusammengezogenes, doldenförmiges Dibrachium.

» 33. *A.* Fächel mit gebrochenem Sympodium.
B. Fächel mit gerade gestrecktem Sympodium, traubenförmig.
C. Diagramm der Fächel.

» 34. *A.* Sichel mit gebrochenem Sympodium.
B. Sichel mit gerade gestrecktem Sympodium, traubenförmig.
C. Sichel mit gerade gestrecktem Sympodium, ährenförmig.
D. Diagramm der Sichel.

» 35. *A.* Diagramm der Schraubel.
B. Diagramm der Wickel.

» 36. *A.* Diagramm der Doppelschraubel.
B. Diagramm der Doppelwickel.

» 37. Doppelsichel; kann symbolisch auch die Doppelschraubel darstellen, wenn man die in einer Fläche gezeichneten Blüthensprosse entsprechend aus der Papierebene herausgetreten sich denkt.

» 38. Doppelfächel; symbolisch kann der Aufriss auch die Doppelwickel, und jede Fächel, wie in den folgenden Figuren, eine Wickel bedeuten, unter der vorhin gestellten Bedingung.

» 39. Zusammengesetzte Wickel von *Erodium cicutarium* (die Wickel wieder symbolisch durch Fächeln dargestellt). Die primäre Wickel bildet ein aus den consecutiven Sprossen 1, 2, 3 zusammengesetztes Sympodium.

Fig. 40. Wickel (durch die Fächel symbolisirt) aus einarmigen Archibrachien *a* von *Geranium pyrenaicum;* 1, 2, 3 .... nachfolgende Sprossgenerationen, das Sympodium der primären Wickel bildend; l^1 l^2 erstes und zweites Blatt jedes Sympodialsprosses.

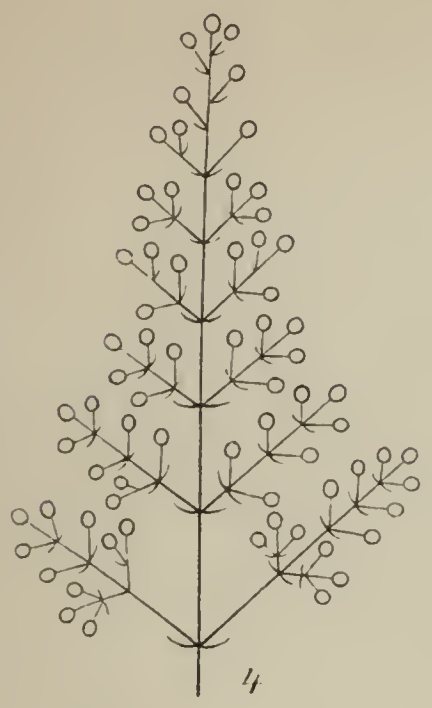
» 41. Blüthenstand von *Alchemilla vulgaris;* im Wesentlichen eine zweiarmige Gabel, deren linker Arm in eine Schraubel (deren Sympodium von 1, 2, 3 .... gebildet) umgewandelt, die unterwärts aus Doppelwickeln, obenhin aus einfachen Wickeln gebildet wird.

» 42. Blüthenstand von *Ampelopsis hederacea:* eine von den Sprossen 1, 2, 3, 4 gebildete Wickel aus kleinen partialen Rispen (also Rispenwickel). Ist aus einer typischen Rispe (wie bei Vitis) hervorgegangen, deren Basalast kräftiger sich entwickelt und gleicherweise sich weiter verzweigt hat.

» 43. Köpfchensichel (Sichel aus Köpfchen) aus dem Blüthenstande von *Juncus obtusiflorus.* Hervorgegangen aus einer Spirre, in welcher die oberen Zweige in ein Köpfchen botrytisch umgewandelt sind und nur ein basaler Ast sich kräftig entwickelt hat, die Verzweigung in gleicher Weise fortsetzend.

» 44. Dreistrahlige Dolde aus Wickeln von *Sedum acre.* Eine Reductionsform der Cyme und Dibrachiendolde (Gabeldolde) von *Sedum spurium* in Fig. 7 und 8.

» 45. Blüthenstand von *Geranium Robertianum* (nach Eichler); eine zum brachialen Typus hinneigende Rispe, aus welcher die Archibrachienwickel von *Geranium pyrenaicum* durch wiederholte Bildung übergipfelnder Sprosse aus dem jedesmaligen zweiten Blatte l^2 hervorgeht.

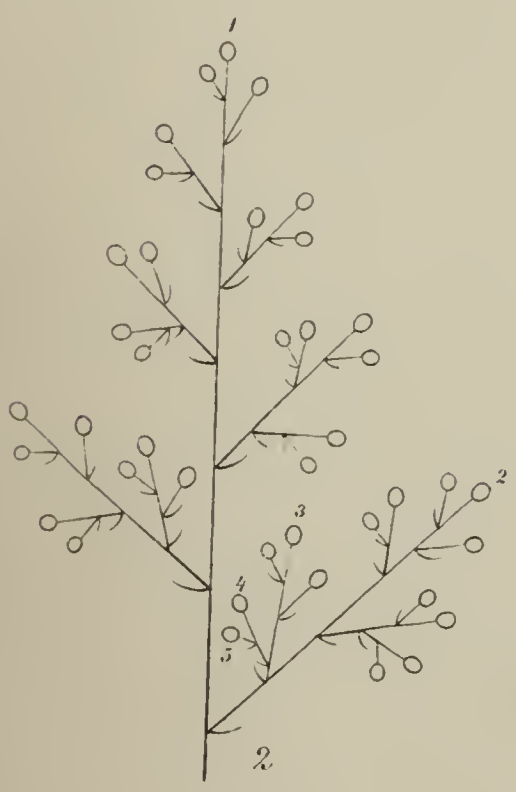

4

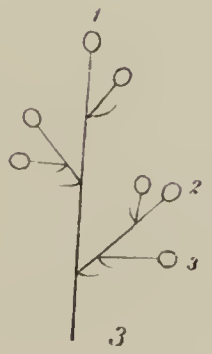
1

5 2 3 4 1 10

9

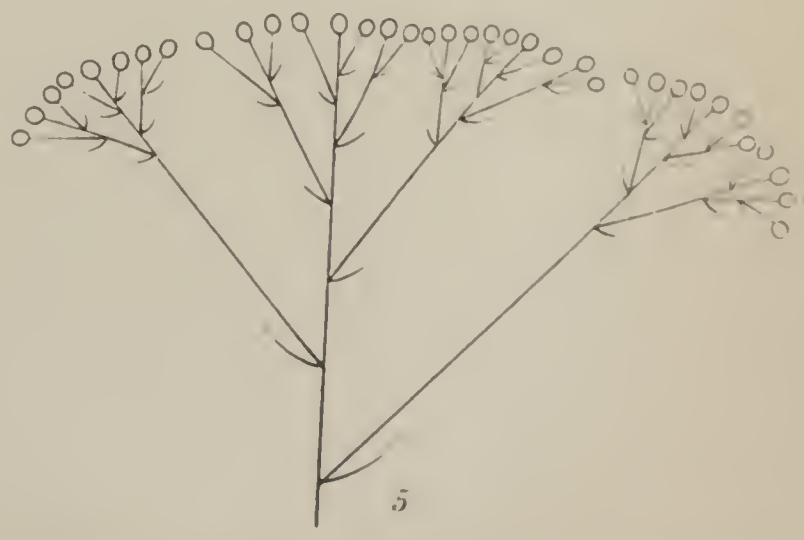
8

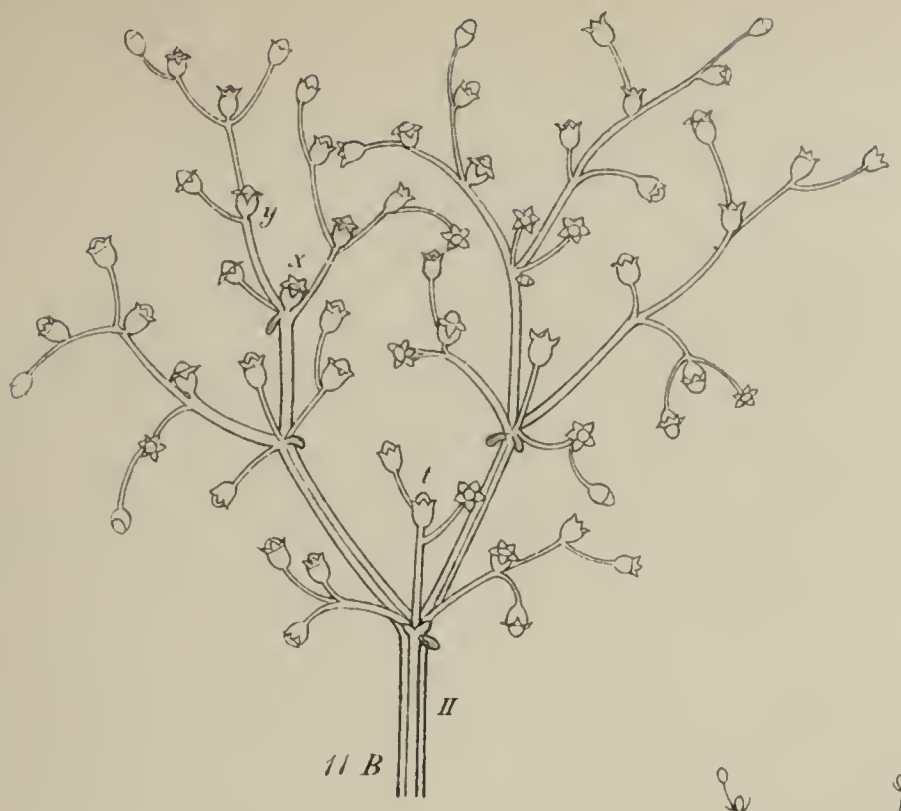

2


3

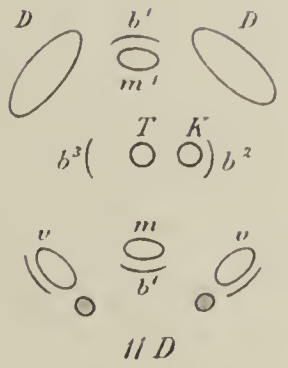
7

6

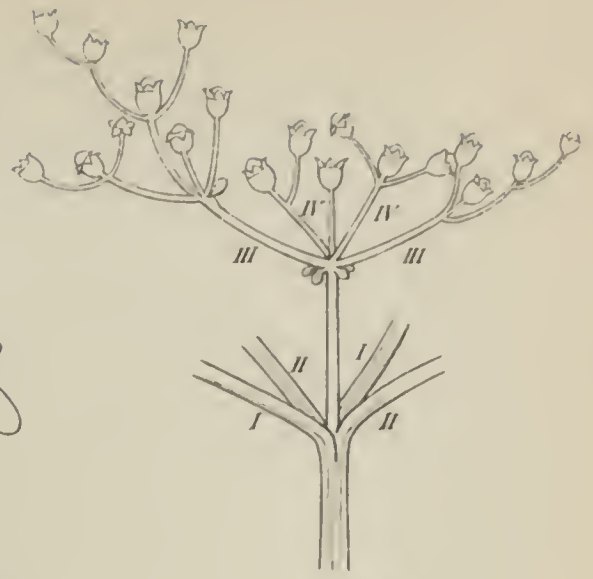

5



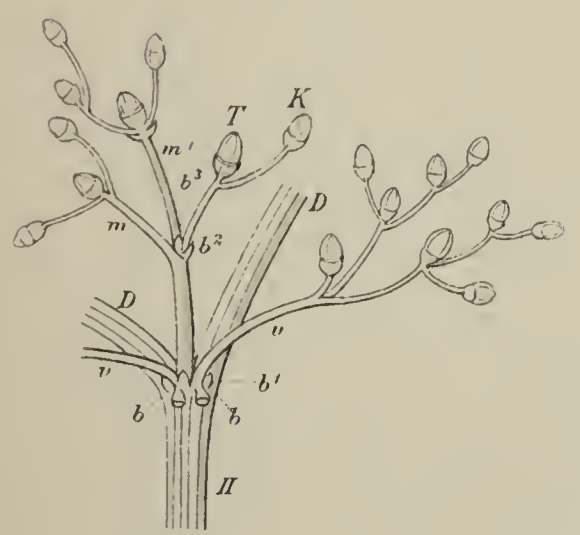
II B



II D

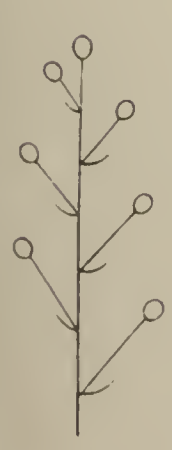


II A



II C

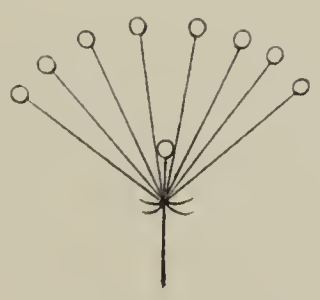
13



14

15

16



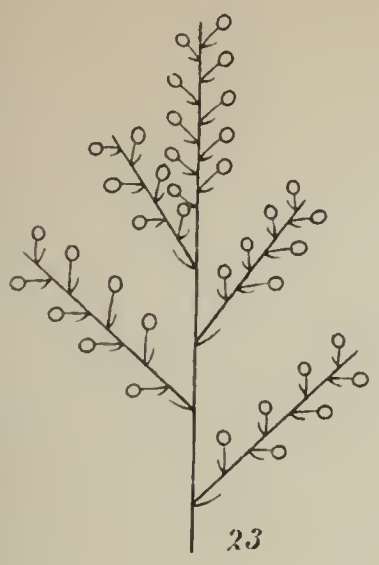
18

17

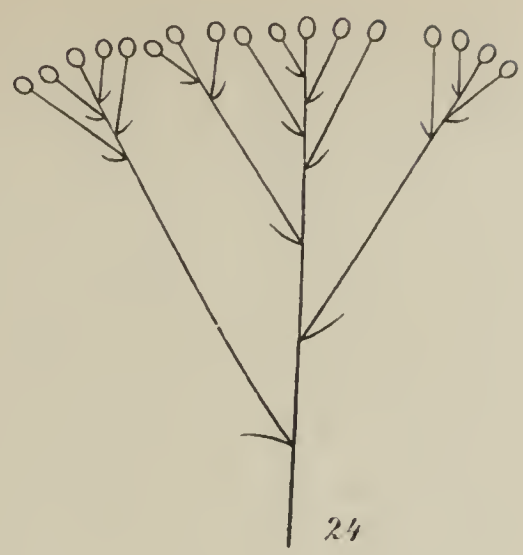
12

20

19



23

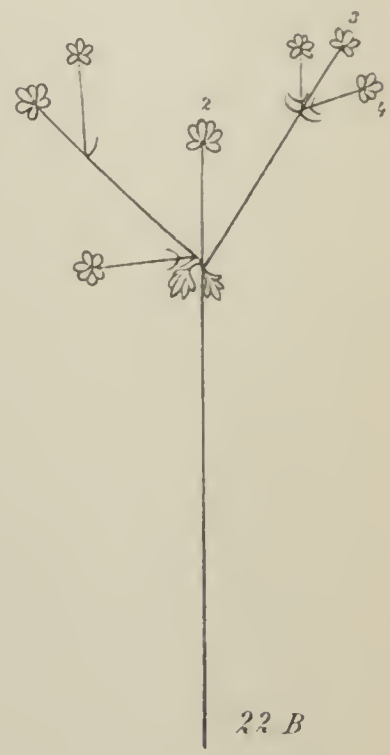


24

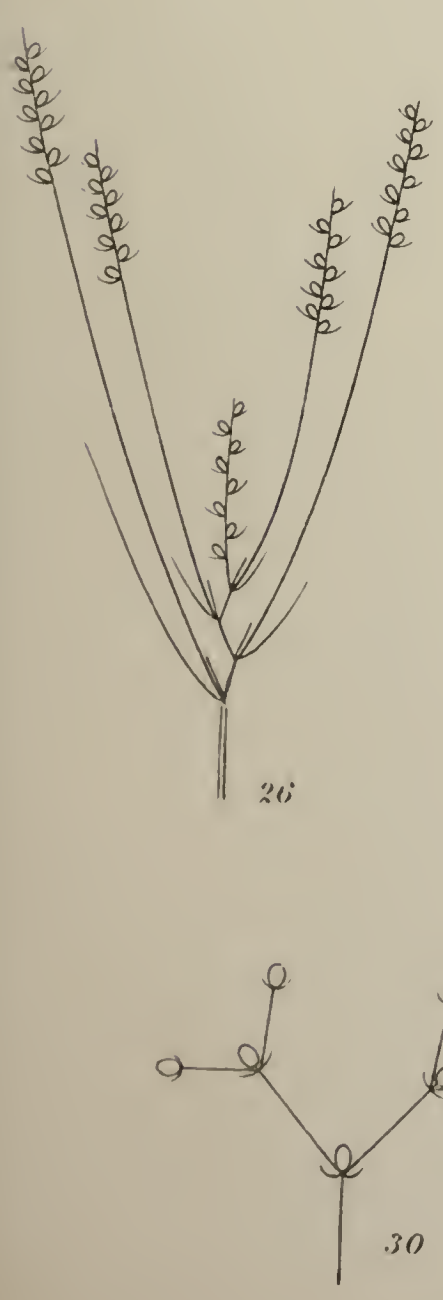
22 A

28

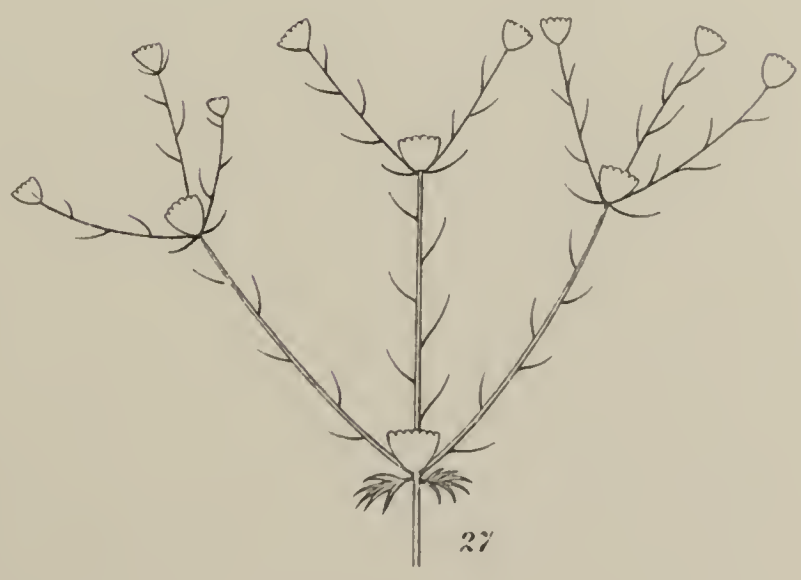
21



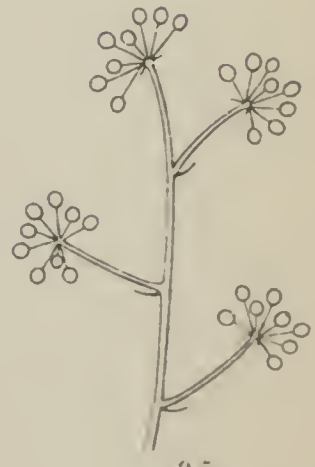
22 B



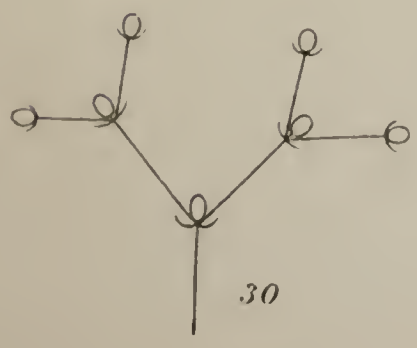
26



27

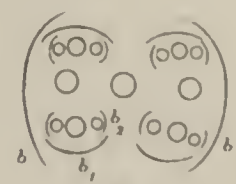


25

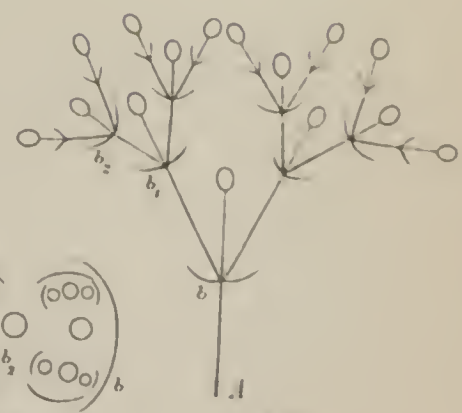


30

31

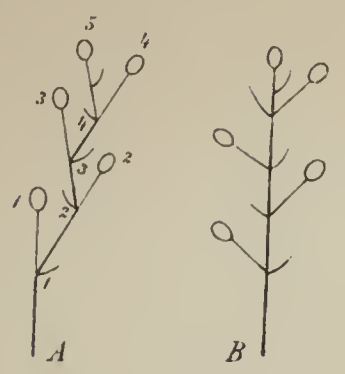


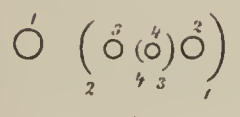
B



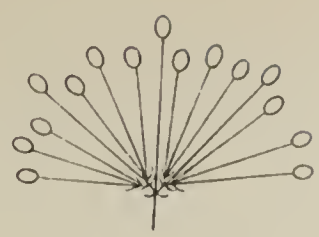
A

29

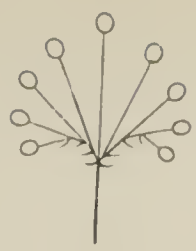




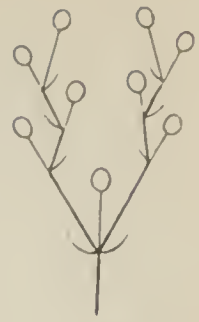
33



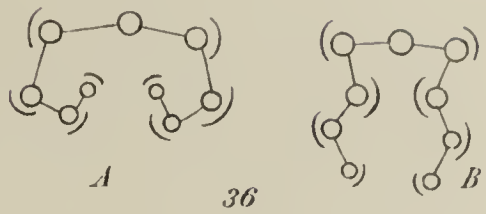
32



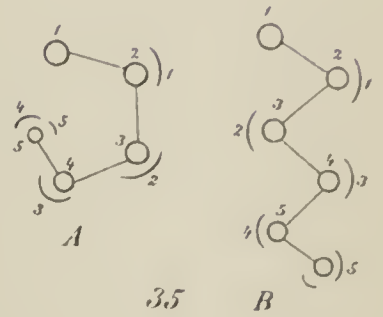
37



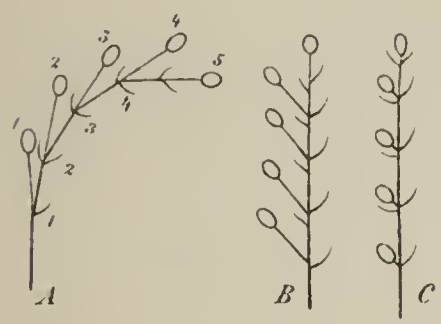
38

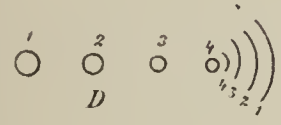


36



35





34

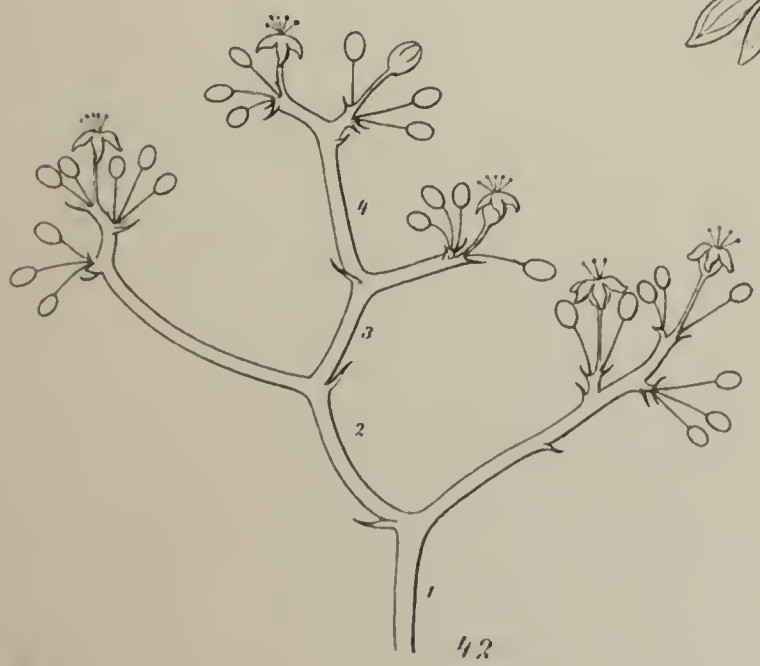
40

43

45

39.

44



42

41

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 21.

STUDIE
O VOLTAMETRU NA STŘÍBRO.

NAPSAL

VLADIMÍR NOVÁK,

ASSISTENT C. K. FYSIKÁLNÍHO ÚSTAVU ČESKÉ UNIVERSITY V PRAZE.

PŘEDLOŽENO DNE 26. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Ú V O D.

Intensitu proudu galvanického měříme způsobem trojím:

1. Kalorimetricky.
2. Elektromagneticky.
3. Elektrochemicky.

Poslední methodou graduují se galvanometry, sestrojují se škály ke strojům empirickým [1] tak zvaným voltmetrům a ampèremetrům, a v tomto způsobu jest tato methoda nejrozšířenější a nejužívanější.

Základ její spočívá na známých zákonech Faradayových [2] (1832, 1833). Faraday sám, jakož i jiní četní fysikové podrobili tyto zákony přečetným a důkladným zkouškám, rozkládajíce četné sloučeniny; tak byly elektrolysovány hlavně mnohé soli, a to jak ve vodě rozpuštěné, tak i soli tavené. Z těchto látek, které byly různým způsobem a v různých apparátech rozkládány, jsou důležitými hlavně *tři*, jež byly zvoleny za elektrolyty pro *měření intensity proudu.*

Jsou to: zředěná kyselina sírová, roztok (vodní) síranu měďnatého a roztok dusičnanu stříbrnatého; dle toho rozeznáváme také *tři druhy* apparátů na rozklad, tak zvaných *voltametrů* na *vodu*, na *měd* a na *stříbro* — jak se zkrátka vyjadřujeme.

Známe-li elektrochemické aequivalenty těchto látek, můžeme určiti »voltametricky« množství vyloučeného ionu za určitý čas a z těchto dát počítati intensitu proudu.

---

[1] Empirické tyto stroje, založené obyčejně na elektromagnetickém působení proudu — tedy na methodě druhé — mají pak přednost před měřením elektrochemickým intensity proudu, poněvadž udávají intensitu v každém okamžiku, kdežto voltametr vyžadující určitého času udává během onoho času intensitu střední. Eventuální variace měřené veličiny zůstávají nám při tom neznámy, a tak se omezuje měření voltametrické pouze na případ zvláštní, kdy totiž měříme proud intensity konstantní.

[2] Faraday: Exp. Res. Ser. 3. § 377; 7. § 783.

Jde-li o *měření přesná,* o graduování empirických strojů atd., užívá se nyní vesměs voltametru *nejspolehlivějšího,* totiž *voltametru na stříbro* a tím stává se tento stroj pro elektrochemické měření intensity proudu *strojem základním.*

Z toho vychází nutnost, znáti jak apparát tento, tak vše, co s ním a elektrolysou příslušné soli souvisí, co možná dokonale, a míníme tím nejen znalost vztahů mezi různými veličinami proměnnými *qualitativních*, nýbrž i *quantitativních.*

Prací touto chci podati *přehled* dosavadních výsledků o tomto předmětu v oddílu I., jakož i — v oddílu II. — přispěti k řešení otázek nových.

I.

1. Tvar voltametru na stříbro. Voltametru na stříbro dal první zvláštní formu Poggendorff.

Kathodou jest tu tyglík stříbrný spočívající na kovovém isolovaném podkladu. Anodou jest silný drát stříbrný ovázaný na konci jemným tkanivem, aby tvořící se superoxyd stříbra nepadal do roztoku.

F. Kohlrausch[3] nahradil tyglík stříbrný platinovým, poněvadž tyglík stříbrný měnil svou váhu, také v onom opatření proti padání superoxydu učinil změnu,[4] podstavil totiž pod anodu skleněnou mističku, drženou třemi skleněnými tyčinkami přes okraj tyglíku zahnutými.

V nejnovější době odporučuje se[5] poněkud změněná forma voltametru na stříbro. Kathoda má míti tvar misky, tedy rozměr šířky má značně převládati nad rozměrem výšky.

Za anodu klade se pak horizontálně deska stříbrná raději silnější, obalená čistým ssavým papírem.

V uvedených případech jest všude kathoda zároveň nádobou pro roztok; jiné formy voltametru na stříbro mají pro roztok nádobu zvláštní, skleněnou, do níž jsou elektrody ponořeny.

Podobá se tedy tento tvar voltametru přístroji na rozklad vůbec, kdežto dříve popisovaný voltametr jest i svou formou specielně voltametrem na stříbro.

Tak na př. užíval W. Hittorf[6] (v Münsteru) zvláštního apparátu na rozklad různých roztoků též pro rozklad dusičnanu stříbrnatého.

---

[3] F. Kohlrausch: »Ueber das elektrochemische Aequivalent des Silbers« Pogg. Ann. 149. pg. 171. 1873.

[4] F. & W. Kohlrausch: »Das elektrochemische Aequivalent des Silbers; zugleich eine Prüfung erdmagnetischer Intensitätsmessungen« Wied. Ann. 27. pg. 17. 1886.

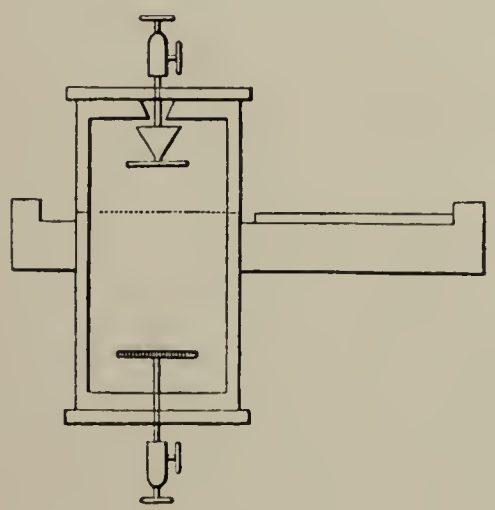
[5] »On the use of silver-voltameter« Electrician T. 27. 1891. p. 325.

[6] W. Hittorf: »Ueber die Wanderung der Ionen während der Elektrolyse« Pogg. Ann. 89. p. 177. 1853.

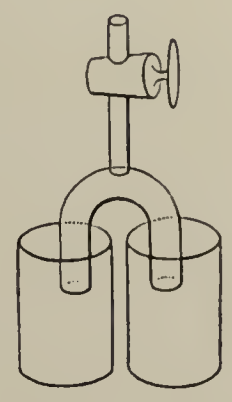
Vertikální průřez tohoto apparátu okazuje obr. 1. Kathodou je platinový kužel, nesoucí na svém vrchole dolů mířícím desku skleněnou, aby částice stříbra nepadaly dolů; anoda blízko u dna nádoby upevněná byla z plechu stříbrného a provrtána četnými otvory, aby roztok nad ní elektrolysou houstnoucí stékal ke dnu. Roztok u kathody bylo lze po pokusu — sešinutím hořejší části stroje — odděliti od roztoku ostatního.

Voltametr velmi jednoduché formy sestrojil Th. Gray.[7] Jesti to válcovitá, skleněná nádoba, do níž jsou ponořeny dvě desky stříbrné (krajní), představující anodu, mezi nimi pak nalézá se kathoda, taktéž deska stříbrná. Anodové plechy byly obyčejně menší než kathoda, aby při dosti malé vzdálenosti ploch byly přece hrany elektrod co možná vzdáleny.

Obr. 1.



Obr. 2.



Tohoto tvaru voltametru užíval též F. Kohlrausch[8] v jiném toliko uspořádání. Stříbrná anoda stála ve zvláštní mělké nádobce skleněné, aby odpadávající superoxyd byl oddělen od hlavní nádoby, kde by se mohl eventuelně smísiti s ulomenými krystalky stříbrnými.

Aby se tomuto smíšení superoxydu s odpadlými částkami stříbra zúplna zabránilo, konstruoval F. Kohlrausch[9] voltametr ze dvou stejných nádob, spojených násoskou, jak to schematicky ukazuje obr. 2. Plnění násosky děje se ponořením konců do nádob s roztokem a ssáním vzduchu z prostřední roury, která se uzavírá kohoutem. Obě oddělené elektrody byly ze stříbra.

Voltametr tento vyznačoval se velikým vnitřním odporem, tak že změny tohoto odporu působené rozkladem byly eliminovány teprve při proudu, jehož napjetí bylo 25 Volt, při čemž vnější odpor činil 100 S. J.

Jaksi *na rozhraní* mezi voltametrem Poggendorffovým a voltametrem s elektrodami rovinnými stojí voltametr, který sestrojili k účelům měření *Potier*

---

[7] Thomas Gray: »On the Electrolysis of Silver and of Copper, and the Application of Electrolysis to the Standardizing of Electric Current- and Potentialmeters« Phil. Mag. 5. 22. pag. 392. 1886.

[8] l. c. pag. 18.

[9] F. Kohlrausch l. c. pag 17.

a Pellat.[10] Anoda (z chem. čistého stříbra) podoby náprstku průměru 2·6 *cm* ponořena byla do roztoku v nádobě skleněné (4 *cm* hluboko) a obklopena válcovitou kathodou ze stříbrného plechu (ponořenou 5 *cm* hluboko).

Myšlénka, jakou měli Potier a Pellat při konstrukci tohoto apparátu, vysvitne z úvah následujících, jednajících o výhodách a nedostatcích oněch dvou užívaných forem voltametru na stříbro.

Veliká *přednost voltametru Poggendorffova* záleží v tom, že kathoda — tedy část přístroje pro měření nejdůležitější — jest zároveň *nádobou* pro roztok a pro vyloučené stříbro. Jak později vysvitne, mají všechny hrany elektrod na způsob vylučování se stříbra vliv nepříznivý a tu má voltametr Poggendorffův druhou svou výhodu: jeho kathoda i anoda *hran vůbec nemá.*

Naproti těmto přednostem stojí však některé vady. Kathodu formy tyglíku nelze tak snadno vyprati, jako na př. desku rovnou, rozklad nelze tak pozorovati jako v nádobě průhledné, skleněné a konečně forma jak anody, tak kathody nedovoluje téměř *ničeho* bližšího říci o tak zvané *hustotě proudu*, na níž, jak seznáme, při měření přesném záleží.

Těchto *vad nemá* voltametr formy druhé — *nemá však* také uvedených *předností voltametru Poggendorffova,* tak že rozhodnutí ve prospěch některé ze jmenovaných forem závisí na tom, zdali jsou přednosti formy prvé větší, než její vady.

Nechci na tomto místě dále se šířiti o otázce přednosti jedné či druhé formy, ani posuzovati, jak dalece voltametr Peltier-Pellatův je vhodným či nevhodným, neboť poznáme ještě celou řadu faktorů podmiňujících správnost a přesnost měření voltametrických a teprve potom budeme moci kritisovati nestranně a úplně.

2. O elektrodách. Poznali jsme, že původně užívalo se elektrod stříbrných a teprve později že zavedena za kathodu elektroda platinová.[11] Příčina toho bude asi snadné poškození stříbra na př. dotknutím se rukou, dechem a pod. Nyní se užívá výhradně tyglíků platinových. Anoda, ať ve formě desky, neb tyče či drátu, je vždy stříbrná, aby se roztok nahrazoval. Že by někdo byl užil k účelům měření voltametru na stříbro s oběma elektrodami platinovými, není mi známo.

Před pokusem se elektrody dobře očistí.

Při vážení nutno užívati vah jemných a citlivých. Neboť jak dále bude obšírněji vyloženo, nelze pro voltametry obyčejných rozměrů překročiti v intensitě mez 0·1 Ampère, tak že proudem hodinu trvajícím se vylučuje 402·48 *mg* stříbra. Tato veličina se pak neurčuje přímo, nýbrž rozdílem dvou čísel daleko

---

[10] Potier a Pellat: »Équivalent électrolytique de l'argent« Jour. d. Phys. (2). 9. p. 381. 1890. — Wied. Beibl. 11. 1890. pg. 1171.

[11] F. a W Kohlrausch l. c. — Kohlrausch praví (l. c.) o kathodě stříbrné: »Ein schon oft für voltametrische Zwecke gebrauchter Silbertiegel gab keine constanten Wägungsresultate. Wiederholtes Auswaschen liess immer noch eine Abnahme des Gewichts wahrnehmen.«

větších 80krát až 100krát větších a proto nutno vážiti pro ono větší zatížení na 0·1 *mg* přesně, má-li býti měření voltametrické přesnější než na 0·1%.

Chci připomenouti, že korrekce vzhledem k vážení ve vzduchu nepadají zde téměř na váhu. Vážíme-li závažím mosazným, jest korrekční koefficient pro stříbro:

—0·00002

(ovšem pro platinu —0·00008)

Činíme-li však rozdíl dvou vážení, připojuje se ona korrekce právě jen k rozdílu udávajícímu množství vyloučeného stříbra (tedy koefficientem —0·00002), a jest její hodnota na př. pro množství 402·48 výše uvedené 0·008 *mg*, tedy obnáší toliko 0·002%.

3. O roztoku. Elektrolytem bývá všeobecně neutrální roztok dusičnanu stříbrnatého ($AgNO_3$) ve vodě. Z tohoto roztoku, jak se udává, vylučuje se stříbro *velmi kompaktně* a dobře drží na stěnách, když se přidá něco *octanu stříbrnatého*. Bylo však od tohoto míchání dvou různých elektrolytů upuštěno, poněvadž kompaktní vylučování stříbra má tu nemilou stránku, že nelze kathody vyprati od soli stříbrnaté. Lord Rayleigh,[12] který z počátku také do roztoku přidával octanu stříbrnatého, sám prohlašuje tuto manipulaci za nevhodnou, pravě, že ani červeným žárem nemohl sůl z kathody vypuditi.

Otázka, která koncentrace roztoku se pro účel měření nejlépe hodí, zdá se, že není úplně rozhodnuta.

F. Kohlrausch[13] pracoval při prvém určování elektrochemického aequivalentu stříbra (r. 1873) s roztokem 15% (dle váhy), při druhém určení (1886) elektrolysoval roztoky[14] 20%, 30%, 40%, ano i 50%. Dle jeho výsledků, které při těchto tak různých koncentracích ukazují velmi dobrý souhlas, zdálo by se, že při rozkladu dusičnanu stříbrnatého *nezáleží na koncentraci roztoku*, alespoň jde-li nám pouze o množství vyloučeného stříbra.

Tohoto domnění byli asi mnozí jiní fysikové, kteří otázku tuto dále nestudovali a kteří užívali přirozeně roztoku nejméně koncentrovaného, totiž 15%. 15procentní roztok rozkládal na příklad Lord Rayleigh,[12] Potier a Pellat,[15] A. Koepsel.[16]

Naproti tomu praví Th. Gray,[17] že nejlepších výsledků nabyl při elektrolysi *roztoku* 5% a že *roztoky* koncentrovanější *nad* 10% nelze *nijak doporučiti*. Nějakým důvodem hlubším výrok svůj Gray nepodpírá; snad ho k onomu závěru přivedla okolnost, že pouze při těchto slabších roztocích (a při určité hustotě proudu) mohl určovati intensitu též z množství stříbra na anodě *roz-*

---

[12] Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick: On the electro-chemical Equivalent of Silver and on the Absolute Electromotive Force of Clark Cells. Phil. Trans. 1884 (2), 411; Proc. Roy. Soc. XXXVI. p. 448 & XXXVII. p. 142.

[13] F. Kohlrausch l. c.

[14] F. & W. Kohlrausch l. c.

[15] Potier & Pellat l. c.

[16] A. Koepsel l. c. připravil z počátku roztok 20%, který pak již upotřebený zředil na 15% až 12%.

[17] Thomas Gray l. c.

puštěného, které onomu *vyloučenému bylo* v tom případě *rovno*. Jinak při roztocích hustších (nebo při větší hustotě proudu) byla vždy ztráta anody větší než zisk kathody.

4. Voltametr v činnosti. Vedeme-li voltametrem proud, dusičnan stříbrnatý se rozkládá a na kathodě se vylučuje stříbro.

Právě toto vylučování se stříbra je tak zajímavé a rozmanité, že třeba o něm se šířeji zmíniti. Závisí totiž způsob vylučování se stříbra na hustotě proudu, t. j. intensitě proudu přepočítané na jedničku průřezu (1 cm^2).

Je-li hustota proudu menší než 0·04 $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$ vylučuje se stříbro v jemných drobounkých krystalcích, usazujících se obyčejně ve vertikálních proužcích tvořených bezpochyby vystupujícími bublinkami vodíku, které zachovávají cestu jednou proklestěnou.

Překročíme-li udanou mez ve smyslu větší hustoty, pak vyrůstá stříbro na kathodě ve formě stromečků, které se rozvětvují a míří k anodě. Je-li roztok zároveň více než 25%, naplní se celý tyglík stříbrnými stromečky.[18] Při tom je neustále patrna forma krystalinická pouhým okem nebo nepatrným zvětšením. Krystalky jsou krychle, nebo osmistěny anebo kombinace obou těchto tvarův.

Je-li anoda tyčí stříbrnou přišpičatělou a mířící ke středu kruhového dna platinového tyglíku, tu za jistých poměrů (nezáleží pouze na hustotě proudu a koncentraci, ale vyžaduje se i veliká elektromotorická síla)[19] vyrůstají krystalky radiálně ze středu dna. Má-li anoda podobu podkovy, jejíž konce zašpičatělé míří ke dnu kathody — objeví se na této dva takové středy, z nichž radiálně krystalky stříbra vyrůstají, tak že máme dojem, jakoby se obraz anody promítal na kathodu.

Se stoupající hustotou proudu stávají se stromečky něžnějšími, stříbro vyrůstá v teninkých lístcích a téměř v nitkách velmi silného lesku; pokračujeme-li pak ještě dále ve zvyšování hustoty, pak objeví se stříbro *pro pouhé oko amorfní*. Vylučuje se v chomáčcích a vločkách barvy *téměř bílé*, někdy *žlutošedé*, při veliké hustotě proudu jest úplně *černé*. V tomto posledním případě jeví se zajímavá zvláštnost — pozorovaná prvně *Poggendorffem*[20] — jakmile se totiž proud přeruší, pak ono černé zabarvení »jako bleskem« zmizí a chomáčky nabudou barvy žlutošedé, nebo světle šedé.

Úkaz tento lze spojiti s předešlým, neboť velmi často některá větvička stříbrného stromečku tak se anodě přiblíží, že se na ní hustota proudu značně proti ostatním částem kathody zvětší; pak vidíme, kterak konečky onoho stromečku černají.

Proměna onoho černého stříbra v šedobílé děje se též ve styku s kyselinou sírovou neb dusičnou a ammoniakem.

---

[18] M. Kirmis: »Ueber einige Formen des auf galvanischem Wege erhaltenen Silbers« Pogg. Ann. 158. pag. 121. 1876. — Až 130 Daniellových článků užíval Kirmis.

[19] Poggendorff: »Ueber die angeblichen Hydrüre des Silbers« Pogg. Ann. 75. pg. 337. 1848.

[20] Poggendorff l. c.

Původně považoval se tento černý prášek za hydrid stříbra $Ag_2 H_2$, Poggendorff však tento náhled vyvrátil a dokázal, že jest to stříbro velice jemně rozptýlené. Ano Kirmis [21] tvrdí, že při náležitém zvětšení lze v onom šedobílém zdánlivě amorfním stříbře poznati pod drobnohledem určitě krystalinickou strukturu.

Tvoření se této modifikace stříbra pozoroval již před Poggendorffem r. 1839 Fechner [22] za následujících okolností. Ponořil totiž tyčinku ze zinku nebo cínu do roztoku dusičnanu stříbrnatého (asi 8%). Stříbro se při tom sráželo na tyčince a tvořilo článek, jehož proud rozkládaje roztok nové a nové stříbro na tyčince vylučoval. Okolo tyčinky povstaly radiálně jakoby »hnědé vousy«, ze kterých tu a tam vyrůstaly stříbrné větvičky.

Jest patrno, že pro účely měření, kdy se tedy jedná určiti vážením přesně množství vyloučeného stříbra, hodí se *jenom* onen *první způsob* vylučování se stříbra, totiž drobných na kathodě co možná lpících krystalků.

Z toho pak plyne důležité pravidlo pro užívání voltametru na stříbro, týkající se hustoty proudu. *Tato hustota nesmí totiž překročiti jisté meze*, má-li býti stříbro vyloučené kompaktní, držeti na stěnách atd. Tu se pak objevuje ona zmíněná přednost voltametru s deskami rovinnými před formou tyglíku. U voltametru prvního jest hustota proudu na všech místech elektrod téměř stejna, kdežto u voltametru druhého jest patrně nejen na malé anodě daleko větší než na kathodě, ale i na této na různých místech různa.

Kirmis udává mez hustoty, jak jsme viděli, pouze hořejší	— 0·04	$\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$
F. Kohlrausch [23] pro hustotu na kathodě (tyglík)	0·03 — 0·06	»
Th. Gray [23] pak čísla daleko menší (pro kath. rovinnou)	0·0017 — 0·0050	»
Potier & Pellat [23] užívali při svých měřeních hustoty	0·01	»
a podobně J. Vanni [24] asi	0·012	»

Čísla pro hustotu proudu při užívání tyglíku ukazují alespoň v řádu souhlas, naproti tomu čísla Gray-ova pro rovinnou kathodu jsou desetkrát menší. Než nesmíme zapomínati, že tato čísla udávají hustotu střední, od které se při voltametru Poggendorffově může hustota lokální velmi značně lišiti. Dále při užívání kathody ve formě desky nepřipustí asi vliv hran větší hustoty proudu, jaká ve voltametru tyglíkovém který jest bez hran, není na závadu.

Někde se klade obzvláštní na to důraz, aby se stříbro vylučovalo kompaktně, aby pevně drželo na stěnách kathody, čímž prý se ztráty při vypírání zamezí.

Uvedl jsem, jakým způsobem se hledí docíliti tohoto způsobu vylučování, totiž přidáním octanu stříbrnatého do roztoku; sem náleží novější předpis

---

[21] Kirmis l. c.

[22] Fechner G. Th.: »Beitrag zu den elektrochemischen Merkwürdigkeiten der salpetersauren Silberlösung« Pogg. Ann. 47. pg 1. 1839.

[23] F. & W. Kohlrausch l. c. Th. Gray l. c. Potier & Pellat l. c.

[24] J. Vanni: »Ueber die scheinbare Veränderlichkeit des elektrochemischen Aequivalents des Kupfers«. — Wied. Ann. 44. pg. 214. 1891.

A. Koepsela,[25] který staví voltametr do tajícího sněhu tak, aby temperatura roztoku byla 0^0 a stálá. Za těchto okolností vyloučené stříbro je prý velmi kompaktní, drží na kathodě velmi dobře a lze prý tyglík snadno od dusičnanu vyprati.

Vizme dále, co se děje při rozkladu s anodou. Ta pokrývá se práškem tmavým, téměř černým, který se všeobecně prohlašuje za superoxyd stříbra.

Tvoření tohoto superoxydu pozoroval prvý Ritter[26] vloživ tyč stříbrnou spojenou s kouskem burele do vody; tyč se pokrývala černým práškem a bublinkami plynu.

Nyní známe tři methody, jakými lze superoxyd stříbra připraviti ve větším množství:

1. Rozkladem dusičnanu stříbrnatého proudem galvanickým.

Při tom se užívá silných proudů a roztoku nad $10^0/_0$. Tak připravoval na př. Fischer[27] tento superoxyd proudem 4 Bunsenových článků vedeným roztokem $10—12^0/_0$; během jedné hodiny utvořily se až 2 gramy té látky.

Mahla[28] užíval dvou článků Grove.

Böttger[29] vedl proud 2 Bunsenových článků roztokem koncentrovaným, Wallquist[30] sestavil více článků Bunsenových ku přípravě superoxydu, Berthelot,[31] jehož práce je v té otázce asi nejnovější, užil proudu 4 článků Bunsenových a roztoku $10^0/_0$.

Takto připravený superoxyd jest černý, krystalinický ve velkých a silných jehlách ryhovaných, lesknoucích se silným leskem kovovým.

Dle Wallquista a Mahly jsou krystaly ony oktaedry, dle Grotthuse[32] jsou to tetraedry.

Látka tato jest velmi nestálá; ať na vzduchu či pod vodou, tratí po krátkém čase krystaly svůj kovový lesk a rozpadávají se na černý amorfní prášek. Rozklad je provázen vyvíjením se kyslíku a urychluje se stoupající temperaturou. Něco nad 100^0 (dle Berthelota; při 110^0 dle Mahly) smudí, při čemž z něho vystupují žlutavé páry a vypouští kyslík. Po té lze z něho vyprati dusičnan stříbrnatý, což před tím není možno.

V ammoniaku rozpouští se »superoxyd« čiře a úplně za hojného vyvíjení se dusíku a tvoří se Berthelotovo třaskavé stříbro, které v nadbytku ammoniaku zůstává rozpuštěno. Tento roztok na malé, železné lžičce zahřát a odpařen dává silný výbuch.[33]

V kyselině dusičné rozpouští se superoxyd barvou temně hnědou (dle Fischera[34] barvou portského vína) a roztok tento v chladu chovaný jest stálý;

---

[25] Koepsel l. c. viz pozn.
[26] Ritter: Gilb. Ann. 2. p. 82 1799.
[27] Fischer: J. pr. Chem. 33. pg. 237.
[28] Mahla Jahresber. üb. Fort. d. Chemie p. 423. 1852.
[29] Böttger » » » » » » 373. 1870.
[30] Wallquist: J. pr. Chem. 31. pg. 179.
[31] Berthelot: »Sur le tritoxyd d'argente« Compt. Rend. 90. pg. 653. 1880.
[32] Grotthus: Gilb. Ann. 61. pg. 60.
[33] Böttger: Jahresber. üb. Fort. d. Chem. pg. 179. 1873.
[34] Fischer: Kastners Archiv XVI. pg. 215.

zředěním vodou se superoxyd vylučuje, ale ihned zase rozkládá, při čemž kyslík houfně prchá; roztok je pak úplně čirý.[35] Podobně se vyčíří roztok zahřátím.

Chlorovodíkem mění se na chlorid stříbrnatý (Ritter, Wallquist). V koncentrované kyselině sírové dává černozelený roztok, který se dlouho udržuje, zahřátím však — nebo přilitím vody — odbarvuje.[36] Vodíkem se za studena neredukuje, teprv při ohřátí nastává redukce zcela klidná.

Na prášek utlučený a politý kapkou oleje karafiátového se zapaluje a vylučuje se čisté krystalinické stříbro.[37]

2. Jinak lze prý — dle Schönbeina — připraviti superoxyd stříbra působením ozonu na stříbro.

3. Konečně se připravuje[38] černý superoxyd amorfní vedením proudu několika článků Bunsenových voltametrem s anodou stříbrnou, naplněným vodou, jež jest okyselena kyselinou sírovou.

Nás ovšem zajímá nejvíce způsob přípravy prvý, poněvadž souvisí s rozkladem dusičnanu stříbrnatého a jest tudíž také předmětem této práce.

Důležitou vlastností superoxydu dle 1. připraveného jest, že obsahuje dusík. Tím pak se liší od superoxydů dle 2. a 3. připravených, jakož i svou krystalinickou formou. Tvar krystalu připomínal by individuální sloučeninu chemickou; než vizme, co praví různé analysy o této látce. Přehledně ukazuje výsledky analys tabulka 1.

1. tabulka: Přehled analys superoxydu stříbra.[39]

Autor	Obsah v procentech					Formule
	Ag	O	H_2O			
Wallquist	87·23 (87·1)	12·77 (12·9)				Ag_2O_2
Fischer	78 9 (78 95)	4·6 (4·68)	2·5 (2·62)	7·9 (N_2O_5) (7·90)		$2\,Ag_2O_2 + AgNO_3 + H_2O$
Mahla	81·18 (81·10)	16·03 (16·02)	1·17 (1·13)	1·77 (N) (1·75)		$5\,Ag_2O_2 + 2\,AgNO_3 + H_2O$
Berthelot	76·5 (76·3)	8·9 (9·0)	1·3 (1·3)	1·9 (2·0)	11·4 (O) (11·4)	$4\,Ag_2O_3 + 2\,AgNO_3 + H_2O$

Čísla v závorkách dávají obsah v procentech počítaný dle navržené formule.

Již z prvního sloupce udávajícího procentuální obsah stříbra jde na jevo, zvláště při onom souhlasu mezi výpočtem a měřením — že nebyla v uvedených případech analysována táž látka individuální — neboť by se nemohly objeviti rozdíly až 11%! Pravděpodobnou zdá se hypothesa, kterou Berthelot uvádí,

[35] Schönbein: J. pr. Chemie 74. pg. 325.
[36] H. Rose: Handbuch der anal. Chemie, Leipzig 1867, pg. 347.
[37] Böttger: Jahresber. üb. Fort. d. Chemie pg. 179. 1873.
[38] Wöhler: » » » » » » 192. 1868.
[39] Čísla jsou vyňata z příslušných pojednání dříve citovaných.

že superoxyd je velmi nestálý a neustále se rozkládá. Tomu by odpovídal různý způsob manipulace při analysách zmíněných. Mahla na př. vypíral superoxyd od dusičnanu stříbrnatého po několik dní, Fischer sušil tuto látku v temperatuře 30^0, Berthelot pak analysoval látku hned z voltametru vyjmutou a osušenou pouze ssavým papírem.

Z toho ze všeho jest patrno, že tato otázka daleko ještě není řešena a že jest otázkou sama pro sebe vyžadující k řešení svému práce soustavné, jak fysika, tak i chemika.

Nejméně víme o tom, co se děje při elektrolyse s roztokem.

Uvádí se sice v některých učebnicích[40] na př. tento rozklad dusičnanu stříbrnatého:

$$\overbrace{Ag\ NO_3}$$
$$Ag \qquad NO_3$$
$$NO_3 + Ag\ NO_3 = N_2O_5 + Ag\ O$$
a zároveň $$N_2O_5 + H_2O = 2\ HNO_3$$

Mnohé však okolnosti tomu nasvědčují, že jsou zde processy daleko složitější. Je totiž jisto, že jak na anodě tak na kathodě vystupují bublinky plynu (kyslíku a vodíku) často tak nepatrné, že ovšem oku unikají, jindy však — za poměrů příznivých přímo v oči bijící.

Vzhledem k tomu pak nestačí tento jednoduchý výklad a musíme předpokládati rozklad složitější. Uvedený rozklad jest jaksi jenom částí děje, který se při elektrolyse dusičnanu stříbrnatého odehrává a který ve své úplnosti dosud je nám neznámým. Známe pouze dva produkty akcí sekundárních — superoxyd na anodě se tvořící a volnou kyselinu dusičnou v roztoku povstávající — dle toho pak je výklad upravený. Shledalo se však — jak později se ukáže — že superoxyd elektrolysou utvořený nemá tak jednoduchého složení, jaké náš výklad uvádí, že v některých případech kyselina dusičná rozpouští tento superoxyd, čímž jenom další a složitější sloučeniny povstávají.

Chemické tyto změny roztoku elektrolysou způsobené nejsou nikterak soustavně studovány ani qualitativně, ačkoliv jsou veliké důležitosti. Ony zajisté mění vnitřní odpor voltametru, mění hustotu proudu, a mohou snad — soudě dle analogie voltametru na měď — v některých případech zasáhnouti i vyloučené stříbro na kathodě.

V tom je pak veliká přednost voltametru na stříbro před jiným, že sekundární akce poruší jeho udání jen v případech velmi řídkých za okolností, kterým se snadno a úplně můžeme vyhnouti.

Mimo tyto změny chemické sluší uvésti ještě zahřívání se roztoku a změnu koncentrace roztoku.

Roztok při rozkladu se zahřívá, čímž se jeho vodivost zvyšuje[41] a tak vnitřní odpor voltametru mění.

---

[40] Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. Auflage von L. Pfaundler 1888—90.

[41] V pojednání F. & W. Kohlrausche (několikrát již citovaném) se praví: »... allein die Widerstandsänderung durch die Stromwärme bewirkt unter gewöhnlichen Verhältnissen anfangs ein rasches Anwachsen des Stromes.«

Aby tato změna v odporu — jakož i jinými příčinami způsobené podobné změny — na celkový odpor v kruhu neměla vlivu, užívá se při měření *výhradně napjatých proudů.*

Tak měl na př. F. Kohlrausch při stanovení elektrochemického aequivalentu stříbra jednou proud 10 článků Daniellových zeslabený ballastem 20 S. J., podruhé pak proud 25 Volt s vloženým odporem 100 S. J.

Potier & Pellat [42] spojili 20 článků Daniellových za sebou.

Thomas Gray [43] užíval až 6ti akkumulatorů.

Tím odstraněn byl vliv změn odporu i jinak způsobených a z těch uvésti dlužno sem náležející změnu v koncentraci roztoku rozkladem působenou. Stává se totiž roztok na anodě hustším a na kathodě řidším následkem nestejné rychlosti v pochodu ionů.

Následující tabulka sestavená z čísel udaných W. Hittorfem [44] ukazuje přehledně, jak asi veliké jsou tyto změny v roztoku u kathody při různé koncentraci roztoku a intensitě proudu.

2. tabulka: Změna koncentrace roztoku na kathodě.

Roztok	Specif. váha	Při t^0	Intensita Ampère	Ag Cl v grammech		Obsah v procentech	
				před elekt.	po elekt.	před elekt.	po elekt.
I	1·3079	11·1	0 2085	17·4624	16·9796	28·9	27·6
II	1·2788	19·2	0·3162	15·9364	14·7233	26·7	24·6
III	1·1534	18·4	0·2034	8·6883	7·9569	16·1	14·7
IV	1·0774	18·8	0·2256	4·4156	4·1080	8·6	8·0
V	1·0558	19·2	0·2348	3·1731	2·8985	6·4	5·8
VI	1·0343	18·4	0·1594	1·9605	1·7350	4·0	3·5
VII	1·0166	18 5	0·0810	0·9485	0·7758	2 9	2·4
VIII	1·0076	18·6	0·0686	0·4515	0·3197	0·9	0·6
IX	1·0044	9·6	0·0205	0·1916	0·1316	0·5	0·3

Čísla ve sloupci pro intensitu a čísla dvou posledních sloupců jsou pro přehled dle dát Hittorfových vypočtena.

5. O přesnosti měření intensity proudu voltametrem na stříbro.

Jaké přesnosti lze dosáhnouti při měření intensity voltametrem na stříbro, poznáme nejlépe z výsledků měření fundamentálních, týkajících se elektrochemického aequivalentu stříbra.

Výsledky tyto tabelárně sestavené ukazuje tabulka č. 3.

Z těchto čísel poznáváme přesnost voltametrického měření, pokud ovšem přesnost měření magnetického jest větší.

---

[42] Potier & Pellat l. c.

[43] Thomas Gray l. c. pg. 410.

[44] W. Hittorf: »Ueber die Wanderung der Ionen während der Elektrolyse« Pogg. Ann. 89. pg. 187. 1853.

3. tabulka: Přehled měření elektrochemického aequivalentu stříbra.

Autor	Datum	Hodnoty jednotlivých měření	Hodnota střední
F. Kohlrausch	1873	1·1362 65 62	1·1363
F. & W. Kohlrausch	1881	(1) 1·1186 (½) 81 (½) 80 (½) 82 (1) 84	1·11833
» » »	1883	(1) 1·1182 (1) 83 (1) 83 (½) 80	1·11822
Mascart	1883		1·1156 [45]
F. Rayleigh	1884		1·11794
Th. Gray	1886	1·1182 85 83	1·11833
Potier & Pellat	1890	1·1189 95	1·1192

Nejvíce nás poučují hodnoty jednotlivých měření, na př. čísla Kohlrauschova z roku 1881 a 1883. Počítáme-li z nich, berouce ohled na platnost jednotlivých pozorování (v závorce připojenou) hodnotu střední, činí tato

1·11828

a jest pak chyba střední jednotlivého pozorování	± 0·00019	0·02 %
» pravděpodobná » »	± 0·00012	0·01 %
a chyba střední onoho arithm. středu	± 0·00005	0·005%
» pravděpodobná » »	± 0·00003	0·003%

Náleží tudíž dle těchto výsledků měření voltametrické mezi měření velmi přesná.

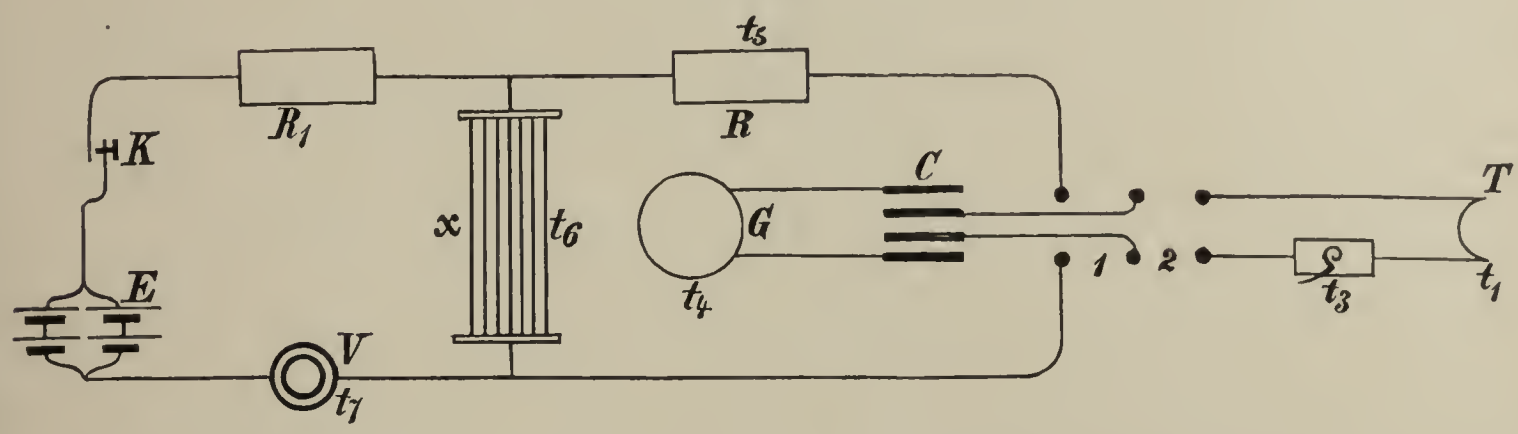
---

[45] Hodnota autorem samým opravená z dřívější 1·1134 [J. d. phys. 3. p. 283. 1884.

II.

1. Měření intensity. Měření intensity proudu dálo se methodou, kterou popsal W. Kohlrausch roku 1886 v »Berl. Elektrotechnische Zeitschrift«.[46] Methoda tato, zakládající se na rozvětvení proudu znázorněna jest schematicky obr. 3.

Obr. 3.



Ve hlavním kruhu jest voltametr V, batterie dvou dvojic článků Daniellových, rheostat R_1 a klíč K.

Hlavní kruh dělí se ve dvě větve, z nichž jedna obsahuje odpor x, druhá pak vede ku krajním svorkám rozvětvovače, který postavením (1) uzavírá spojení galvanometru s touto větví, postavením (2) pak realisuje spojení galvanometru s thermoelementem T.

Je-li intensita hlavního kruhu $\mathcal{J}$, úchylka galvanometru způsobená tímto proudem ve větvi (1) α, úchylka proudem thermoelementu ve větvi (2) δ, odpor ve větvi (1) R, pak jest

$$\mathcal{J} = \text{const} \frac{R\,\alpha}{\delta},$$

kde ona konstanta jest poměrem elektromotorické síly thermoelementu k odporu větve (2).

Tvar a uspořádání voltametru ukazuje obr. 4.

Kathodou byl tyglík platinový, 6 *cm* vysoký v průměru dole 2·8 *cm*, nahoře 5 *cm* měřící; spočíval na kovové podložce vyložené slabým plíškem platinovým, kterýž kontakt se velmi dobře osvědčil, maje před všelikým upevňováním péry a pod. patrné přednosti. Vnitřní plocha působící měřila 70 cm^2. Anodou byla tyč stříbrná[47] 7 *mm* v průměru, pod níž se podložila skleněná mistička držená třemi skleněnými tyčinkami, jak to jest na obrazci 4. tečkováním naznačeno.

[46] W. Kohlrausch: »Eine bequeme Methode der Messung von Stromstärke und ihre Verwerthung zur Aichung technischer Strom- und Spannungszeiger.« Berlin. Elektrotech. Zeitsch. pg. 273. 1886.

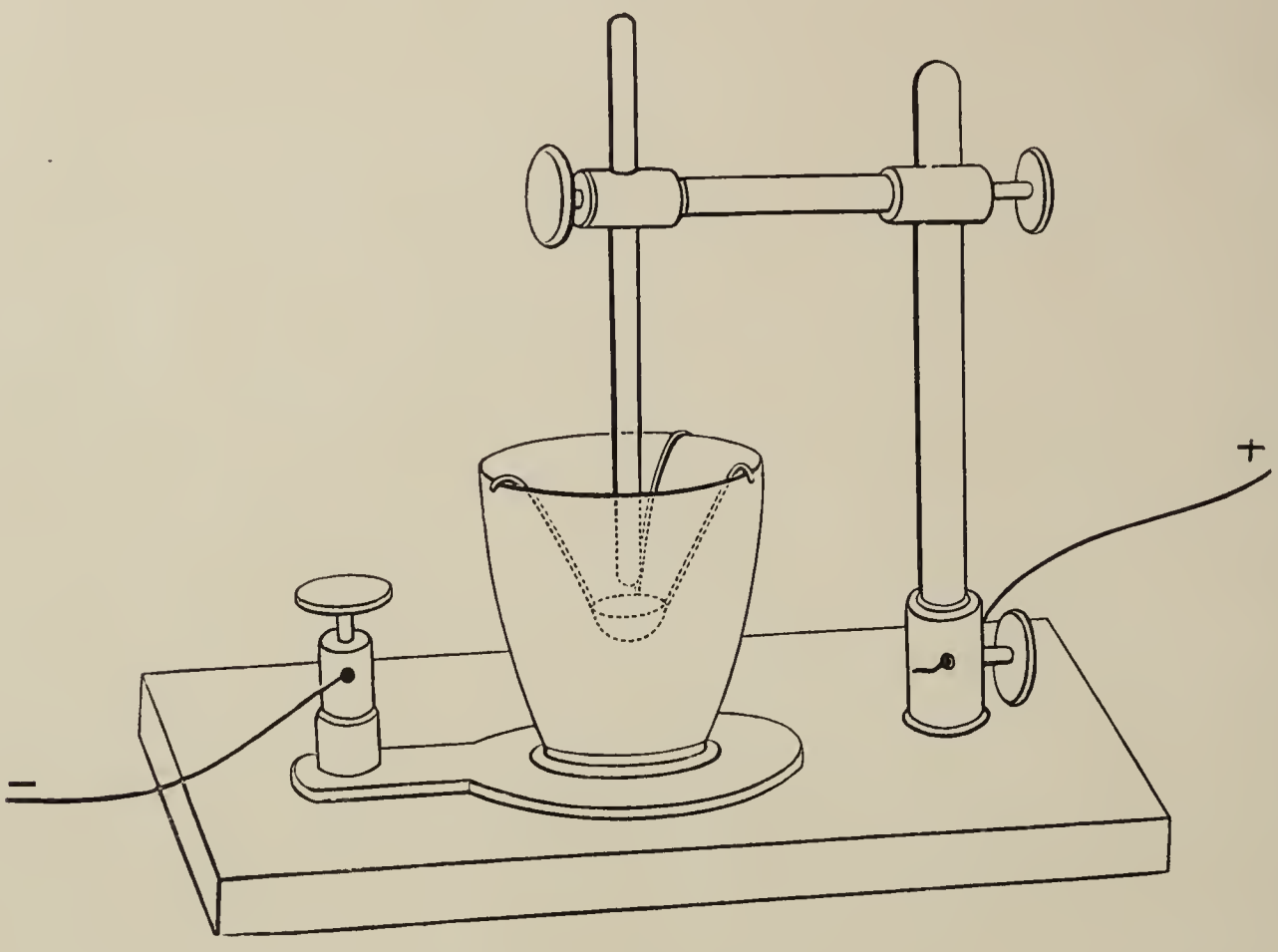
[47] Od f. Dr. T. Schuchardt. Görlitz.

Elektrolytem byl 5% roztok chem. čistého dusičnanu stříbrnatého připravený zvláště k těmto účelům p. Dr. O. Šulcem.[48]

Koncentrace tato zvolena dle návodu Gray-ova[49] jakož i z důvodu úspory látky. —

Všeobecně platných předpisů o vymývání, sušení a vážení tyglíku šetřeno bedlivě a manipulaci věnována největší pozornost. Před prací platinový tyglík

Obr. 4.



vařen v zředěné kyselině dusičné po několik hodin, na to vymyt vodou a vařen ve vodě delší čas, pak vypláchnut aetherem a konečně dobře vodou. Sušení dálo se v lázni vzduchové asi při 100°.

Roztok naléván z větší zásoby do tyglíku volně po tyčince ke středu dna namířené, aby se snad nárazem jeho krystalky stříbra neulomily. Na dně kathody, kryté jaksi skleněnou mističkou, se téměř žádné stříbro nevylučovalo.

Po pokusu odssát roztok pipettou, až se vynořila anoda. Odssávání dálo se velmi zvolna a opatrně, poněvadž jinak částice superoxydu na anodě lpící se odtrhovaly a splývaly po povrchu, odkud začasto ke dnu tyglíku spadly. Pak byla vyjmuta anoda, dále skleněná mistička, potom teprve odssát ostatní roztok, nikdy však do dna, aby snad odtržené maličké krystalky stříbra nebyly odstraněny.

Od dusičnanu stříbrnatého vymýván tyglík jednou neb dvakrát vodou studenou, pak tolikrát vodou horkou (80°—90°), až se chlorovodíkem nedaly poznati nejmenší stopy chloridu. Ke konci vymyt tyglík dvakrát vodou stu-

---

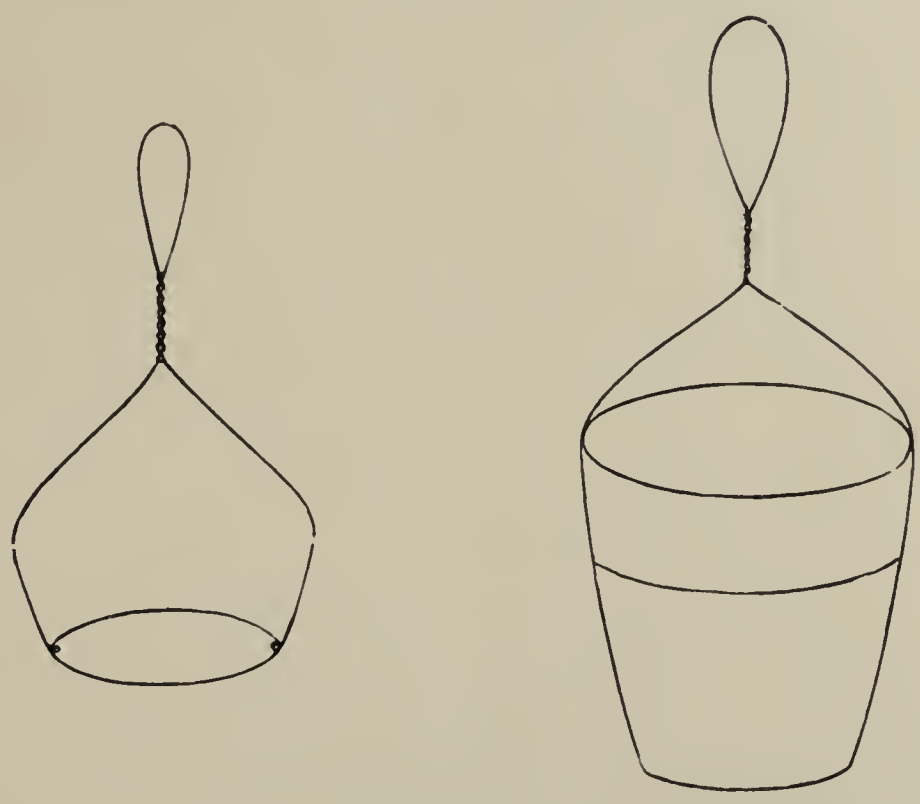
[48] Dusičnan byl připraven ze stříbra zredukovaného z chloridu, poprvé zinkem, pak vždy mléčným cukrem.

[49] Viz úvod pag. 7.

denou. Čím více obsahovala kathoda vyloučeného stříbra, tím více vody bylo potřebí a tím déle trvalo vyplachování; zároveň se zvětšovalo nebezpečí ztráty stříbra při vyssávání. Proto po několika měřeních byly krystalky kostěnou pincettou odstraněny a tyglík před novým pokusem znovu postříbřen.

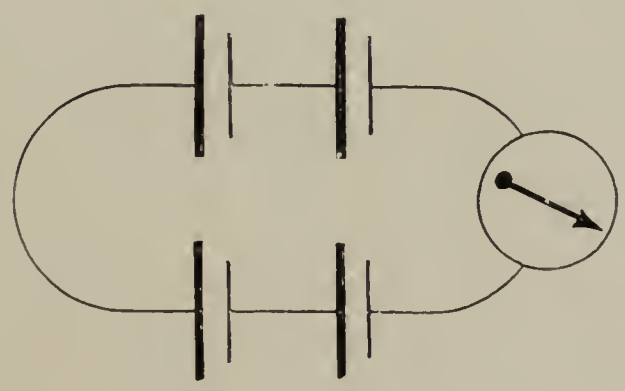
Po vysušení postaven zchladlý tyglík na váhy, kde po půl hodině váhy neměnil.

Obr. 5.



Ku přenášení byl tyglík pověšen v košíčku z drátu platinového (viz obr. 5.), který se mohl na dvou místech pohodlně vzíti tyčinkou skleněnou mírného prohnutí a tak úplně bezpečně buďto zavěsiti nebo na váhy postaviti. Košíček ovšem vážen vždy s sebou.

Obr. 6.



Článků užíváno Daniellových a to obyčejně dvou dvojic vedle sebe spojených za sebou. Účelem tohoto spojení bylo, aby batterie co možná byla konstantní, čehož se však docílilo jen tehdy, byly-li články velmi pečlivě plněny, majíce stejně veliké mědi a zinky, poslední stejně amalgamované, jsouce naplněny rovným množstvím kyseliny i roztoku síranu měďnatého a když po sestavení před pokusem nejméně 2 hod. stály. Nebylo-li šetřeno těchto předpisů, dávala obyčejná boussola vložena v kruh samotných článků (viz obr. 6.) dosti značnou úchylku poukazujíc k *lokálnímu proudu*, který na články a tím i na proud v hlavním kruhu velmi rušivě působil.

Závislost stálosti na době po sestavení studována na jednom článku Daniellově, jehož vnitřní odpor určován methodou střídavých proudů. Článek byl spojen jen po ten čas, co odečtení trvalo.

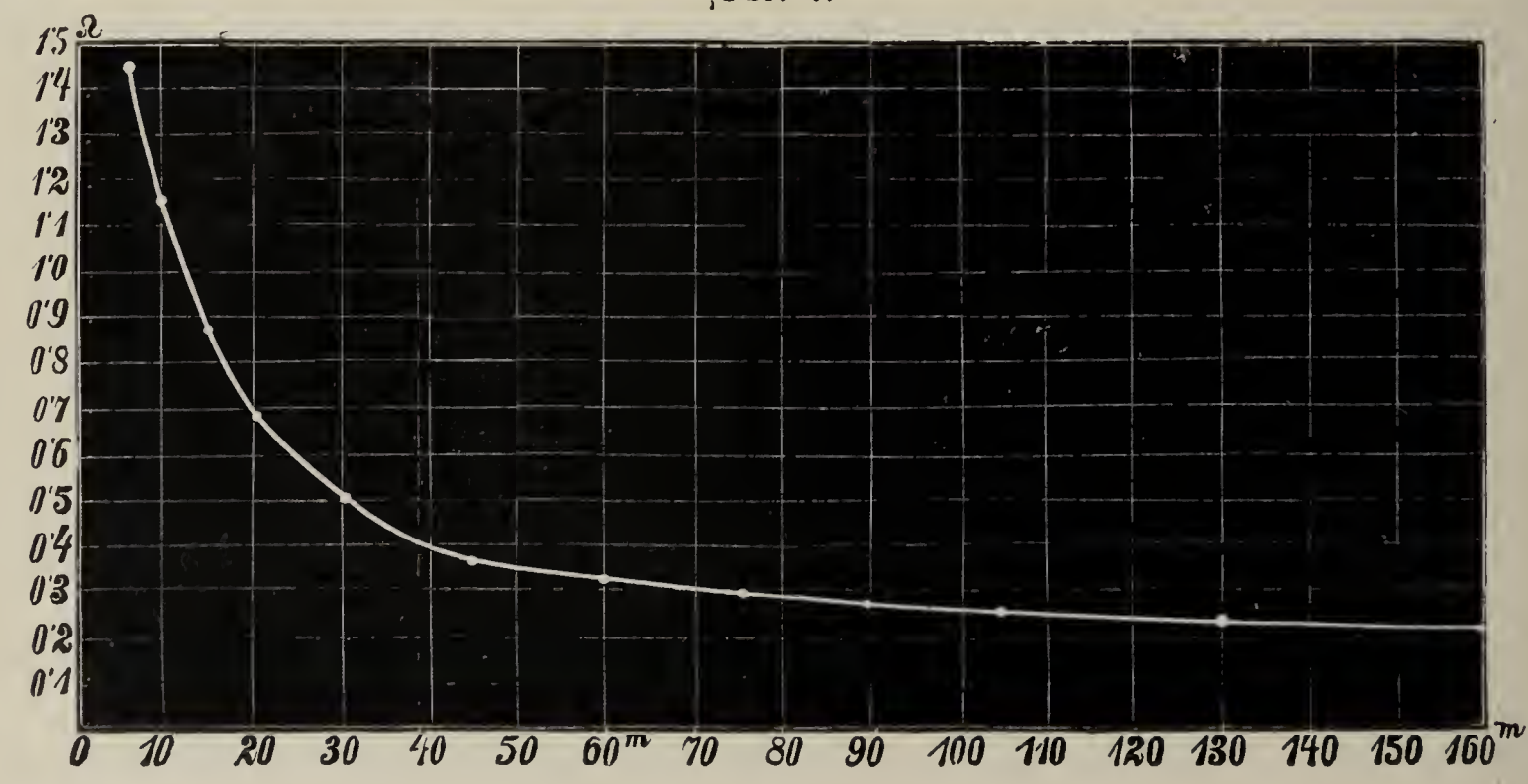
Výsledky podává tabulka č. 4.

4. tabulka: Vnitřní odpor článku Daniellova v závislosti na době po sestavení.

Čas po sestavení. Minuty	Vnitřní odpor Ω	Temp. ^0C
6	1·451	18·8
10	1·152	18·8
15	0·869	18·9
20	0·683	18·9
30	0·496	19·0
45	0·376	19·0
60	0·313	19·0
75	0·280	19·0
90	0·260	19·0
105	0·248	19·0
130	0·233	19·0
160	0·224	19·0
345	0·188	19·0

Nanášíme-li čísla jednoho sloupce na př. udávající čas horizontálně a čísla druhého sloupce vertikálně, obdržíme velmi poučné a zajímavé grafické znázornění změny vnitřního odporu článku. (Viz obr. 7.)

Obr. 7.



Křivka takto sestrojená okazuje pravidelné, z počátku rychlé klesání odporu, pak volné blížení se (asi po 2^h) k jakési hodnotě mezní.

Rheostat ve hlavní větvi R_1 byl obyčejným rheostatem Siemensovým; jím se regulovala intensita proudu hlavního.

Odpor ve větvi x, jímž jde velká část hlavního proudu, byl zhotoven dle předpisu W. Kohlrauschova [50] z drátu argentánového 1 *mm* silného, jehož temperaturní koefficient byl velmi malý — 0·00020, pouze drát však nebyl ovinut *co celek* kolem tyčí měděných, ale v jednotlivých kusech (délky 53 *cm*) do otvorů v tyčích vyvrtaných vložen a zaletován.

V druhé větvi stál rheostat R od *f.* Hartmann & Braun (Frankfurt) obsahující Ohmy, správný při 20°, temperaturního koefficientu 0·00035. Rheostat byl vyjmut ze skříně a postaven tak, že vzduch měl ke všem cívkám volný přístup.

Galvanometrem G byl galvanometr Kohlrauschův, jehož magnetka jest zároveň zrcátkem. Stroj pochází od f. Hartmann & Braun. Stál na konsole upevněné ve hlavní zdi laboratoře a užíváno pouze jednoho jeho vinutí a to silnějšího drátu.

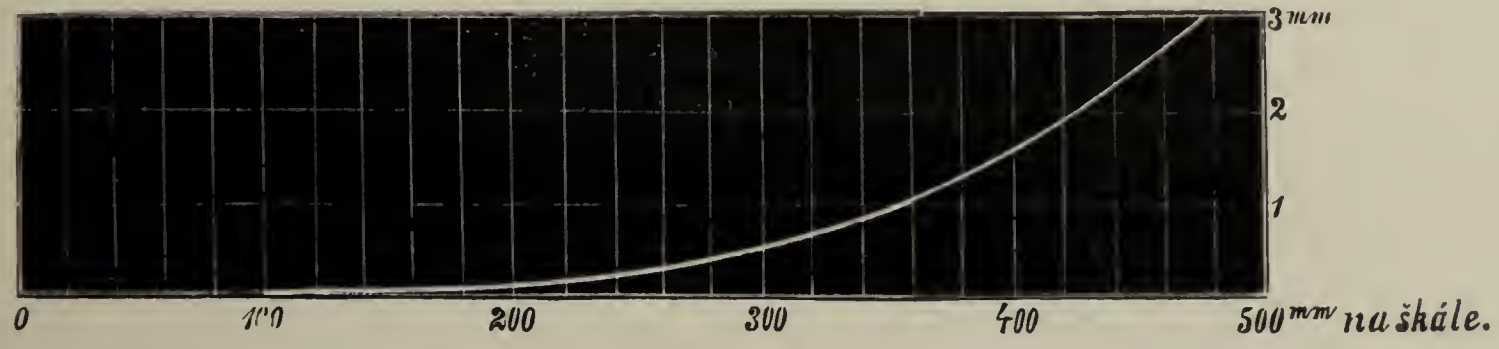
Apparát byl prokalibrován při dané vzdálenosti jeho od škály, jak dalece totiž platí vztah

$$\alpha R = \alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2 = \ldots \alpha_n R_n,$$

kde α_1 α_1 .. α_n značí úchylky na škále odečtené při odporech (v kruhu) R_1 R_1 . . . R_n za stejné intensity proudu.

Z hodnot pro α naměřených a počítaných utvořeny pak korrekce pro α odečtené, které přehledně ukazuje obr. 8.

Obr. 8.



Thermoelement T skládající se z drátu argentánového a měděného (2 *mm* silného) byl zařízen dle návrhu Kohlrauschova a postaven v *místnosti* vedle laboratoře, aby tam rozestavené jemné stroje vlhkostí netrpěly.

Když byly galvanometr a dalekohled se škálou definitivně zařízeny, byl thermoelement graduován, jak daleko totiž platí vztah lineární mezi elektromotorickou jeho silou a temperaturní differencí míst spájených. Učiněno pak 26 pozorování při 7mi různých temperaturách a počítána methodou nejmenších čtverců závislost ϑ na $T - t_1 - 80$ dle vzorce:

$$\vartheta = a + b\,(T - t_1 - 80).^{51}$$

---

[50] W. Kohlrausch pojednání citované.

[51] Úchylka galvanometru způsobená thermoelementem ϑ je úměrna elektromotorické síle, a lze ji tudíž vyjádřiti vzorcem

$$\vartheta = a_1 + b_1\,(T - t_1).$$

Poněvadž pak považujeme to ϑ za normální, při kterém jest $T - t_1 = 80°$, musíme ϑ pozorované redukovati na tyto normální poměry. Aby byla přímo hořejší rovnicí dána tato korrekce, změníme tuto rovnici přidáním a odečtením $b_1\,80$ na

$$\vartheta = a + b\,(T - t_1 - 80),$$

kde druhý člen dává příslušnou redukci.

T značí temperaturu místa horkého, tedy bod varu vody (počítán dle tlaku) t značí temperaturu místa studeného.

Pozorování, jakož i výsledky podává tabulka č. 5.

5. tabulka: Graduování thermoelementu.

Odečteno:		T	t_1	t'_1	ϑ		diff.
ϑ *mm*	t_1 °C	dle tlaku	střední	korrig. t_1	střed. pozor.	počítané	
93·85	26·40						
94·10	26·28	99·44	26·19	25·95	94·15	94·20	−0·05
94·25	26·12						
94·40	25·96						
98·10	22·61						
98·15	22·52	99·44	22·49	22·25	98·24	98·28	−0·04
98·25	22·44						
98·45	22·41						
100·35	20·63						
100·45	20·61	99·45	20·61	20·37	100·44	100·36	0·08
100·50	20·60						
100·45	20·60						
102·75	18·42	99·43	18·43	18·19	102·78	102·75	0·03
102·80	18·43						
106·75	15·00						
106·45	15·02	99·45	15·09	14·85	106·55	106·46	0·09
106·60	15·12						
106·40	15·22						
109·35	12·41						
109·20	12·57	99·47	12·64	12·40	109·09	109·18	−0·09
109·00	12·72						
108·80	12·87						
111·95	10·00						
111·90	10·27	99·47	10·36	10·12	111·69	111·70	−0·01
111·55	10·48						
111·35	10·69						

Platí tedy pro intervall od 10^0 do 25^0 pro ϑ rovnice

$$\vartheta = 101{\cdot}38 + 1{\cdot}104\,(T - t'_1 - 80).$$

Chyba průměrná obnáší 0·07 *mm*; chyba pravděpodobná 0·04 *mm* v odečtení na škále, tedy veličinu, kterou odečítáním nelze zaručiti. Poněvadž obyčejně činila úchylka galvanometru 100 *mm* nebo i více, byla dle těchto úvah úchylka měřena na $^1/_2$ desetiny procenta přesně.

Ve vedení k thermoelementu byl rheostat *(ϱ)* f. Siemens & Halske obsahující Ohmy, správný při 20^0, temperaturního koefficientu 0·00035.

Temperatura určována teploměry Wiegandovými a Baudinovými, jež byly srovnány s normálním teploměrem Baudin č. 10915, u kterého byly body základní kontrolovány.

Udává pak teplotu:

t_1	teploměr Baudin č. 9858	studeného místa thermoelementu,	korrekce jest −0·13
t_2	» Wieg. do 50°	vzduchu u thermoelementu	
t_3	» Baudin č. 9885	rheostatu ϱ	» » 0·00
t_4	» Wieg. do 103·5	galvanometru G	» » −0·23
t_5	» » do 105°	odporu x ve větvi	» » −0·08
t_6	» » do 104°	odporu R	» » +0·19
t_7	» Baudin č. 9886	roztoku ve voltametru	» » 0·00

Vliv temperatury převeden dle příkladu Kohlrauschova na úchylky α a ϑ a korrekce pro odečtené úchylky sestaveny tabelárně.

Konstanty k tomu potřebné byly:

Odpor galvanometru + jeho vedení 1·063 Ω (při 19·8)
vedení k větvi 0·033
Dohromady 1·096

Stálý odpor ϱ . . . . . 3 000 Ω (při 20°)

Pro ϑ počítány dvě tabulky korrekční a to dle vzorce:

$$\vartheta_0 = \vartheta - 1{\cdot}104\,(T - t'_1 - 80) \qquad \text{tab. č. 6.}$$

a druhá dle $$\vartheta_{20} = \vartheta - \vartheta\,0{\cdot}00125\,(20 - 0{\cdot}2\,t_3 - 0{\cdot}8\,t_4) \qquad \text{tab. č. 7.}$$

Podobně pro α čtyři tabulky dle vzorce:

$$\alpha_{20} = \alpha - \alpha\,(20 - t_4)\,\frac{0{\cdot}0438}{R} - \alpha\,(20 - t_5)\,0{\cdot}00036 + \alpha\,(20 - t_6)\,0{\cdot}00020$$

6. tabulka: Korrekce ϑ vzhledem ku $T - t_1$.

$T - t_1 - 80 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Korrekce =	1·10	2·20	3·31	4·41	5·52	6·62	7·73	8·83	9·94	11·04

Pro $T - t > 80$ se korrekce odečte; pro $T - t < 80$ se přičte.

Pro temperatury nad 20° nalezneme v těchto tabulkách také korrekce, jež ovšem musíme opatřiti znamením opačným.

Počet se těmito tabulkami nad míru zjednodušil a zkrátil.

Pozorování dálo se dalekohledem Hartmannovým s dalekohledem a škálou metrovou na papíře (na dřevě přilepeném) nanesenou a rozdělenou v millimetry, ze vzdálenosti asi dvou metrů.

Chronometr od firmy Bröcking (v Hamburku), kterým určována doba trvání pokusu, měl chod (denní) okrouhle 1 sec., tak že korrekce času vzhledem ku přesnosti ostatních měření úplně odpadá.

Vážení prováděno na vahách f. C. Rueprecht (max. zatížení 250 *g*), které zaručovaly 0·02 *mg*; váženo na obou stranách a citlivost při každém vážení pro dané zatížení určována.

Odečítání při tom, jakož i odečítání důležitějších teplot (t_1, t_4, t_5, t_6, t_7) dálo se dalekohledem.

7. tabulka: Korrekce ϑ vzhledem ku t_3 a t_4.

t_4=	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
10	**1·25**	**1·15**	**1·05**	0·95	0·85	0·75	0·65	0·55	0·45	0·35	0·25	0·15	0·05	0·05	0·15	0·25	10
11	**1·23**	**1·13**	**1·03**	0·93	0·83	0·73	0·63	0·53	0·43	0·33	0·23	0·13	0·03	0·07	0·17	0·27	11
12	**1·20**	**1·10**	**1·00**	0·90	0·80	0·70	0·60	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·00	0·10	0·20	0·30	12
13	**1·18**	**1·08**	0·98	0·88	0·78	0·68	0·58	0·48	0·38	0·28	0·18	0·08	0·02	0·12	0·22	0·32	13
14	**1·15**	**1·05**	0·95	0·85	0·75	0·65	0·55	0·45	0·35	0·25	0·15	0·05	0·05	0·15	0·25	0·35	14
15	**1·13**	**1·03**	0·93	0·83	0·73	0·63	0·53	0·43	0·33	0·23	0·13	0·03	0·07	0·17	0·27	0·37	15
16	**1·10**	**1·00**	0·90	0·80	0·70	0·60	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·00	0·10	0·20	0·30	0·40	16
17	**1·08**	0·98	0·88	0·78	0·68	0·58	0·48	0·38	0·28	0·18	0·08	0·02	0·12	0·22	0·32	0·42	17
18	**1·05**	0·95	0·85	0·75	0·65	0·55	0·45	0·35	0·25	0·15	0·05	0·05	0·15	0·25	0·35	0·45	18
19	**1·03**	0·93	0·83	0·73	0·63	0·53	0·43	0·33	0·23	0·13	0·03	0·07	0·17	0·27	0·37	0·47	19
20	**1·00**	0·90	0·80	0·70	0·60	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·00	0·10	0·20	0·30	0·40	0·50	20
21	0·98	0·88	0·78	0·68	0·58	0·48	0·38	0·28	0·18	0·08	0·02	0·12	0·22	0·32	0·42	0·52	21
22	0·95	0·85	0·75	0·65	0·55	0·45	0·35	0·25	0·15	0·05	0·05	0·15	0·25	0·35	0·45	0·55	22
23	0·93	0·83	0·73	0·63	0·53	0·43	0·33	0·23	0·13	0·03	0·07	0·17	0·27	0·37	0·47	0·57	23
24	0·90	0·80	0·70	0·60	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·00	0·10	0·20	0·30	0·40	0·50	0·60	24
25	0·88	0·78	0·68	0·58	0·48	0·38	0·28	0·18	0·08	0·02	0·12	0·22	0·32	0·42	0·52	0·62	25
t_3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Čísla silnějším písmem tištěná značí korrekci, kterou třeba odečítati — ostatní čísla se přičítají.

8. tabulka: Korrekce α vzhledem ku t_4 $\left(\frac{\alpha}{R}\right)$

α=	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	R
20	1·0	2·0	3·0	4·0	5·0	6·0	7·0	8·0	9·0	10·0	11·0	12·0	13·0	14·0	15·0	20
25	0·8	1·6	2·4	3·2	4·0	4·8	5·6	6·4	7·2	8·0	8·8	9·6	10·4	11·2	12·0	25
30	0·7	1·3	2·0	2·7	3·3	4·0	4·7	5·3	6·0	6·7	7·3	8·0	8·7	9·3	10·0	30
35	0·6	1·1	1·7	2·3	2·8	3·4	4·0	4·6	5·1	5·7	6·3	6·8	7·4	8·0	8 6	35
40	0·5	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5	4·0	4·5	5·0	5·5	6·0	6·5	7·0	7·5	40
45	0·4	0·9	1·3	1·8	2·2	2·7	3·1	3·5	4·0	4·4	4·9	5·3	5·8	6·2	6·7	45
50	0·4	0·8	1·2	1·6	2·0	2·4	2·8	3·2	3·6	4·0	4·4	4·8	5·2	5·6	6·0	50

Z této tabulky najdeme hodnotu $\frac{\alpha}{R}$ a pro tuto z následující tab. korrekci pro α.

$\frac{\alpha}{R}$=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	t_4
10	0·04	0·09	0·13	0·18	0·22	0·26	0·31	0·35	0·39	0·44	0·48	0·53	0·57	0·61	0·66	10
11	0·04	0·08	0·12	0·16	0·20	0·24	0·28	0·32	0·36	0·39	0·43	0·47	0 51	0·55	0·59	11
12	0·04	0·07	0·11	0·14	0·18	0·21	0·25	0·28	0 32	0·35	0·39	0·42	0·46	0·49	0·53	12
13	0·03	0·06	0·09	0·12	0·15	0·18	0·22	0·25	0·28	0·31	0·34	0·37	0·40	0·43	0·46	13
14	0·03	0·05	0·08	0·11	0·13	0·16	0·18	0·21	0·24	0·26	0·29	0·32	0·34	0·37	0·39	14
15	0·02	0·04	0·07	0·09	0·11	0·13	0·15	0·18	0·20	0·22	0·24	0·26	0·29	0·31	0·33	15
16	0·02	0·04	0·05	0·07	0·09	0·11	0·12	0·14	0·16	0·18	0·19	0·21	0·23	0·25	0·26	16
17	0·01	0·03	0·04	0·05	0·07	0·08	0·09	0·11	0·12	0·13	0·14	0·16	0·17	0·18	0·20	17
18	0·01	0·02	0·03	0·04	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	0·10	0·11	0·11	0·12	0·13	18
19	0·00	0·01	0·01	0·02	0·02	0·03	0·03	0·04	0 04	0·04	0 05	0·05	0·06	0·06	0 07	19

Korrekce tyto jsou vesměs záporné.

9. tabulka: Korrekce α vzhledem ku t_5 (vesměs záporné).

$\alpha =$	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	t_5
10	0·07	0·14	0·22	0·29	0·36	0·43	0·50	0·58	0·65	0·72	0·79	0·86	0·94	1·01	1·08	10
11	0·06	0·13	0·19	0·26	0·32	0·39	0·45	0·52	0·58	0·65	0·71	0·78	0·84	0·91	0·97	11
12	0·06	0·11	0·17	0·23	0 29	0·35	0·40	0·46	0·52	0·58	0·63	0·69	0·75	0·81	0·86	12
13	0·05	0·10	0·15	0·20	0·25	0·30	0·35	0·40	0·45	0·50	0·55	0·60	0·66	0·71	0·76	13
14	0·04	0·09	0·13	0·17	0·22	0·26	0·30	0·35	0·39	0·43	0·48	0·52	0·56	0·60	0·65	14
15	0·04	0·07	0·11	0·14	0·18	0·22	0·25	0·29	0·32	0·36	0·40	0·43	0·47	0·50	0·54	15
16	0·03	0·06	0·09	0·12	0·14	0·17	0·20	0·23	0·26	0·29	0·32	0·35	0·37	0·40	0·43	16
17	0·02	0·04	0·06	0·09	0·11	0·13	0·15	0·17	0·19	0·22	0·24	0·26	0·28	0·30	0·32	17
18	0·01	0·03	0·04	0·06	0·07	0·09	0·10	0·12	0·13	0·14	0·16	0·17	0·19	0·20	0 21	18
19	0·01	0·01	0·02	0·03	0·04	0·04	0·05	0·06	0·06	0·07	0·08	0·09	0·09	0·10	0·11	19

10. tabulka: Korrekce α vzhledem ku t_6 (vesměs kladné).

$\alpha =$	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	t_6
10	0·04	0·08	0·12	0·16	0·20	0·24	0·28	0·32	0·36	0·40	0·44	0·48	0·52	0·56	0·60	10
11	0·04	0·07	0·11	0·14	0·18	0·22	0·25	0·29	0·32	0·36	0·40	0·43	0·47	0·50	0·54	11
12	0·03	0·06	0·10	0·13	0·16	0·19	0·22	0·26	0·29	0·32	0·35	0·38	0·42	0·45	0·48	12
13	0·03	0·06	0·08	0·11	0·14	0·17	0·20	0·22	0·25	0·28	0·31	0·34	0·36	0·39	0·42	13
14	0·02	0·05	0·07	0·10	0·12	0·14	0·17	0·19	0·22	0·24	0·26	0·29	0·31	0·34	0·36	14
15	0·02	0·04	0·06	0·08	0·10	0·12	0·14	0·16	0·18	0·20	0·22	0·24	0·26	0·28	0·30	15
16	0·02	0·03	0·05	0·06	0·08	0·10	0·11	0·13	0·14	0·16	0·18	0·19	0·21	0 22	0·24	16
17	0·01	0·02	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·10	0·11	0·12	0·13	0·14	0·16	0·17	0·18	17
18	0·01	0·02	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·06	0·07	0·08	0·09	0·10	0·10	0·11	0·12	18
19	0·00	0·01	0·01	0·02	0·02	0·02	0·03	0·03	0·04	0·04	0·04	0·05	0·05	0·06	0·06	19

2. Hustota proudu. Vnitřní povrch tyglíku do výše, kam až byl roztok naléván, obnášel jak uvedeno 70 cm^2. Povrch anody (pokud byla ponořena) z počátku byl 4·7 cm^2, z čehož je patrno, že střední hustota na anodě byla asi 14kráte větší než na kathodě. Poněvadž pak procházel voltametrem proud (nejvíce) 0·3 Ampère, byla hustota

na kathodě: 0·0043 $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$

na anodě: 0·064 »

Číslo pro hustotu na kathodě leží v mezích udaných Th. Gray-em (0·0017 až 0·0050), za to však hustota na anodě je daleko větší, 0·06 proti 0·003! Než tento rozpor nese sebou forma voltametru Poggendorffova a je otázkou další, jaké vlivy má tato vada na výsledky měření?

Jedná-li se nám — jako obyčejně — pouze o množství vyloučeného stříbra, tu nemusíme se příliš úzkostlivě ohlížeti na hustotu proudu na anodě — stačí, aby hustota na kathodě byla v určitých mezích. Avšak i tomuto požadavku není tak snadno při voltametru formy tyglíku vyhověti. První pohled na vylučování se stříbra nás přesvědčil o tom, že na různých místech tyglíku různá panuje hustota proudu a to značně různá. Ona skleněná mistička jako by proudu bránila, kryje takřka celé dno tak, že na něm téměř se nic nevylučuje. Naproti tomu čím výše ode dna ke hladině roztoku, tím zřetelnější

vyrůstají krystalky, které se v nejhořejších polohách spojují v pevné a kompaktní stromečky. Z toho je patrno, že význam střední hustoty proudu pro voltametr Poggendorffův je nepatrný a že nám známost této střední hustoty — nestačí.

Chci zde uvésti skutečný případ na osvětlení toho, co zde řečeno.

Tyglík, který byl naplněn již asi 15 grammy vyloučeného stříbra, jež velmi pevně tkvělo na stěnách v hustých krystalech podoby kulatých keříčků, naplněn k novému pokusu, při němž intensita byla asi 0·25 Ampère, tedy dle předešlého úplně přiměřená. A přece musil býti tento pokus přerušen a výjmut z řady měření, poněvadž nahoře v tyglíku z některých míst vyrůstalo stříbro v teninkých stromečcích, které se při vyplachování snadno ulomily a nedovolily přesné určení vyloučeného stříbra. Dle Kirmise byla v tomto případě hustota nahoře v tyglíku nejméně 0·04 proti střední hustotě 0·004 — desetkrát větší!

Z toho vyplývá následující· Hustota proudu pro určité místo jest velice citlivou měrou způsobu vylučování se stříbra, naopak však tento způsob je pro hustotu měrou málo citlivou.[52] Voltametr, kde můžeme hustotu kdekoli určiti, dovoluje zjednati si určitou formu vyloučeného kovu, vyhovující všem našim požadavkům — u voltametru jiného musíme teprv dle způsobu vylučujícího se kovu v předběžném pokusu hledati meze hustoty.

S tohoto stanoviska musíme pohlížeti též na ona různá udání pro hustotu proudu v úvodu uvedená.

Jednalo-li by se ještě dále o hustotu na anodě, pak teprve a to ještě více se jeví nevýhoda voltametru Poggendorffova. Pomíjeli jsme totiž změnu hustoty na kathodě nastávající tím, že krystaly vyrůstají a tím plochu vodivou mění, poněvadž je to změna většinou nepatrná. Na anodě má se však věc jinak. V našem případě je anoda malého povrchu a z toho se přece tolik (asi) ztrácí, co na kathodě daleko většího povrchu přibývá, mimo to povrch anody se pokrývá velmi špatně vodivým superoxydem a okolí jeho — roztok se ve své koncentraci mění; zde jest zkrátka hustota proudu každým okamžikem jiná.

Že pak jsem se přece rozhodl užívati voltametru Poggendorffova — třeba voltametr formy druhé nemá těchto vad — má svou příčinu hlavně v bezpečnosti a jistotě, s jakou můžeme s tímto strojem pracovati bez obavy, že při různé manipulaci vymývání, sušení a všelikého přenášení kathody něco stříbra se ztratí.

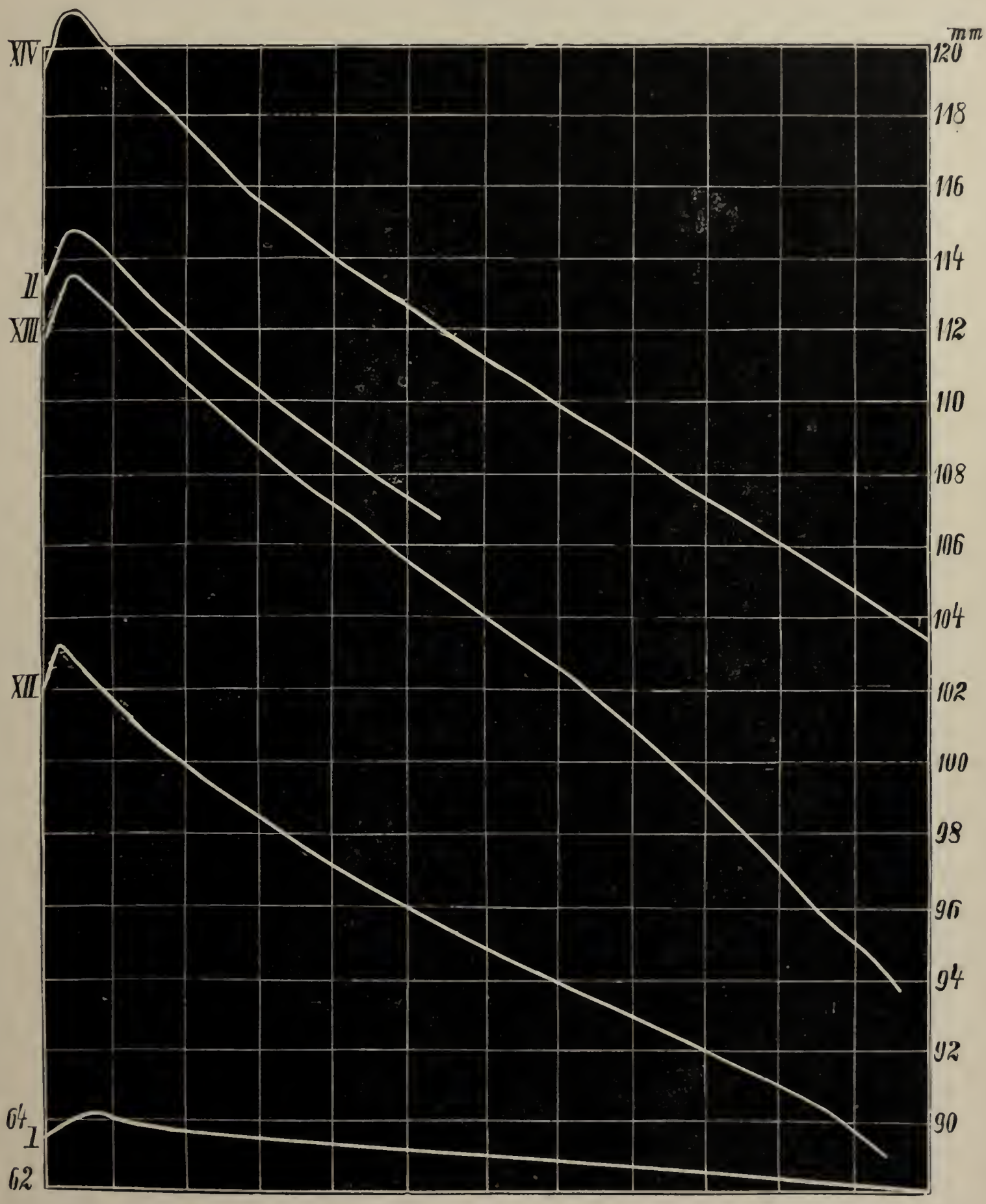
Mimo to jednalo se o studium změn odporu vnitřního voltametru a bylo tedy výhodno vzíti voltametr většího vnitřního odporu, aby charakter jeho změn lépe vynikl. Proto také bylo užito pouze dvou dvojic článků Daniellových vedle sebe spojených — jak uvedeno bylo na str. 17., a v hlavní kruh vkládáno pouze tolik odporu, aby hustota proudu zůstávala v určitých mezích.

---

[52] Je to asi tak, jako když hledáme bod křivky, na př. k některé ose asymptoticky se blížící, jednou z dané ordinaty a podruhé z dané abscissy.

3. Průběh intensity. Průběh intensity pozorován oboustranným odečítáním úchylek α galvanometru z počátku po 5ti minutách. Než tu se ukázalo, že číslo pro α prvních 5ti minut nesouhlasilo s řadou, jakou dávala čísla následující, a proto odečítáno v prvních 6ti, napotom v prvních 10ti minutách každou minutu.

Obr. 9.



Tu se pak onen zdánlivý nesouhlas vysvětlil.

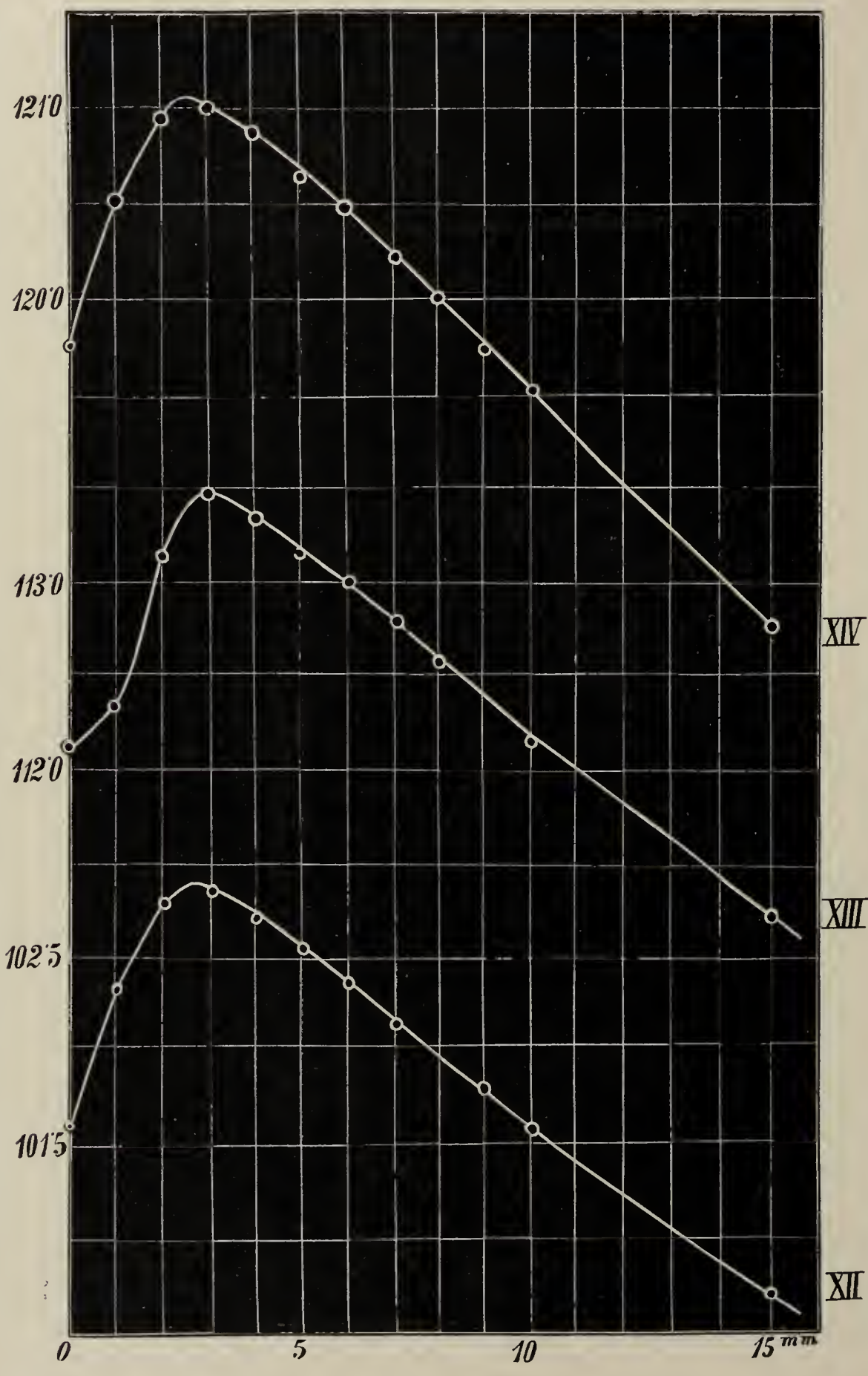
Intensita proudu totiž stoupala z počátku až k určitému maximu, kterého obyčejně v 5ti minutách dosáhla — na to pak klesala. Obr. 9. podává několik takových průběhů intensity při stejné citlivosti galvanometru (R totéž) v znázornění grafickém, kde úsečkou jest čas, pořadnicí pak odečtené α.

Obr. 10. ukazuje některá ona maxima ve větším měřítku.

Z grafického znázornění vyplývají následující podrobnosti:

1. Křivky jsou velmi pravidelné.
2. Maximum intensity vzhledem k počáteční hodnotě je tím větší, čím je proud intensivnější.

Obr. 10.



3. Čím je větší intensita proudu, tím prudší je spád křivky.
4. Některé křivky (hlavně pro menší intensitu) ukazují zřetelný bod obratu, některé jdou od maxima v pozorovaném intervalu téměř co přímky od maxima.

Pravidelnost těchto křivek poukazuje k tomu, že *příčiny*, které intensitu, respektive vnitřní odpor voltametru tak nápadně modifikují, jsou *pravidelnými*.

Příčiny ty pak jsou: Stoupání temperatury roztoku, změna koncentrace roztoku, galvanický odpor stále vzrůstající vrstvy superoxydu na anodě, zmenšování anody a vzrůst povrchu kathody a snad ještě jiné příčiny, kterých neznáme.

11. tabulka: Data k obrazcům 9. a 10.

Čas. minut	Úchylka »α«				
	I.	XII.	XIII.	II.	XIV.
0	63·55	101·60	112·10	113·15	119·80
1		102·35	112·30		120·60
2		102·80	113·15		121·00
3		102·85	113·45		121·05
4		102·70	113·30		120·90
5	64·05	102·60	113·15	114·85	120·65
6		102·40	113·00		120·50
7		102·15	112·80		120·25
8		102·00	112·55		120·05
9		101·85	112·40		119·75
10	63·90	101·55	112·15	113·95	119·50
15	63·70	100·75	111·25	113·00	118·30
20	63·60	99·95	110·50	112·10	117·55
25	63·60	99·25	109·70	111·25	116·65
30	63·45	98·70	108·85	110·40	115·75
35	63·45	97·90	107·95	109·55	114·85
40	63·35	97·40	107·20	108 90	114·05
45	63·25	96·70	106·50	108·20	113·35
50	63·20	96·20	105·75	107·55	112·55
55	63·10	95·60	104·90	106·90	111·90
60	63·05	95·10	104·10	přerušeno	111·25
65	62·98	94·50	103·30		110·65
70	62·90	94·00	102·55		109·95
75	62·85	93·50	101·80		109·20
80	62·75	93·05	100·90		108·70
85	62·65	92·55	100·10		108·15
90	62·53	92·10	99·10		107·35
95	62·50	91·60	98·15		106·80
100	62·35	91·00	97·20		106·10
105	62·30	90·35	96·10		105·55
110	62·20	89·70	95·15		104·75
115	62·15	89·20	94·00		103·95
120	přerušeno	přerušeno	přerušeno		přerušeno

Pozorováním dané křivky jsou tudíž *superposici* několika křivek, které odděliti od sebe není snad vůbec možno. Na první pohled zdá se, že jsou tu *hlavně dvě příčiny*, které se jeví ve výsledné křivce způsobem charakteristickým, a to jest *změna odporu působená rostoucí temperaturou* a *změna odporu přibýváním superoxydu povstávající*.

Rostoucí temperatura odpor roztoku umenšuje — tomu by nasvědčovalo rapidní počáteční *stoupání* intensity; přibývající *vrstva superoxydu* odpor zvětšuje — tomu by odpovídalo *klesání* intensity od maxima.

Stoupání temperatury pozorováno na teploměru č. 7. pověšeném volně do roztoku ve voltametru; teploměr odečítán v těchže intervalech časových jako úchylka α dalekohledem.

Aby byl vliv tohoto stoupání temperatury zjištěn, učiněn následující pokus. Teploměr odečítán i po přerušení proudu a na to uzavřen proud znovu. Časový interval mezi přerušením a spojením proudu různě změněn.

12. tabulka: Data k obrazci 11.

Čas	α	t_7	Čas	α	t_7	Čas	α	t_7
0	100·35	18·00	64		19·66	123	90·05	19·51
1	100·95	00	65		63	124	90·00	54
2	101·55	08	66		60	125	90·00	57
3	101·85	12	67		57	130	89·65	70
4	101·85	18	68		54	135	89·10	84
5	101·80	22	69		51	140	88·50	95
6	101·65	26	70	93·20	49	145	přerušeno	20·06
7	101·50	30	71	93·55	50	148		19·95
8	101·30	34	72	93·70	52	151		86
9	101·15	38	73	93·70	55	155		73
10	101·05	40	74	93·65	58	160		59
15	100·20	60	75	93·65	60	165		47
20	99·60	80	76	93·65	60	170		38
25	98·85	18·99	77	93·55	62	175	84·95	29
30	přerušeno	19·17	78	93·40	63	176	85·40	31
32		15	79	93·35	66	177	85·55	33
33		12	80	93·25	69	178	85·60	36
34		10	85	92·80	77	179	85·55	39
35	96·65	10	90	92·25	86	180	85·50	43
36	97·10	12	95	přerušeno	95	181	85·30	47
37	97·80	14	96		93	182	85·20	50
38	97·80	19	97		90	183	85·05	52
39	97·30	20	98		86	184	84·85	56
40	97·15	23	99		80	185	84·60	59
41	97·00	27	100		76	190	83·50	72
42	96·90	30	105		68	195	82·05	84
43	96·80	32	110		40	200	80·50	97
44	96·70	35	115	89·45	30	206	přerušeno	20·09
45	96·60	38	116	89·90	30	208		02
50	96·05	50	117	90·10	33	209		00
55	95·55	64	118	90·20	36	210		19·97
60	přerušeno	79	119	90·15	39	215		82
61		76	120	90·20	42	230		19·49
62		73	121	90·10	45			
63		19·70	122	90·10	19·49			

Výsledky tohoto měření ukazuje tabulka 12. a diagramm 11., kde čára tečkovaná udává průběh temperatury roztoku ve voltametru, čára pak protažená průběh intensity.

Opakování se maxima v prvých 10ti minutách souhlasí se stoupáním temperatury při spojení proudu a jest důkazem pro rozhodný vliv temperatury roztoku na vnitřní odpor voltametru.

Závislost velikosti maxima (rozdílu hodnoty počáteční a největší) na temperaturní differenci jeví se tu v tom způsobu, že tím je ono maximum větší,

čím prudčeji temperatura stoupá. O tom nás poučují také z tabulky č. 12. vyňatá čísla:

1. maximum 1·50 při stoupání $\frac{1·17}{30} = 0·039$

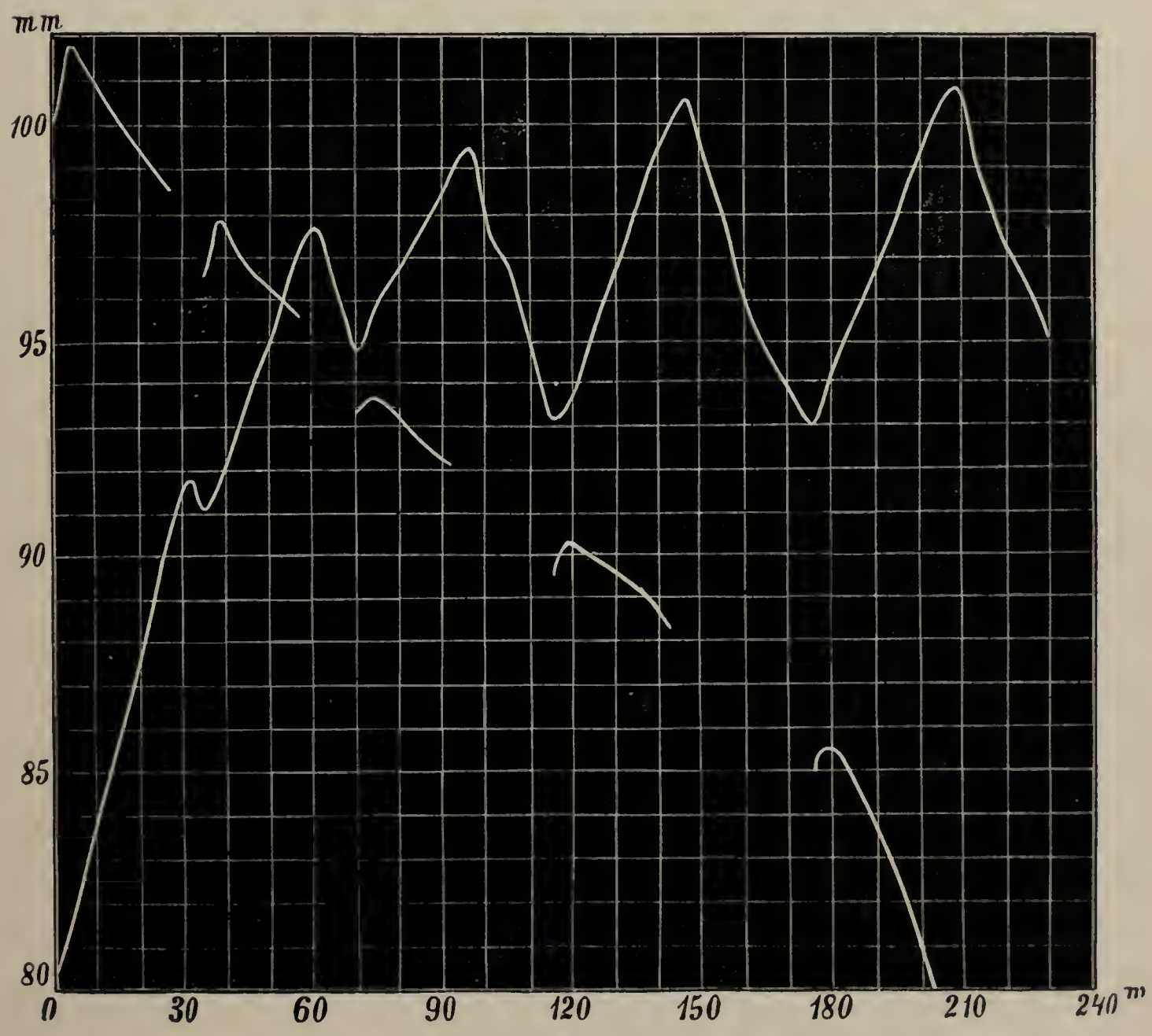
2. » 1·15 » » $\frac{0·69}{25} = 0·028$

5. » 0·65 » » $\frac{0·80}{31} = 0·026$

4. » 0·75 » » $\frac{0·76}{30} = 0·025$

3. » 0·50 » » $\frac{0·46}{25} = 0·018$

Obr. 11.



Pokus tento objevil však ještě výsledek jiný stejně překvapující jako neočekávaný. Jak totiž z výkresu patrno, řadí se křivky pro intensitu v jednotlivých intervalech časových pozorované jakoby v *jednu hlavní křivku*, právě tak, jakoby příčina, spád křivky působící — trvala i *po* přerušení proudu.

Zajímavou tuto okolnost jako otázku pro sebe ponechávám si k dalšímu propracování v době pozdější.

Jak se mění temperatura ve voltametru během delší doby trvání pokusu, ukazuje obr. 12., sestrojený dle čísel tabulky 13.

Za příklad volena jsou tu dvě měření XIII a XIV.

Z obrazce vidíme, kterak temperatura stoupá zprvu rychle a potom teprve pozvolna se stoupání umirňuje a směřuje k jakési limitě, o čem nás pokusy ještě déle trvající (na př. 4 hod.) úplně přesvědčily.

13. tabulka: Průběh intensity a temperatury měření XIII. a XIV.

XIII.			XIV.		
Čas	α	t_7	Čas	α	t_7
0	112·10	17·80	0	119·80	17·80
1	112·30	83	1	120·60	83
2	113·15	90	2	121·00	88
3	113·45	96	3	121·05	90
4	113·30	18·02	4	120·90	94
5	113·15	08	5	120·65	99
6	113·00	13	6	120·50	18·00
7	112·80	20	7	120·25	04
8	112·55	23	8	120·05	07
9	112·40	31	9	119·75	09
10	112·15	34	10	119·50	12
15	111·25	55	15	118·30	30
20	110·50	76	20	117·55	45
25	109·70	97	25	116·65	60
30	108·85	19·13	30	115·75	78
35	107·95	30	35	114·85	90
40	107·20	42	40	114·05	19·00
45	106·50	59	45	113·35	10
50	105·75	70	50	112·55	24
55	104·90	80	55	111·90	30
60	104·10	88	60	111·25	37
65	103·30	20·00	65	110·65	42
70	102·55	06	70	109·95	48
75	101·80	11	75	109·20	53
80	100·90	18	80	108·70	60
85	100·10	23	85	108·15	63
90	99·10	30	90	107·35	66
95	98·15	34	95	106·80	70
100	97·20	38	100	106·10	75
105	96·10	40	105	105·55	80
110	95·15	45	110	104·75	83
115	94·00	20·47	115	103·95	19·88
120	přerušeno		120	přerušeno	

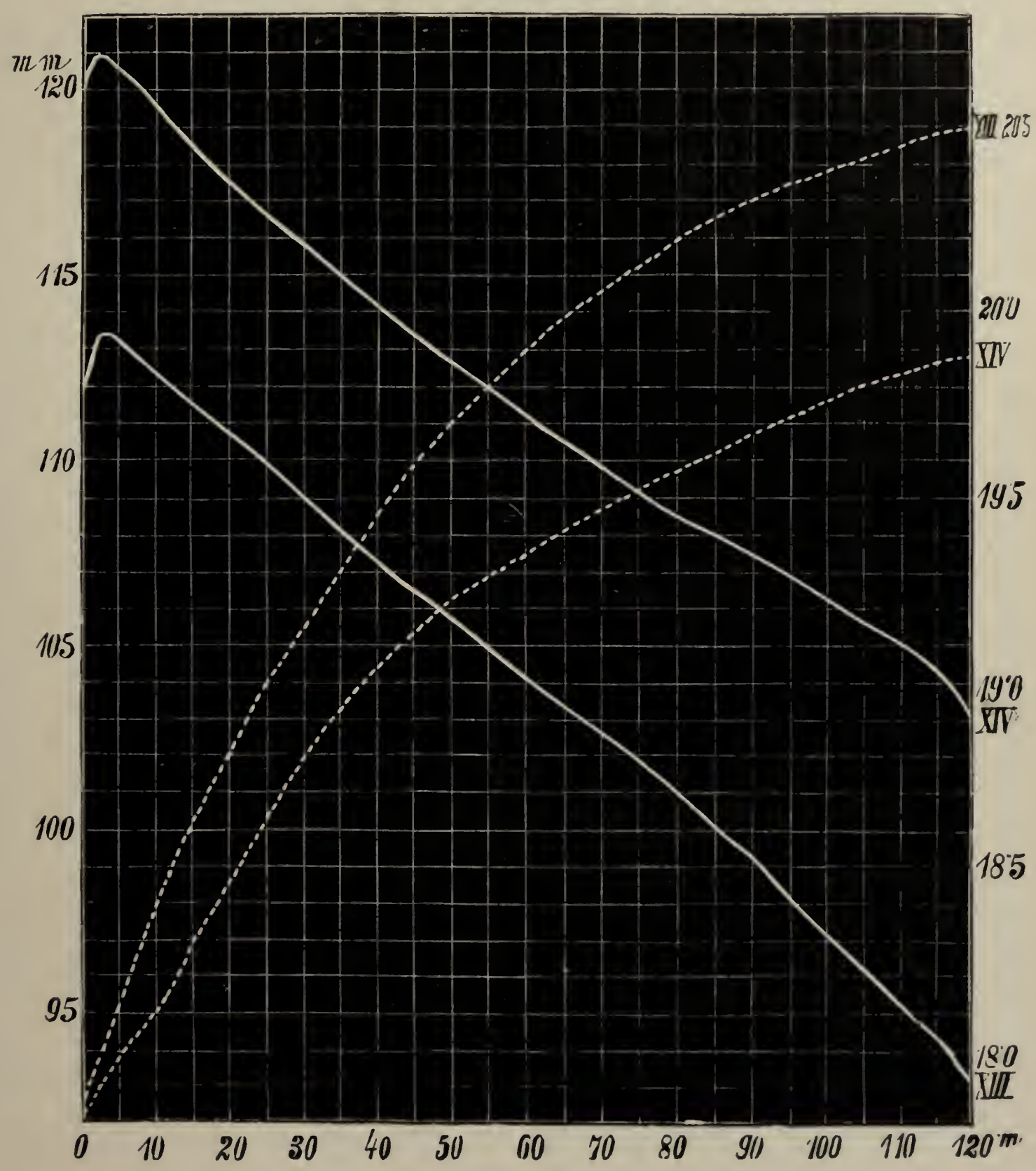
Výkres nás dále poučuje o tom, jak mohutný jest onen vliv druhý, působící spád křivky a překonávající v čase poměrně velmi krátkém působení temperatury na vnitřní odpor voltametru.

V čem ve všem onen vliv druhý záleží, nelze z jistotou říci. Uvedli jsme, že hlavní příčina klesání intensity je tvoření se superoxydu.

Vrátíme-li se ještě jednou ku pokusu poslednímu, který nám ukazoval opakováním se maxima intensity rozhodný vliv temperatury, poznáváme, že onou druhou příčinou působící spád křivky pro intensitu není pouze superoxyd, který

při onom pokusu přece stále na anodě zůstával, nýbrž něco, co způsobuje veliký odpor a co při přerušení proudu z něho uniká. Dle mého domnění jsou to četné bublinky plynu (kyslíku), které superoxyd pronikají a vzrůstem svým působí značné ony modifikace vnitřního odporu voltametru. Při pozorném

Obr. 12.



zkoumání anody, zvláště za déle trvajícího pokusu, bylo přímo viděti tyto bublinky, které se stávaly větší a větší a unikaly odtrhujíce částice superoxydu, který pak padal do podložené mističky. Na křivce, která při dlouho trvajícím pokusu ke konci ukazovala rychlejší spád (nový bod obratu), jevilo se pak toto odtrhování se bublinek a odpadávání superoxydu zřetelným vlněním. Úkaz tento demonstruje křivka pro měření XV. na obr. 13. sestrojená z dát tabulky 14.

14. tabulka: Průběh intensity a temperatury při měření XV.

Čas	α	t_7	Čas	α	t_7
0	119·40	17·28	105	101·75	19·30
1	119·90	29	110	100·80	31
2	120·15	30	115	99·75	33
3	120·45	34	120	98·65	32
4	120·45	42	125	97·70	32
5	120·45	47	130	96·70	32
6	120·30	53	135	95·70	32
7	120·20	59	140	94·95	32
8	119·95	64	145	94·05	32
9	119·75	70	150	93·25	32
10	119·50	76	155	92·50	32
15	118·65	17·83	160	91·35	32
20	117·65	18·09	165	89·45	31
25	116·70	24	170	88·95	30
30	115·80	49	175	88·40	30
35	114·95	51	180	87·15	28
40	114·20	60	185	86·70	27
45	113·30	70	190	86·00	25
50	112·45	80	195	85·45	24
55	111·60	88	200	84·15	24
60	110·75	93	205	83·00	23
65	109·80	19·00	210	82·00	22
70	108·95	05	215	81·40	22
75	107·75	10	220	80·80	20
80	107·00	16	225	80·25	20
85	106·05	20	230	79·80	20
90	105·05	23	235	78·15	19·20
95	104·15	27	240	přerušeno	
100	102·95	19·30			

4. O superoxydu. Anoda pokrývala se při všech těchto pokusech černým práškem, který teprve při dlouho trvajících pokusech a při větší intensitě proudu odpadával do podložené mističky skleněné. Jak z dalšího vysvitne, bylo nutno určovati, mnoholi stříbra obsahuje vyloučený superoxyd. Než hned při prvním kroku, mířícím k tomuto cíli, shledal jsem se *v odporu se zkušenostmi staršími*, v úvodu uvedenými. Superoxyd v našem voltametru připravený, choval se chemicky značně jinak, než jak jsem dle výsledků autorů jiných očekával.

Tím objevila se především nutnost látku tuto ve větším množství připraviti a qualitativně zprvu zkoumati.

Příprava dála se jednak ve voltametru popsaném, poněvadž pak tento dával látky málo, ve voltametru jiném, který se skládal z nádobky skleněné čtyřhranné (rozměrů: 3, 4, 5 *cm*), do níž se ponořily kathoda platinová a anoda stříbrná, obě na stativu Edelmannově upevněné.

Voltametr formy Poggendorffovy dával superoxyd co černy amorfní prášek, který uschnuv stával se popelavě šedým; pro rychlou orientaci označím tento superoxyd v závorce připojeným *(a)*.

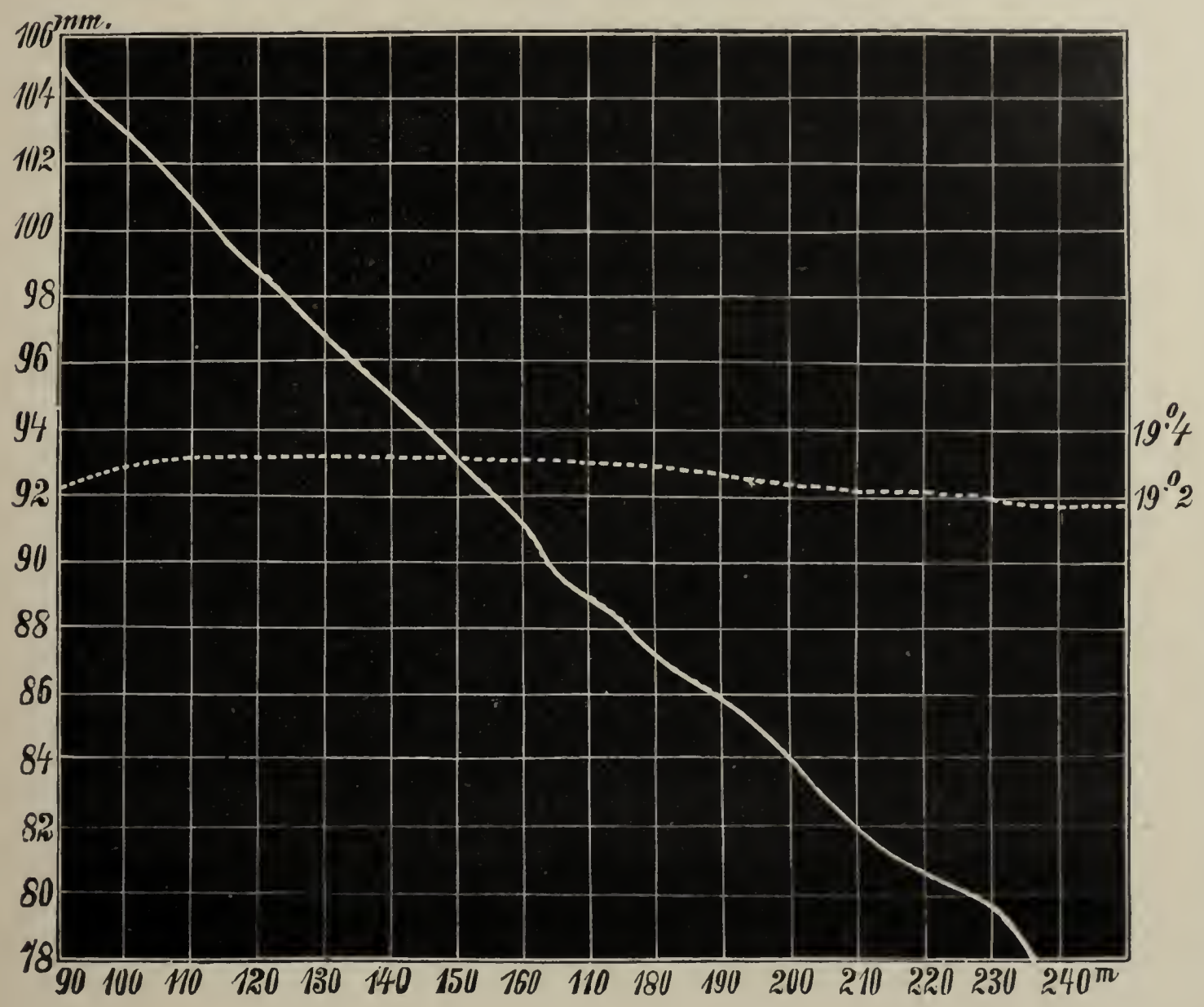
Druhý voltametr dával dva druhy superoxydu dle toho, jakých elektrod při rozkladu bylo užito.

Byla-li anodou deska stříbrná, kathodou deska platinová, povstával na anodě šedivý, nahnědlý prášek (při uschnutí světlejší).

Tento superoxyd označíme písmenou *(b)*.

Elektrolysováno-li mezi deskami platinovými, povstával na anodě černý, kovově lesklý superoxyd krystalinický, který zkrátka označíme *(c)*.

Obr. 13.



Toto roztřídění uperoxydů ve tři druhy nesmí nijak čtenáře zarážeti. Vlastnosti pozorovaných superoxydů byly v rozmanitých ohledech tak různy, že neváhám prohlásiti je za látky od sebe rozdílné. Z toho, čeho se dovídáme *v literatuře*, soudili bychom, že *superoxyd* stříbra elektrolyticky připravený *je jedna a táž látka.*

Naše pokusy však ukázaly, že *tomu tak není.*

Nejen vzhled prvých dvou superoxydů *(a)* a *(b)* ukazoval zvláště pod mikroskopem *úplně různou strukturu,* ale i některé *vlastnosti* těchto látek byly *úplně nové, dosud neznámé.*

Látky tyto, třeba se tolikrát při různých elektrolysách objevily, *nebyly posud zkoumány*, proto, že se považovaly za identické se superoxydem krystalinickým, který svou individuální formou k analysi spíše nabádal.

Konečně osměluji se tvrditi, že i poslední *superoxyd krystalinický (c) označený*, slabým proudem připravený, jest *látka nová*, sloučenina jiná, než kterou připravili Mahla, Fischer, Wallquist a Berthelot a to z důvodů, které

na svém místě ve srovnání s udáním starších těchto pozorovatelů zřejmě vyniknou.

Aby bylo možné srovnání a kontrola našich výsledků, uvádíme v následujícím úplný popis přípravy těchto zajímavých sloučenin. V dalším je popis, jak se chovají superoxydy v roztocích ammoniakálních a v kyselině dusičné, poněvadž to bylo pro nás otázkou důležitou.

Superoxyd *(a)* byl připravován proudem 0·06 až 0·24 Ampère, na ploše 12 cm^2 byla tedy hustota proudu v mezích 0·005 — 0·020 $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$ Při tom nejevil superoxyd různou intensitou proudu povstalý nějakých patrných rozdílů.

Ve vodě dal se vyprati od dusičnanu stříbrnatého, což se dálo na malém filtru.

Tento superoxyd *(a)* rozpouštěl se velice nepatrně v koncentrovaném ammoniaku i za horka, z roztoku srážel se pak chlorovodíkem jen při přidání vody. Při tom se objevil zákal opalisující proti tmavému pozadí růžový, proti světlému zelenomodrý bez pochyby chloridu stříbrnatého.[53]

Ammoniakální roztok s nadbytkem kyseliny dusičné dával zákal namodralý, přilitím konc. chlorovodíku rozpustný, zředěním vodou zase však se objevující.

V kyselině dusičné hlavně čerstvě připravený superoxyd *(a)* rozpouštěl se čiře a úplně. Někdy se sic objevila barva nazelenalá, která však rychle mizela. Z tohoto roztoku srážel se chlorovodíkem na chlorid stříbrnatý. Ammoniakem přesycený roztok v kyselině dusičné choval se jak roztok ammoniakální.

Zahřátím čerstvých roztoků, nebo ostavením jich po několik dní, změnilo se chování roztoku ammoniakálního tak, jakoby byla přidána voda — roztok v dusičné své vlastnosti neměnil.

Zajímavo jest, že se tento superoxyd *(a) vyšší temperaturou nerozkládá*, byť žíhán v tyglíku po 5 hodin v červeném žáru, aniž mohla vážením býti konstatována změna na váze. Takto vyžíhaný superoxyd *(a)* jevil v roztocích výše zmíněných tytéž vlastnosti, nezměnil žíháním ani svou tvářnost jsa leda v barvě trochu světlejší.

Superoxyd *(b)*[54] připravován podobně z téhož roztoku (5%) proudem 2 Daniellových článků intensitou proudu 0·2 až 0·7 Ampère na ploše 14 cm^2, tedy hustotou 0·014—0·05. Jevil se co šedivý, nahnědlý prášek, který se dal smýti

---

[53] Zákal tento mizel nadbytkem konc. chlorovodíku, při zředění se zase objevil.

[54] Při této přípravě superoxydu (*b*) pozorován byl zvláštní velmi zajímavý úkaz. Stalo se totiž, že na kathodě vyrůstalo stříbro v teninkých stromečcích, které se přiblížily až k anodě V okamžiku, kdy nastalo kovové spojení, byl slyšán zvláštní *praskot*, silný to zvuk, upomínající na klepání vodního kladívka a částečně na zvuk jiskry elektrické. Vložením galvanometru se poznalo, že zvuk onen povstává při kovovém spojení obou elektrod, kteréžto spojení ihned se samo přerušuje. Pozorováním roztoku, elektrolysovaného v nádobce s planparallelními stěnami, dalekohledem viděli jsme, jak od místa kovového styku obou elektrod v okamžiku, kdy praskot byl slyšán, šíří se radiálně vlna roztokem na všechny strany. I při pohybování kathodou, dotknul-li se některý krystal anody, ozval se onen zvuk. Úkaz byl pozorován náhodou a byl to zvuk tak silný, že jsme se, nic netušíce a opodál pracujíce, přímo ulekli.

s desky stříbrné proudem vody, při tom se však s ním, zvláště byla-li hustota proudu větší, smývaly teninké vrstvy stříbra.

Byl také připraven mezi elektrodami platinovými, z nichž jedna byla co možná jemně postříbřena, avšak i tu objevovaly se v promytém superoxydu maličké krystalky stříbra.

V koncentrovaném ammoniaku se jenom částečně rozpouští a z čerstvého roztoku *nesráží se chlorovodíkem ani po přidání vody.* Po nějakém čase (24^h až 48^h) objeví se teprve *růžové* velmi něžné zabarvení.

Přidáním kyseliny dusičné objevuje se bílá sraženina, která dalším přidáním chlorovodíku se rozpouští, při zředění vodou však zase se objevuje.

V kyselině dusičné rozpouští se superoxyd *(b)* podobně jako superoxyd *(a)* barvou nazelenalou a nestálou; z roztoku sráží se chlorovodíkem na chlorid stříbra. Ammoniakem však se onen roztok nesráží a zůstává čirým. Přidáme-li sem chlorovodíku nesráží se ani po přidání vody a objevuje se červené zabarvení po čase.

Starší roztok ammoniakální neb zahřátý sráží se chlorovodíkem — roztok v dusičné kyselině chová se ať starší či zahřátý stejně.

Žíháním tohoto superoxydu *(b)* nemění se ničeho na těchto jeho vlastnostech. Podobá se tedy velice tento superoxyd prvému, jeví však přece charakteristické rozdíly. *Oba pak superoxydy liší se od superoxydu v literatuře popisovaného vlastnostmi téměř polárnými.*

Superoxyd v literatuře popisovaný na př. rozpouští se velmi dobře v ammoniaku — naproti tomu superoxydy mnou připravené *(a)* i *(b)* rozpouštějí se jen velice nepatrně byť i v horkém ammoniaku, při čem (pro superoxyd *(b)*) tvoří se *zajímavá sloučenina,* která se *chlorovodíkem nesráží*, ale po čase červenavé zabarvení dává.

Případ tento, dosud nikde neuvedený, má velikou důležitost pro quantitativná určování roztoků elektrolysovaných dusičnanu stříbrnatého, která provedl na př. Hittorf (viz o tom str. 13.), neboť není daleka myšlénka, (jež se mou prací skutečně potvrdila), že se elektrolysou utvoří takové *sloučeniny stříbra, které* se z roztoku *chlorovodíkem nesráží* na chlorid stříbrnatý. Tím se pak ovšem stává přesné určování obsahu stříbra v roztoku illusorním.

Rovněž při rozpouštění v kyselině dusičné chovají se superoxydy *(a)* a *(b) jinak* než superoxyd uváděný v literatuře. Pro tento je charakteristickou při tom *rudohnědá, téměř černá barva*, kdežto superoxydy *(a,b)* rozpouštěly se v kyselině dusičné téměř *bez barvy*, ukazujíce jenom někdy slabě nazelenalý nádech.

Rovněž pamětihodnou jako neočekávanou jest vlastnost superoxydu *(a)*, že se *ani červeným žárem nerozkládá*. Jest to tedy látka *značně stálá* naproti té, o níž na př. Berthelot praví, že se i *v obyčejné temperatuře* v suchu *rozkládá.*

Konečně i třetí superoxyd *(c)*, ačkoliv dosti podobný superoxydům Fischera, Mahly, Berthelota atd., ukazoval jisté vlastnosti rozdílné.

Připravován byl pak superoxyd *(c)* nejlépe z 10 až 15% roztoku dusičnanu stříbrnatého mezi platinovými elektrodami ve voltametru zmíněném, z nichž

anoda byla menší (3·5 cm^2 proti 14 cm^2) než kathoda a byla v podobě hřebene rozstříhána v ouzké proužky, poněvadž se ukázalo, že právě *jen na ostrých hranách* se nejvíce a nejlépe krystaly superoxydu vytvářejí.

Zdrojem proudu byl jeden článek Daniellův, mimo to vkládán do kruhu ještě odpor, tak že intensita proudu byla asi 0·1 Ampère, hustota na anodě asi 0·02 $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$. Za těchto podmínek vyrůstaly na ostrých hranách anody tmavé kovově lesklé krystalky superoxydu *(c)*, jež během 12—18 hodin staly se *makroskopickými osmistěny*, krychlí otupenými. Krystaly tyto nabývaly někdy velikosti *až* 2 *a* 2·5 *mm*, byly krásné, velikého lesku, byvše připraveny, omyty vodou a osušeny.

Po několika dnech (5, 6ti) však lesku svého pozbývaly, při čemž povrch jich ukazoval přerůzné barvy tenkých vrstev.

Z roztoků slabších tvořilo se superoxydu málo a ve velmi drobných krystalcích, které snadno z anody do roztoku odpadaly, z roztoků koncentrovanějších 20, 25% atd. tvořily se sice pěkné a veliké krystaly, za nedlouho však ukázala se vada tohoto způsobu přípravy způsobem velice frappantním. *Elektrolysovaný roztok totiž nabýval pojednou temně hnědé barvy na důkaz, že se superoxyd ve volné, proudem povstalé kyselině dusičné rozpouští.*

Superoxyd *(c)* vodou tak dalece vypraný, že slitá voda, v níž se 4 hodiny superoxyd vypíral, nedávala reakci s chlorovodíkem, sušen byl nad chlorkalciem za obyčejné temperatury síně a zkoušeno vážením, jak asi rychle s časem rozklad postupuje. Výsledky těchto vážení ukazuje tab. 15.

15. tabulka: Zkoušení stálosti superoxydu *(c)*.

Č a s. Dni	Váha sup. *(c)* *mg*	Temper. ° C.
0	96·30	17·3
1	30	17·8
2	29	18·9
3	26	18·0
4	22	19·1
5	16	19·3
6	16	19 0
7	11	18·0
9	13	18·0
12	13	18·5
18	04	19·6
27	96·01	16·8

Z těchto čísel jest patrno, že průměrná změna na váze obnáší za celý den něco málo přes 0·01 *mg* tedy asi 0·01 %. *Není tedy tato látka* alespoň ve vzduchu a za obyčejné temperatury *tak nestálou jako* na příklad *superoxyd Berthelotův.*

Vlastnosti roztoku ammoniakálního a v kyselině dusičné se celkem shodují s těmi, které jsme v úvodu poznali.

V koncentrovaném ammoniaku rozpouštěl se superoxyd *(c)* velmi rychle, úplně a čiře, ano se vyvíjelo veliké množství plynu *(N_2?)* a roztok se silně

zahříval. Z tohoto roztoku srážela se chlorovodíkem teprv po přidání vody bílá sraženina chloridu stříbrnatého.

Přidalo-li se do roztoku ammoniakálního kyseliny dusičné až do nadbytku, objevil se modravý zákal. Přidáním chlorovodíku vypadl chlorid.

V koncentrované kyselině dusičné rozpouštěl se superoxyd *(c)* sytou barvou tmavě červenohnědou. Světlem a teplem tato barva bledne přecházejíc v žlutohnědou, žlutozelenou, až konečně roztok se vyčíří.

Ve tmě a chladu chovaný roztok podržel po 5 neděl téměř svou původní barvu, zatím co stejný roztok v téže temperatuře ale ve světlo vystavený, již po 3 nedělích úplně se vyčířil. Přidáním vody roztok náhle celý zčerná a za hojného vyvíjení se kyslíku rychle se odbarvuje.

Z tohoto roztoku ať čerstvého či starého sráží se chlorovodíkem chlorid stříbra. Ammoniakem tratí čerstvý roztok rychle svou barvu a chová se jako roztok ammoniakální.

V koncentrované kyselině sírové rozpouští se superoxyd *(c)* barvou špinavě zelenavou, která však na světle není stálou, ačkoliv se tak v literatuře udává. Po několika dnech je roztok úplně čirým.

Chlorovodíkem mění se přímo superoxyd *(c)* na chlorid stříbra, při čemž četné bublinky plynu z něho prchají.

Ke srovnání tohoto superoxydu (3) se superoxydem v literatuře popsaným připraven tento druhý superoxyd dle předpisů v úvodu udaných.

Veden totiž voltametrem s deskami platinovými, naplněným asi 15% roztokem dusičnanu stříbrnatého proud 4 Daniellových článků, tak že hustota na anodě stoupla na 0·07 $\frac{\text{Amp.}}{cm^2}$. Na anodě vyrůstaly zrovna před očima pozorovatele s velikou rychlostí dlouhé, černé jehly superoxydu, zatím co se kathoda pokrývala »amorfním« obláčkovitým stříbrem na vrcholcích černajícím na důkaz značné hustoty proudu. Během půl hodiny utvořily se skutečně asi 2 gramy *superoxydu, který* však *již svou tvářností od superoxydu (c) značně se lišil.* Krystalky jeho velice drobné mohly býti jen mikroskopem pozorovány (asi 60nás. zvětšením) a podávaly velice *charakteristický obraz* právě *pro tento druh superoxydu.* Byly tu sice také zcela zřetelné osmistěny krychlí otupené, ale dle jedné osy seskupeny v dlouhé větvice a jak se zdálo dle téže osy protaženy. Tvořily zhusta tvar palcátu ne nepodobný, jehož hlavice byla zakončena největším krystalem a jenž byl po délce jakoby rýhován.

Tento superoxyd nemohl býti vyprán vodou od dusičnanu stříbrnatého, *po 7mi dnech*, kdy byla naň denně nejméně 3krát nová voda nalita, jevila voda 4 hodiny na něm ponechaná přidáním chlorovodíku silný zákal chloridu stříbrnatého

Naproti tomu *superoxyd (c) se* pod vodou *tak rychle a značně nerozkládal* — zdánlivě byl vyprán již prvý den, a teprve při bedlivějším zkoumání shledalo se, že voda 24 hodin nad ním ostavena dává zákal s chlorovodíkem.

Jinak se však vlastnosti obou látek shodovaly, jak jsme viděli.

Proto však přece bylo zajímavo zkoumati, jaký je obsah stříbra v této látce, poněvadž analysy provedené od jiných tak zřejmý podávají důkaz, že se nejednalo v oněch případech o látku tutéž.

První dvě analysy na procentuální obsah stříbra superoxydu *(c)* provedeny byly následovně: Superoxyd *(c)* promyt vodou, což trvalo asi 2 hod. — osušen z hruba ssavým papírem a dán do exsiccatoru s chlorkalciem; na to zvážen, rozpuštěn v kyselině dusičné a z tohoto roztoku sražen na chlorid. Chlorid promyt vodou a vysušen, filtr spopelen a chlorid v tyglíku vyžíhán, po schladnutí v exsiccatoru vážen.

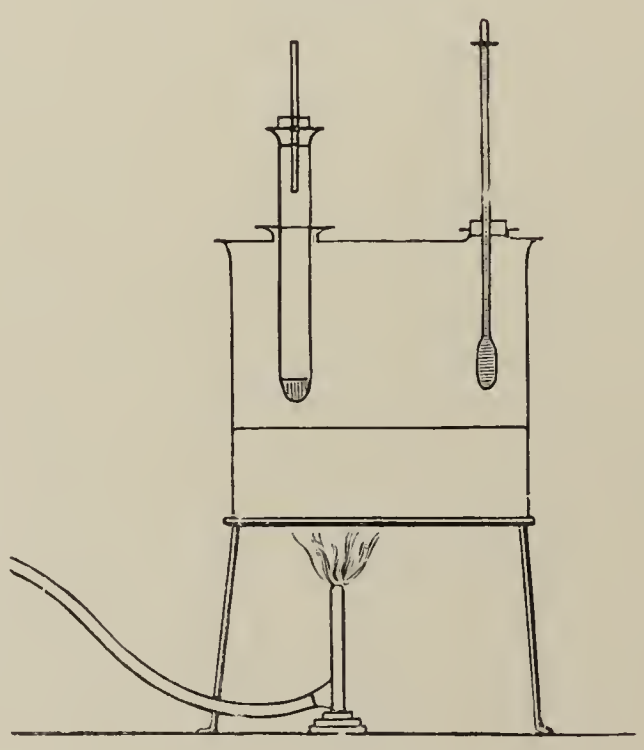
Superoxydu bylo při I. analyse 534·36 *mg* chloridu 559·20 *mg* tedy 78·8% stříbra
» » » II. » 392·10 » » 404·74 » » 77·7% »

Čísla udávající procentuálný obsah stříbra liší se o 1·5%, což se však dá vysvětliti. Superoxyd *(c)* při I. analyse byl sušen 24 *h*, kdežto onen při II. analyse pouze 16 *h*; je tedy možno, že ona látka za přítomnosti vody v prvém případě více se rozložila než v druhém.

Druhé dvě analysy provedeny způsobem jiným.

Ve zkoumavce, jejíž váha byla známa, naváženo určité množství superoxydu *(c)* a na to vložena zkoumavka do lázně vzduchové, kde superoxyd *(c)* zvolna zahříván. (Uspořádání to jest patrno z výkresu č. 14.)

Obr. 14.



Temperatura zvolna stoupala. Jakmile dosáhla 122° ozval se slabý šumot a krystalinický lesklý superoxyd *(c)* proměnil se rázem na prášek tmavý bez lesku, který se i na vyšších místech vnitřku nádobky usadil. Temperatura na to zvýšena až na 160°, udržována na této výši celou hodinu. Zbytek ve zkoumavce vyjmut z lázně ochlazen a vážen. Potom byl znovu vložen do téže lázně vzduchové a zahříván po 3 *h* v temperatuře mezi 160°—170°. Vážení po tom provedené ukázalo souhlas s vážením předešlým, látka se tedy dalším zahříváním po 3 hodiny trvajícím nezměnila a nastala patrně veškerá změna náhle při oné temperatuře 122°.

Při náhlém rozkladu tom bylo cítiti zápach po ozonu, že by byly vystupovaly ze superoxydu *(c)* žlutavé páry — nebylo pozorováno.

Zbytek vložen do tyglíku porcelánového a po 1 *h* žíhán slabě v temperatuře asi $300^0 - 400^0$. Při tomto žíhání vystupují ze zbytku žlutavé páry na důkaz, že přítomen je *dusík*. V tyglíku po vyžíhání objevilo se pouhé stříbro ve formě šedobílé velmi jemné a ušlechtilé houby.

Analysa III. a IV. daly pak tato čísla

III. superoxydu *(c)* 1366·18 *mg* zbytku: 1216·41 *mg*; ze zbytku 1210·39 *mg* 1057·11 *mg* stříbra

IV. superoxydu *(c)* 671·38 *mg* zbytku: 597·57 *mg*; ze zbytku 589·82 *mg* 515·30 *mg* stříbra.

Z toho pak vychází procentuální obsah:

při III. analyse má superoxyd *(c)* stříbra 77·8%; zbytek má stříbra 87·4%
» IV. » » » » » 77·8%; » » » 87·4%

Přehled pak všech čtyř analys dává procentuální obsah stříbra ve superoxydu *(c)* takto:

I.	II.	III.	IV.
78·8%	77·7%	77·8%	77·8%

Střed jest 78·0% stříbra.

Číslo toto shoduje se nejlépe s číslem Fischerem udaným 78·9 — nechceme však tím říci, že by superoxyd *(c)* byl týž jako Fischerův, poněvadž podmínky při uspořádání byly jiné a na těch zdá se, že konstituce této látky závisí.

Zajímavy byly dále vlastnosti onoho zbytku ze superoxydu *(c)* zahřátím na 122^0 povstalého, kterýž chceme zkrátka nazývati superoxydem *(d)*.

Procentuálný obsah na stříbro jest u této látky 87·4%, jak jsme viděli shoduje se téměř úplně s procentuálným obsahem superoxydu Ag_2O_2, jenž má 87·1% stříbra.

V ammoniaku rozpouštěl se superoxyd *(d)* čiře avšak neúplně. Z tohoto roztoku srážel se pouze zředěným chlorovodíkem na chlorid stříbrnatý.

Kyselinou dusičnou jevil roztok ammoniakální zabarvení opalisující — přilitím chlorovodíku vypadl chlorid.

V kyselině dusičné rozpouští se superoxyd *(d)* velmi zvolna roztokem namodralým, opalisujícím. Chlorovodíkem sráží se z tohoto roztoku chlorid, ammoniakem mizí modravé zabarvení a roztok má vlastnosti roztoku pouze ammoniakálního.

Souhlasí tedy vlastnosti tohoto superoxydu *(d)* s vlastnostmi superoxydu *(a)*, z čehož by následovalo, kdyby se úplná totožnost těchto látek dokázala, že jest krystalinický superoxyd *(c)* vyšším ještě oxydem stříbra než Ag_2O_2, tedy snad Ag_2O_3 (jak to navrhl Berthelot) nebo snad i Ag_2O_4.

Všechny tyto otázky spojují se v jednu otázku samu pro sebe, která by všestranně a úplně studovala podstatu těchto zajímavých sloučenin.

Úloha tato není tak nepatrna, jak by se na první pohled zdála.

Poznali jsme celkem *čtyři látky různých vlastností, látky nové, dosud nestudované,* jichž konstituci chemickou bylo by nutno stanoviti, jakož i badati,

jak toto *složení chemické souvisí s podmínkami fysikálními*, za kterých byl ten který superoxyd připraven. Ostatně jest i velmi blízka otázka, zda nen těchto látek *ještě více* — snad celá řada.

Zdá se totiž velice pravděpodobným dle analogie prvých dvou superoxydů *(a) (b)*, kde různé jich složení zaviňuje hlavně různá hustota proudu na anodě, že i *třetí superoxyd (c)* bude se vyskytovati *ve více formách.*

Existuje-li pak již taková závislost na hustotě proudu, pak jistě i *ostatní veličiny* jako *koncentrace roztoku, temperatura* jeho, *doba, po kterou elektrolysa trvá* a t. d. objeví se jako *činitelé* větší nebo menší *působnosti na konstituci superoxydu.*

Jest tedy úloha tato nesnadna a obtížna vyžadujíc práce jak bedlivého fysika tak i zkušeného chemika, který by prováděl co možná úplné analysy jednotlivých druhů superoxydů za určitých poměrů a okolností povstávajících.

Doufám, že bude mi možno ve studiu těchto zajímavých sloučenin pokračovati ve smyslu uvedeném.

5. Změna koncentrace roztoku. Další příčina změny vnitřního odporu voltametru jest v rostoucí koncentraci roztoku na anodě a ubývající koncentraci roztoku při kathodě. Zdálo by se, v našem případě, kde anoda všecka jest obklopena kathodou, že se rozdíly v koncentraci proudem způsobené samy opět vyrovnají, již proto, že roztok specificky těžší bude od anody výše položené padati ke dnu tyglíku.

Aby se rozdíly konstatovaly, analysován roztok před elektrolysou a roztok elektrolysovaný z různých vrstev vzatý.

Popel 20ti menších filtrů vážil 32·23 *mg*, tedy popel jednoho 1·61 *mg*
» 15ti větších » » 44·52 » » » » 2·97 »

Aby se určila koncentrace roztoku v různých vrstvách, odssát zprvu roztok nejvrchnější, až se vynořil okraj skleněné mističky — vrstva první, dále odssáta (ovšem jinou pipettou) až ke dnu mističky — vrstva druhá a konečně zbytek až na dno tyglíku odssát co vrstva třetí.

Dvě měření dala následující výsledky:

Měření	Koncentrace roztoku neelektrolysovaného	Roztok elektrolysovaný Vrstva: 1.	2.	3.
X.	3·31%	3·38%	3·94%	3·26%
XI.	4·45	4·59	4·75	3·62

U anody nahromaďuje se tedy roztok nejhustší, na dně pak tyglíku roztok nejřidší proti všem zákonům tíže. Při elektrolyse — a o to nám hlavně jde, jak se má věc *při elektrolyse* — jsou zajisté tyto *rozdíly daleko větší*, již proto, že ono odssátí dálo se po přerušení proudu teprve po 20ti minutách, když totiž bylo odbyto odečítání úchylek ϑ. Dále uvážiti dlužno tu okolnost, že roztok střední vrstvy vzat *pouze z okolí skleněné mističky* a *nikoliv z ní* — z obavy že by byl vyssát s sebou superoxyd; v oné pak mističce je jistě roztok nejhustší.

Mimo tyto *změny lokální* v koncentraci roztoku, zajímaly nás také *změny celkové*. Aby tu byla možná kontrola výsledku, vážena byla nejen kathoda před a po elektrolyse, ale podobně i anoda a určováno množství stříbra v superoxydu obsaženého.

Anoda byla vyjmuta, když se při odssávání roztoku vynořila skleněná mistička, omyta nad filtrem jemným proudem vody, usušena a vážena po vyrovnání se temperatury.

Superoxyd na filtru sebraný, promýván byl studenou vodou, až tato nejevila přidáním chlorovodíku ani stopy chloridu stříbrnatého.

Po té rozpuštěn superoxyd koncentrovanou kyselinou dusičnou, filtr důkladně vodou vymyt a roztok, jakož i voda ku promytí užitá sraženy chlorovodíkem. Další pochod analysy proveden jako dříve.

K určení vzat týž roztok ve větší zásobě déle stojící a naplněn jím současně tyglík i kádinka. Vážení pak tygliku s roztokem a kádinky s roztokem provedeno na dvojích vahách taktéž současně, poněvadž se roztok v otevřené nádobě velmi rychle vypařoval. Činilo toto vypařování na př. při otevřeném tyglíku téměř 1 *mg* za minutu.

Po pokusu srážen veškerý roztok vyssátý, jakož i všechna voda, jíž bylo k vymývání tyglíku, superoxydu atd. použito.

Vykonáno pak 7 měření úplných, jichž výsledky ukazuje přehledně tabulka č. 16.

16. tabulka: Přehled výsledků měření XIII.—XVII. a XIX.—XX.

Měření	Ztráta anody *mg*	Zisk kathody *mg*	Diff. *mg*	*Ag* ze super. *mg*	Množství *Ag* v rozt. před pokusem *mg*	Množství *Ag* v rozt. po pokusu *mg*	Diff. *mg*	Koncentrace rozt. před elek. %	Koncentrace rozt. po elektrol. %	Intensita Ampère	Doba trvání minut
XVI	487·4	477·3	10.1	5·5	2656·2	2653·6	2·6	5·245	5·240	0·2372	30
XVII	485·0	481·2	3·8	0·6	2722·6	2720·6	2·0	5·249	5·245	0·2391	30
XIX	561·1	541·1	20·0 !	?	2292·1	2287·7	4·4	5·262	5·252	0·1344	60
XIII	1749·9	1739·2	10·7	7·7	2551·2	2540·2	11·0	5·150	5·127	0·2161	120
XIV	1884·0	1868·6	15·4	11·4	2663·1	2650·9	12·2	5·231	5·207	0 2321	120
XV	3347·8	3322·6	25·2	22·8	2721·1	2708·2	12·9	5·253	5·228	0·2064	240
XX	5906·4	5849·1	57·3	52·3	2057·1	2046·8	10·3	4·784	4·760	0·0684	1335

Srovnáním prvých dvou sloupců vidíme na první pohled, že *ztráta anody jest vždy* větší *než zisk kathody*, ačkoliv intensita proudu a tím i hustota jeho dosti jest různá (0·07 — 0·24).

Zdá se, že *časem* a *intensitou tento rozdíl vzrůstá.*

Množství stříbra ze superoxydu jest při všech měřeních *menší*, *než rozdíl ztráty anody a zisku kathody*, tak že by se zdálo, že něco stříbra přechází do roztoku a že tento stává se elektrolysou *koncentrovanějším.*

Tomu však přímo *odporují čísla* udávající koncentraci roztoku *před* a *po* elektrolyse a dle nich počítaná čísla pro obsah stříbra před měřením a po měření. Poznáváme z nich úplně jistě — *nové ztráty* stříbra, které se připojují k nadbytku rozdílu ztráty anody a zisku kathody nad množstvím stříbra ze superoxydu.

Nastala nyní otázka tyto *ztráty úplně zaručené a pravidelné* vysvětliti. V celém postupu analysy nemohlo býti shledáno nic závadného. Myšlénka, že se chlorid stříbrnatý za přítomnosti kyselin poněkud rozpouští, byla sice oprávněna — ale nevysvětlovala, proč by se v roztoku elektrolysovaném utvořený chlorid více — a to značně více — rozpouštěl, než v neelektrolysovaném. Pátráno tedy po stříbře v kapalině, která prošla filtrem. Úlohu tuto převzal laskavě p. Dr. O. Šulc a nalezl skutečně v oné kapalině něco stříbra.

Quantitativná analysa nemohla býti provedena, poněvadž ze všech měření dohromady úhrnná ztráta stříbra obnášela asi 70 *mg*.

Zdá se tedy oprávněnou hypothesa, že se elektrolysovaný roztok všechen chlorovodíkem nesráží, čili že se tvoří takový roztok stříbra procházejícím proudem, který se chlorovodíkem nesráží, jako na př. ammoniakální roztok superoxydu (*b*).

Již také to, že rozdíl ztráty anody a zisku kathody jest větší než množství stříbra ze superoxydu, zdá se nasvědčovati naší hypothese, dle které by se rozpuštěný superoxyd chlorovodíkem úplně nesrážel.

Není však tato hypothesa jediná možná, naopak zde se otevírá před námi celá řada nových otázek, náležejících *do fysikální chemie*.

17. tabulka: Procentuální změny intensity.

Měření	Odpor vnitřní a vnější [55] S. J. Ω	Čas min.	α max. a min. *mm*	Rozdíl *mm*	Proc. rozdíl %	Procent. rozdíl za 1 min. %	t_7 na zač. na konci °C.	Rozdíl °C.	t_6 na zač. na konci °C.	Rozdíl
IX	3 30	111	94·10 76·55	17·55	18·65	0·168	17·82 19·66	1·84	17·7 18·5	0·8
XI	2 30	111	97·00 81·15	15·85	16·34	0·147	19·06 21·62	2·56	19·6 20·2	0·6
XII	2 30	112	102·85 89·20	13·65	13·27	0·119	17·88 20·50	2·62	17·5 18·7	1·2
XIII	2 30	112	113·45 94·00	19·45	17 14	0·153	17·80 20·47	2·67	18 0 18 5	0·5
XIV	2 30	112	121·05 103·95	17·10	14·13	0·126	17·80 19·88	2·08	17·5 17·9	0·4
XV	2 30	231	120·45 78·15	42·30	35·12	0·152	17·28 19·20	1·92	17·4 17·5	0·1
XVI	2 30	23	117·35 112·70	4·65	3·96	0·172	15·50 16·28	0·78	15·2 15·2	0·0
XVII	2 30	22	117·90 113·35	4·55	3·86	0·175	14·45 15·28	0·83	14 2 14 2	0·0
XVIII	2 30	52	116·20 105·45	10·75	9·25	0·178	14·69 16·07	1·38	14·3 14·4	0·1
XIX	2 30	51	66·95 63·50	3·45	5·15	0·101	14·40 15·42	1·02	13 9 14·0	0·1
XXI	2 30	51	71 65 65·55	6·10	8·51	0 169	14·32 15·35	1·03	13·6 13·9	0·3

[55] Odpor vnější je udán v jednotkách Siemens a dlužno k němu přičísti odpor vedení, který obnášel asi 0·06 S.

6. Některé výsledky. Úvahy závěrečné. Intensita proudu ve svém průběhu s časem jevila se nám co křivka stoupající z počátku k určitému maximu a klesající pak od tohoto maxima.

Poznali jsme některé vlivy působící tyto změny intensity respektive vnitřního odporu voltametru, přihledněme nyní jak veliky jsou tyto změny procentuálně a jaký význam mají pro měření voltametrické intensity proudu vůbec.

V tabulce č. 17. uvedeny jsou maximální a minimální úchylky α jednotlivých měření a procentuální změna α za čas trvání pokusu.

Vedle toho jsou uvedeny temperatury roztoku z počátku a ku konci měření jakož i temperatura okolí voltametru.

Změny ve vnitřním odporu voltametru vynikají zde proto tak určitě a značně, poněvadž v kruhu, kde se voltametr nalézal, byl odpor jeho — asi $8\,\Omega$ — odporem hlavním; proto jsou v tabulce hned z počátku připojena čísla, udávající, jaký odpor byl vložen v kruhu hlavním (mimo odpor voltametru) a jaký v kruhu vedlejším.

Z těchto čísel jest patrno jaký asi by musil býti zevnější odpor v hlavním kruhu, aby změny odporu vnitřního se v úchylce α nejevily.

Uvažujme následovně: Měření voltametrické v našem případě musí trvati nejméně půl hodiny, abychom vážením určili přesně vyloučené množství stříbra na $0{\cdot}1\%$. Při tom však obnáší změna vnitřního odporu tolik, že se intensita za ten čas změní o 4%. Celkový odpor jest přibližně $2 + 8 = 10\,\Omega$; činí tedy jeho změna $0{\cdot}4\,\Omega$. Aby tato veličina byla desetinou procenta musil by úhrnný odpor činiti $400\,\Omega$, čili musili bychom užiti proudu asi 70 Daniellových článků. To se potvrdilo měřením následujícím, při němž jsme užili 8 článků Daniellových za sebou, vloživše za vnější odpor $46\,\Omega$. Průběh intensity vysvítá z čísel tabulky č. 18.

18. tabulka: Průběh intensity při měření č. VIII.

Čas	α	Čas	α
0	137·00	30	137·70
1	20	35	60
2	40	40	50
3	55	45	35
4	55	50	15
5	60	55	137 05
6	65	60	136·95
7	70	65	70
8	75	70	55
9	80	75	25
10	85	80	136·10
15	80	85	135·75
20	85	90	ukončeno
25	137·75		

Připadá tedy na $75\,m$ změna $1{\cdot}53\%$ čili $0{\cdot}02\%$ za minutu v intensitě respektive v odporu; tento však činí nyní úhrnem $54\,\Omega$ tak, že za půl hodiny máme změnu $0{\cdot}6\%$ této veličiny čili $0{\cdot}32\,\Omega$. Číslo toto je menší, než jsme

prve obdrželi (0·40 Ω) a dle toho by byl i potřebný vnější odpor (320 Ω) a počet článků (58) menší a to proto, poněvadž jsme z příliš vzdáleného případu soudili, z veličin příliš malých a jen aproximativních.

Tento příklad illustruje velmi důležité pravidlo, při užívání voltametru na stříbro k účelům měření.

Voltametr měří nám patrně intensitu střední během doby pokusu, čili integrál funkce, již neznáme. Chceme-li tudíž dle vyloučeného množství souditi na intensitu, musíme buďto znáti průběh intensity nebo věděti, že změny vnitřního odporu voltametru jsou proti odporu kruhu velmi nepatrny čili, že proud jest silně napjat. Jak silně má býti proud napjatým, to právě určují ony změny vnitřního odporu voltametru a bez znalosti jich pro určitý stroj, nemůžeme dáti pravidla pro měření přesná, nechceme-li vždy býti v nejistotě.

Při měřeních našich znám byl průběh intensity i bylo potřebí určiti střední úchylku z dát pozorovaných.

To dálo se jednak počtem, vedle toho však pomocí vážení, kterážto methoda svou jednoduchostí, přesností a rychlostí, s jakou výsledky podávala, velmi dobře se osvědčila.

Počet založený na známé rovnici interpolační:

$$a_n = a_0 + n\,\delta'_{\frac{1}{2}} + \frac{n^2-n}{2}\,\delta_1'' + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}\,\delta'''_{\frac{3}{2}}$$

dál se takto. Zprvu byla určena plocha ohraničená křivkou až k 10tému pozorování, kdy stejný interval jednotlivých pozorování činil 1 minutu, pak plocha ostatní, při níž ordinaty postupovaly v intervalu 5 minut.

Při prvních 11 pozorováních neopomenuto vzíti v počet okolnost, že oboustranné pozorování úchylky α trvalo asi $^1/_2$ minuty, tak že odečtení vlastně platilo k době o $^1/_4$ minuty pozdější.

Plocha první dána pak byla součtem pozorovaných α, k němuž se připojila oprava

$$\sigma_{-\frac{1}{2}} = -\alpha_{10} + \tfrac{1}{24}\,(\delta'_{\frac{19}{2}} - \delta'_{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{24}\,\delta''$$

kde δ' jsou prvé a δ'' druhé difference.

Plocha ostatní se pak takto vypočetla. K součtu ostatních α (α_{10} počínajíc) připojila se oprava:

$$\sigma_{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,(a_n - a_0) - \tfrac{1}{12}\,(5\,\delta'_{n-\frac{1}{2}} - \delta'_{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\,\delta''$$

výsledek pak se násobil 5.

Součet obou ploch rozdělený dobou trvání (v minutách) poskytl střední α.

Střední α určováno mimo to methodou vážení. Průběh intensity znázorněn křivkou nanešenou na papír koordinátní. Dle této křivky se papír vystřihl a zvážil, na to byl přímým řezem učiněn z papíru pravidelný obrazec, který byl opět zvážen.[56] Z druhého vážení vypočtlo se mnoho-li váží 1 cm^2 příslušného papíru a z tohoto čísla a prvního vážení, mnoho-li plochy má obrazec křivkou,

[56] Přesvědčili jsme se, že jest nutno prováděti toto druhé vážení, poněvadž papír, ačkoliv z jednoho většího kusu, nebyl daleko tak homogenním, jak toho methoda vyžaduje. Ku posouzení této nehomogenity jsou v tab. 19. udány hodnoty pro váhu 1 cm^2 z jednotlivých vážení počítanou.

ordinatami a osou omezený. Jednoduchým dělením této plochy obdrželi jsme α střední.

Následující tabulka čís. 19. udává přehledně α jednotlivých měření a to určené jak počtem tak i vážením.

19. tabulka: Střední α počtem a vážením.

Měření	α počtem *mm*	α vážením *mm*	Diff. *mm*	Váha 1 cm^2 papíru *mg*
VI	92·98	92·99	—0·01	14·30
VII	92·11	92·07	4	14·39
IX	86·04	86·01	3	14·00
X	81·45	81·48	—3	14·06
XI	88·83	88·81	2	14·36
XII	95·34	95·40	—6	14·28
XIII	103·92	103·88	4	14·28
XIV	111·67	111·71	—4	14·16
XV	99 09	99·15	—6	14·12
XVI	114·85	114·80	5	14·26
XVII	115·57	115·56	1	14·35
XVIII	110·58	110·59	—1	
XIX	65·02	65·07	—5	14·02
XXI	68·23	68·24	—1	

Hodnoty obou method velmi dobře souhlasí, největší difference nečiní 0·1%, stačí tedy druhá pohodlnější methoda úplně v podobných případech a vede dříve k cíli.

Aby bylo možno posouditi, jak přesná byla methoda měření intensity proudu, počítána při každém měření konstanta C ze vzorce na str. 15. uvedeného, poněvadž na intensitu se dalo souditi z množství vyloučeného stříbra. V tabulce 20. jsou všechna potřebná data sestavena a z nich počítána constanta C.

20. tabulka: Konstanta C galvanometru.

Měření	Vylouč. Ag *mg*	Doba trvání minut	Intensita I Ampère	ϑ_0 na počátku *mm*	ϑ_0 na konci *mm*	ϑ_0 střední *m*	α_0 *mm*	C 0·00	Diff. od hodnoty stř.
I	1050·4	120	0·1305	101·14	101·11	101·13	63·07	6734	5·5
II	920·2	60	0·2286	101·24	101·00	101·12	110·78	23	— 5·5
III	909·0	60	0·2258	101·20	101·04	101·12	109·39	25	— 3·5
IV	1057·7	60	0·2627	101·40	101·84	101·62	112·78	45	16·5
V	1133·0	60	0·2815	101·27	101·29	101·28	120·95	16	—12·5
VII	1914·5	141	0·2024	101·21	101·30	101·26	92·06	27	— 1·5
VIII	996·8	90	0·1651	101·35	101·27	101·31	137·06	44	15·5
IX	1440·9	120	0·1790	100·35	100·65	100·50	85·98	29	0·5
X	829·7	73	0·1694	100·45	100·52	100·49	81·43	25	— 3·5
XI	1486·9	120	0·1847	100·59	100·20	100·40	88·83	14	—14·5
XII	1591·1	120	0·1977	101·01	100·82	100 92	95·28	33	4·5
XIII	1739·2	120	0·2161	100·66	100·67	100·67	103·88	34	5·5
XIV	1868·6	120	0·2321	100·40	100·55	100·48	111·60	22	— 6·5

Střední hodnota C z těchto 13 pozorování jest	0·0067285	
při čemž střední chyba jednotlivého pozorování činí	± 0·0000094	0·14%
» » » středu	± 0·0000029	0·04%
Pravděpodobná pak chyba jednotlivého pozorování	± 0·0000062	0·09%
» » » středu	± 0·0000019	0·03%

Z toho je patrno, že lze touto methodou měřiti intensitu přesně jistě na 0·1%.

Výsledky této práce učí nás pohlížeti na voltametr na stříbro z jistého stanoviska.

Chceme-li měřiti přesně intensitu proudu neznámého, o němž nevíme, jaké jest jeho napjetí a jaká *asi* jeho intensita, tedy se k tomu voltametr nehodí. Viděli jsme, kterak voltametr sám repraesentuje značný odpor (v našem případě 8 Ω), viděli jsme, jak veliky jsou změny tohoto odporu během měření — o tom ovšem nás pouhé měření voltametrické nepoučuje. Lze sice snížiti poněkud jak odpor voltametru tak i tím jeho změny jiným uspořádáním (kathoda formy misky, anoda deska horizontálně položená) koncentrovanějším roztokem atd., než to pouze umenšuje vlivy nepříznivé, ale jich neodstraňuje.

Máme za to, že lépe je studovati vlivy tyto, nalézti jich vnitřní spojení a zákonitost, než uváděti je co možná na malý stupeň, o jehož významu přece zůstáváme v nejistotě.

Je tedy potřebí ku přesnému měření především znáti určitý apparát na rozklad a to i určitě sestavený a plněný a dále dle předběžného pokusu nabyti přesvědčení, že změny vnitřního odporu voltametru na měření vlivu nemají. Z toho vysvítá dále, že musíme intensitu proudu přibližně znáti, čili že voltametr hodí se pouze tam, kde chceme přibližně známou intensitu přesně měřiti — jako je tomu na př. při graduování empirických strojů, nebo kalibrování už zhotovené škály takových strojů.

V tom je pak veliký význam voltametrického měření vůbec a zvláště měření voltametrem na stříbro, které se považuje za nejpřesnější.

Otázky, kterých jsme se tu dotkli, jsou tedy veliké důležitosti a zbývá mnoho a soustavné práce k důkladnému jich prostudování, které není tak snadné a nepatrné. Jedná se o zkoumání závislosti mnoha proměnných, které vždy současně vystupují, jedná se o problém velmi složitý, jejž nelze uvésti na řadu případů jednoduchých. Mimo to spojuje se tu těsně úloha fysika s úlohou chemika, jedná se tu o elektrochemii, úkazy chemické v elektrickém poli, právě jako zároveň o fysikální měření jistých veličin a tím je tato úloha tak obtížnou.

Než proto přece doufám, že budu moci alespoň v některých otázkách, které jsem jen zhruba naznačil, pokračovati a je hlouběji propracovati.

* * *

Ku konci vykonávám milou sobě povinnost, vzdávaje velectěnému učiteli svému p. prof. Dru. Čeňku Strouhalovi, řediteli c. k. fysikálního ústavu upřímné díky za laskavou jeho radu a pomoc ve všem, co se týkalo této práce, mimo to p. Dru. O. Šulcovi, assistentu c. k. česk. ústavu chemického za přípravu chemicky čistých praeparatů, jakož i pánům PhC. P. Pařízkovi a kollegovi Maškovi za přispění při práci a pozorování.

OBSAH.

Str.

Úvod 3

Část I.:

1. Tvar voltametru na stříbro 4
2. O elektrodách 6
3. O roztoku 7
4. Voltametr v činnosti 8
5. O přesnosti měření intensity proudu voltametrem na stříbro 13

Část II.:

1. Měření intensity proudu 15
2. Hustota proudu 23
3. Průběh intensity 25
4. O superoxydu 32
5. Změna koncentrace roztoku 40
6. Některé výsledky. Úvahy závěrečné 43

SEZNAM VYOBRAZENÍ.

Obr.		Str.
1.	Voltametr Hittorfův	5
2.	» Kohlrauschův	5
3.	Uspořádání methody měření intensity proudu	15
4.	Voltametr na stříbro	16
5.	Přenášení kathody	17
6.	Sestavení článků	17
7.	Grafické znázornění závislosti vnitřního odporu článku Daniellova na době po sestavení	18
8.	Korrekce α	19
9.	Průběh intensity	25
10.	» »	26
11.	» »	29
12.	» » a temperatury měření XIII — XIV	31
13.	» » »	33
14.	Způsob analysy superoxydu	38

SEZNAM TABULEK.

Tab.		Str.
1.	Přehled analys superoxydu stříbra	11
2.	Změna koncentrace roztoku na kathodě	13
3.	Přehled měření elektrochemického aequivalentu stříbra	14
4.	Vnitřní odpor článku Daniellova v závislosti na době po sestavení	18
5.	Graduování thermoelementu	20
6.	Korrekce ϑ vzhledem ku $T-t$	21
7.	» » » » t_3 a t_4	22
8.	» α » » t_4	22
9.	» » » » t_5	23
10.	» » » » t_6	23
11.	Data ku obr. 9. a 10.	27
12.	» » » 11.	28
13.	Průběh intensity a temperatury měření XIII—XIV	30
14.	Data měření XV	32
15.	Stálost superoxydu (c)	36
16.	Výsledky měření	41
17.	Změna intensity	42
18.	Průběh intensity měření VIII	43
19.	Střední α počtem a vážením	45
20.	»C« konstanta galvanometru	45

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 22.

O CHOVÁNÍ SE
METHYLENOVÉ MODŘE K LEUKOCYTŮM.

PODÁVA

JOS. VEJNAR,
STUD. MED.

(Z ÚSTAVU PRO VŠEOB. A EXPER. PATHOLOGII PROF. DRA. ARN. SPINY.)

PŘEDLOŽENO DNE 26. ÚNORA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Před rokem počal jsem sledovati účinek methylenové modře na různé tkaně a posud se zaměstnávám otázkou touto.

Ku pojednání tomuto vybídla mne práce Dra. Nečajeva* který obíraje se studiem fagocytosy, použil v jedné řadě experimentů modře methylenové za tím účelem, aby seznal, jakým způsobem leukocyty přijímají do sebe bacilly, zda a jak je mění.

Nečajev vkládal sterilisovanou houbou mycí, která byla nasáklá kulturou bakterií suspendovanou ve fysiologickém roztoku soli kuchyňské a zbarvená kapenkou 1% vodního roztoku methylenové modře, pod hřbetní kůží žab. Před tím ohledal obsah houby a viděl, že bakterie jsou sytě modře zbarvené. Po různé době pak houbu vytahoval, obsah na sklíčko vymačkal a pozoroval — v obsahu vymáčknutém shledal různé množství zbarvených bakterií a nezbarvených leukocytů, jež se měnilo s dobou, ve které se stalo ohledání po vložení houby pod kůži.

Některé leukocyty obsahovaly ve svém protoplasmatu zbarvené bakterie, které sledovaly veškeré pohyby leukocytův. Zhotovil-li kolem krycího sklíčka lem z vaseliny, aby vysýchání tekutiny zabránil, a nechal praeparát ležeti, zůstaly leukocyty živé i 48 hod., pohybovaly se a mohly býti sledovány změny, jež bakterie v nich prodělaly. Ze změn těch nechci se zmiňovati o všech, ale pouze o těch, které k tomuto pojednání podnět daly.

Nečajev pozoroval jeden zvláštní případ, kde leukocyt obsahoval pouze jednu tyčinku anthraxu. Viděl, že tyčinka po nějakém čase bledne, že dřívější sytá její barva poznenáhlu mizí, tak že tyčinka má posléze jen modravý nádech, a že konečně i ten zmizí. Současně však pozoroval, že se objevilo v leukocytu kulaté, modré zrnko, které tam dříve nebylo, zrnko to poznenáhla vzrůstalo a dostávalo barvu sytější, až konečně vyhlíželo jako tmavomodrý bod. Po nějaké době počalo zrnko toto zase barvu zvolna ztráceti, až také úplně vybledlo, jako před tím vybledla tyčinka.

Pozorování tohoto druhu vykonal Nečajev velké množství a soudí, že leukocyt extrahuje barvivo z tyčinky a v těle svém je zase vylučuje v podobě zmíněného zrnka; odtud prý vysvětlitelno, proč zrnko barevné vzrůstá při současném blednutí tyčinky. Tuto svoji domněnku podporuje dále nálezem násle-

---

* Dr. Peter Nečajev, Über die Bedeutung der Leukocyten bei Infektion des Organismus durch Bakterien — Virchow's Arch. 125., 3.

dujícím. Byla-li houba vytažena 1. a 2. den, našel mnoho zbarvených tyčinek v leukocytech, 3. a 4. den bylo zbarvených tyčinek méně, za to mnoho zrníček barviva. Dále pozoroval, že se rychlost odbarvovací u tyčinek ihned sníží, když leukocyt odumře. Posléze praví, že v těch případech, kde leukocyt nechoval tyčinek, že se také zrnka nevytvořila; kde zrnka v leukocytech byla, ale bacilly tu nebyly, vykládal si tím, že se tyto úplně odbarvily, takže pozorovány býti nemohly. Bacilly mimo leukocyty ležící odbarvovati se také Nečajev viděl, ale odbarvení dálo se mnohem pomaleji, než uvnitř leukocytův.

Nečajev nesouhlasí s učením Mečnikovovým o fagocytose, ale na základě těchto pozorování připouští, že leukocyty mohou podporovati rozpad bakterií tím, že jim jisté látky odnímají, jako jim zde odebraly barvivo.

Tolik vyjímám ze práce Nečajevovy a podávám dále, co jsem sám měl příležitost pozorovati při pokusech svých, ovšem za jiným účelem konaných. Pracoval jsem s $^1/_2\%$, 1% a 2% vodním roztokem modře methylenové a shledav, že výsledky různých koncentrací barviva se neliší, leda co do času, v jakém na tkaně působí, t. j. čím koncentrovanější barvivo, tím dříve se objeví effekt, užíval jsem nadále pouze 1% roztoku zvláště z té příčiny, že 2% roztok mnohdy žáby dobře nesnášely a brzy hynuly, $^1/_2\%$ roztok pak někdy pomalu působil.

Ohledáním roztoku mikroskopickým vidíme tekutinu diffusně zbarvenu, bez všelikých sraženin barviva. Pokusy své, pokud se týče pozorování leukocytů, zařídil jsem následujícím způsobem.

1. Vstřikoval jsem žabám (vesměs rana esculenta) 1% vodního roztoku m. methylenové (Kahlbaum-Berlin) jednu Pravazkou stříkačku do vaku lymfatického na zádech a pak v různé době ohledával leukocyty buď z vaku nebo z cev krevních, nebo jsem vyřízl dolní víčko oka a sledoval leukocyty uvnitř cev.

2. Vstřikoval jsem jednu stříkačku roztoku barvy do veny břišní a způsobem již uvedeným leukocyty ohledal.

3. Kousek houby, v níž byla kapenka roztoku modře, jsem vkládal pod kůži hřbetní žáby, po určité době zase vyňal, obsah na sklíčko vymačkal a prohlédl.

4. Smísil jsem lymfu s barvivem mimo tělo. V jemné kapiláře skleněné jsem zachytil malý sloupek lymfy tím, že jsem vak lymfatický nabodl, otvorem do něho vpravil kapiláru, různým směrem pohyboval a zvolna otáčel. Na to jsem sloupec lymfy, chovající konec kapiláry, lehce smočil v kapence barviva, kapiláru obrátil a klepáním lymfu s barvivem do její středu dostal. Pak jsem na obou koncích kapiláru voskem zalepil abych vyschnutí tekutiny zabránil.

Leukocyty v prvních hodinách po zavedení barviva buď nejevily vůbec žádného zbarvení, nebo byly slabě modravě zabarveny. Zbarvení to bylo něco hlubší než jaké jevilo plasma, leukocyty obklopující, které mělo také modravý nádech. Bylo tedy patrno, že leukocyty do sebe barvivo přijaly. Při tom se zcela dobře a patrně pohybovaly, takže barvivo na ně v tom ohledu asi nepůsobilo.

Byla-li vzata zkouška po 10. hodině, tu byly mnohdy již pozoruhodné změny. Diffusní zbarvení leukocytů nestalo se sice nápadně intensivnějším, ale v těle některých leukocytů byly malinké body barvy modravé. Body tyto vzájemný poměr měnily, sledujíce patrně pohyby leukocytu samého, takže se nalézaly po nějaké chvilce i ve výběžcích, vytvořil-li leukocyt nějaké. Ale také když byla krvenka zdánlivě ve klidu, pohybovala se zrnka barviva různými směry, někdy zmizela, aby se znova objevila. Při tom také trámčina uvnitř těla jevila změny; jednotlivé trámečky brzy ztloustly, že některé zrnko úplně zakryly, brzy opět se ztenčily tak, že se zrnko zase objevilo. Sledují tedy zrnéčka barviva jak zevní, tak vnitřní pohyb leukocytův.

Mnohem jasněji objeví se úkazy naznačené, když ohledáme leukocyty asi 15—24 hod. po zavedení barviva do těla. Zrnka barviva se v této době zvětšila nápadně, takže není třeba oko již pranic namáhati, abychom je postřehli při pohybech. V diffusním zbarvení některých leukocytů také se staly změny. Ono na některých místech vymizelo, takže jisté ostrůvky a některé výběžky jsou nezbarvené, některé leukocyty mimo ona zbarvená zrnka vůbec žádného zbarvení nejeví. Pozorovati tyto změny diffusního zbarvení je velmi obtížné, poněvadž ono ani v prvních hodinách po zavedení barviva do těla při užívání silných objektivů není příliš vyznačeno, takže se oko snadno klame. Některé leukocyty v tomto období jsou přeplněné zrnéčky barviva, bývá 10, 15 i více zrnek uvnitř jednoho leukocytu. Velikost zrnek v této době značně se různí, od největších, jako půl jádra leukocytu velikých, zrnek jsou přechody až k sotva viditelným. Některé leukocyty obsahují zrnko jen jediné, některé jsou zrnek úplně prosty. V příznivém případě, a ten se dosti často vyskytne, podaří se nám při delším pozorování leukocytů bez barvivových zrnek spatřiti, že se v nich utvoří před očima pozorovatele zrnko zbarvené. Naměříme-li mikroskop na takový leukocyt a po nějaké době ho znova ohledáme, můžeme se přesvědčiti, že zrnko to značně vzrostlo, a že se mimo ně ještě i jiná, nová zrnéčka objevila. Zrnka barviva pranic pohyby leukocytů neomezují jak se každé chvíle můžeme přesvědčiti, neboť často nelze ani počet zrnek stanoviti pro rychlou změnu vzájemné jich polohy, jíž podléhají, sledujíce zevní a vnitřní pohyby leukocytův.

V některých krvenkách vidíme také splynulé skupiny zrnek v jedinou hroudu, na jejíž periferii ještě dosti dobře můžeme rozeznati obrysy připojených zrnek. Některé leukocyty mezi tím odumřely, jak se můžeme přesvědčiti podle velkého množství vakuol a nehybnosti. Tu pak pozorujeme často skoro celé jejich tělo, až na malý, úzký lem na periferii, vyplněné velkou hroudou barviva. Některé z mrtvých krvenek jsou zbarveny diffusně a to temně, zvláště pak jádro, které pokud leukocyt je živý, zřídka zrnka barviva chová. Barví se tedy odumřelý leukocyt tak, jako to na mrtvých, histologických praeparátech shledáváme.

Toto stadium zbarvení leukocytů, které 20 hodin po zavedení barviva do těla se nám jeví, je vrcholem; dalšího přibývání barviva nevidíme.

Pozorujme dále praeparáty před vysycháním chráněné, tím, že kolem krycího sklíčka uděláme lem z balsámu, laku, nebo vaseliny. Tímto způsobem

zhotovíme si praeparát leukocytů z doby asi 20 hod. po vstříknutí barviva. Během 24 hodin zrnka barviva v leukocytech blednou. Na větších zrnech můžeme pozorovati, že blednutí to se neděje stejnoměrně, některé části zrnka zůstávají tmavými, kdežto jiné jsou již vybledlé. Konečně celé zrnko vybledne, ale můžeme pozorovati ještě po dlouhou dobu místo, kde zrnko leželo neboť má barvu jinou než ostatní protoplasma leukocytu, bělejší, asi jako by tam kousek vápna leželo. Zrnku při blednutí neubývá na velikosti. Potud lze sledovati odbarvování se zrníček v dosud žijících leukocytech, které se odbude asi za 24 hod. pozorování před naším okem. Po této době leukocyty obyčejně odumírají a některé z odumřelých zbarví se ponenáhlu tmavě a diffusně.

Odnímáme-li leukocyty žábě později po vstříknutí barviva, 2.—5. den, vidíme, že jsou některé zrnek úplně prosté, jiné jen málo zrníček barviva chovají a to malých, nebo kde jsou zrnka větší, jsou méně barvou nasycená, bledá. Při tom pozorujeme někdy, že jsou i těla slabě modře zbarvená, zvláště některé okrsky, a když takový praeparát po několik hodin pozorujeme, shledáme, že i toto slabé diffusní zbarvení mizí a zrnka se rovněž odbarvují.

Necháme-li praeparát zvolna nad plamenem zaschnouti, vidíme v něm rozpadlé leukocyty a sem tam hroudy modrého barviva. Ohledáme-li takovýto praeparát po delší době, shledáme ho nezměněný, modré hroudy se neodbarvily.

Při způsobu pozorování pod 4) uvedeném, kde jsem leukocyty přivedl ve styk s barvivem mimo tělo, uvnitř skleněné kapilláry, pozoroval jsem na sloupečku lymfy v této tři vrstvy v sebe přecházející. Kde barvivo s lymfou se stýkaly, byla tato nejintensivněji modře zbarvená, střední vrstva byla slabě modravá, třetí vrstva úplně nezbarvená. Ve vrstvě první byly po krátké době leukocyty mrtvé, tmavě diffusně zbarvené, zvláště jádra skoro černomodrá. Vrstva prostřední měla leukocyty živé, ale jen pomalu tvar měnící, těla těchto byla slabě zbarvená, avšak více než okolní tekutina. Vrstva pak zevní, úplně nezbarvené leukocyty obsahovala. Leukocyty této vrstvy po nějaké době po zhotovení mikroskopických praeparátů dosti živě se pohybovaly. V kapiláře vůbec leukocyty dosti rychle odumíraly, a jen v některých případech mohl jsem průběhem 24 hodin pozorovati změny, ač dosti málo patrné. Ve střední vrstvě objevila se v leukocytech živých zrnéčka barviva, ale velmi malá a slabě zbarvená, většina leukocytův odumřela a byla diffusně tmavě zbarvená. Leukocyty ve vrstvě lymfy zevní také něco barviva přijaly, ale zrnek v nich jsem nepozoroval, snad že doba, pokud žily, byla velmi krátká. *Dají se tedy i mimo tělo napodobiti ovšem v malé míře zjevy, uvnitř cev se odbývající.*

Kde leukocyty odumřely, ať již byly zbarvené či nezbarvené, i po delším pozorování jsem v nich nikdy neviděl tvořiti se zrníčka barviva.

Z uvedených pozorování je patrno, že barvivo, které se v roztoku do krve dostává, netvoří zrnéčka v serum, ale jako roztok do těla leukocytů vniká a tam pochody jich životními v podobě zrnek se vylučuje, neboť v mrtvých leukocytech, byla-li tam zrnka již před úmrtím jich, dále nevzrůstají, nebyla-li, ani se netvoří. Kde se zrnéčka v serum nalézají, a to jen zřídka a v malém množství vidíme, dostala se tam vypadnutím, zejména rozpadem červených

krvenek, jak jsem direktním pozorováním dostatečně příležitosti měl se přesvědčiti. Zrnka barviva uvnitř leukocytů živých nezůstanou ve stejném stavu, ale vzrůstají a po jisté době se odbarvují. Jakým způsobem se odbarvení děje, zda rozpuštěním a odplavením barviva, či redukcí jeho, nedá se bez dalších pokusů rozhodnouti. Okolnost, že zrnkům na velikosti při odbarvování neubývá, dále, že místa, kde zrnka byla, mají po odbarvení zvláštní bílou barvu, od ostatní barvy leukocytu se lišící, mluví snad pro redukci, takže by se tvořila látka leukomethylenová; tolik alespoň lze viděti na praeparátech, zvláště lemem balsamovým opatřených. Avšak také domněnka, že při odbarvení se zrnek běží snad také o rozpuštění a vyplavení barviva, nedá se odmítnouti.

Ohledáváme-li totiž leukocyty delší dobu po zavedení barviva do těla, ubývá v nich zrnek, tato jsou menší, slaběji zbarvená, při tom i tělo slabě modře je zbarvené, tu zamlouvá se nám domněnka, že se jedná o rozpouštění a že barvivo ze tkaně odplaviti a vymyti se dá, přesvědčil jsem se zejména u chrustavky a dolního víčka, kde jsem z vyvýšené nádobky nechal přitékati po proužku filtračního papíru fysiologický roztok soli kuchyňské k jednomu kraji krycího sklíčka praeparátu, na druhém konci sklíčka pak jiným proužkem tekutinu odváděl. Tímto způsobem pod mikroskopem viděl jsem, jak poznenáhlu se barvivo vymývá, zároveň pak odvádějící proužek papíru se do modra zbarvuje.

Jiná otázka jest, v jakých útvarech těla buněčného se zrnka ukládají; že by se usazovala jen v uzlíčcích trámečků protoplasmatických, nelze připustiti, poněvadž zrnka jeví někdy nápadnou velikost. Rovněž nezdá se býti pravděpodobným, že by barvivo pouze vsáknuto bylo, aniž by hmotu buněčnou stranou tlačilo, poněvadž si pak stěží vysvětlíme ostré a kulaté obrysy zrnek. Pravdě nejpodobnější je možnost, že barvivo, v zrnka se srážející, tkaň vytlačuje stranou, tvoříc si tím způsobem místo.

Že tvoření zrníček je pouze vitální činností buněk možné, nedá se dle uvedeného popírati. Vchází-li při tom barvivo v chemické sloučení s jistými látkami těla buničného, kteréžto látky buňce odnímá a tím v nerozpustné ony kuličky barviva se sráží, jak myslí Ehrlich* vzhledem ku čivovým vláknům, pak může dojista odnímati tkani jen takové látky, které pro biologické pochody buňky jsou méně platným činitelem, poněvadž často jsou leukocyty zrníčky barviva skoro naplněny a přece se čile pohybují. Také epithel žlaz dolního víčka žáby bývá, abych tak se vyslovil, přecpán zrnéčky barviva, nicméně žlazy na elektrické podráždění zcela správně se stahují. Podobně vířivý epithel z dutiny ústní žáby, ač zrnky je přeplněn, přece tím nijak není vyrušován ve víření svými ciliemi.

Na základě uvedeného možno pokusy Nečajevovy nyní blížeji posouditi. Nálezy jeho mohl jsem, jak uvedená dáta ukazují, potvrditi, jako objevování se zrnek v leukocytech, jich vzrůst a odbarvování. Než nemohu souhlasiti s Nečajevem dotyčně následující otázky. Nečajev myslí, že leukocyt, přijav do sebe zbar-

---

* Über schmerzstillende Wirkung des Methylenblau — Ehrlich u. Leppmann D. Med. Wochenschr. 1890 No. 23.

vený bacillus, barvivo mu odnímá a ve svém těle v podobě zrnek vylučuje, praví pak přímo,* že v leukocytech, které bacillů nechovaly, neviděl tvořiti se zrnek barvivých, kde pak zrnka byla a žádné bacilly, myslí, že tam původně byly zbarvené bacilly, ale že se tak odbarvily, že oku patrnými nejsou. Toto mínění jeho jest nedokázané, neboť je věcí nepopíratelnou, že zrnéčka barvivová v leukocytech se vytvořititi mohou i bez přítomnosti zbarvených bacillů, jen když se mohl leukocyt setkati s roztokem modře methylenové. O tom se mohl Nečajev úplně přesvědčiti, kdyby byl udělal kontrolní pokus, při kterém by byl vložil žábě pod kůži houbu pouze s barvivem bez bacillů.

Že by leukocyt nemohl barvivo tyčince bakterie odnímati a z tohoto barviva v těle svém vytvářeti zrnéček, to nelze sice a priori popírati, ale že by zrnha ta tvořil vždy a výhradně jen z barviva bacillu odňatého, není Nečajevem dokázáno, poněvadž v houbě zbylo po zbarvení bacillů dojista ještě barviva dosti, které leukocyt mohl přímo do sebe přijmouti a z něho zrnka vytvořiti Pro tento náhled mluví také vlastní uvedené pozorování Nečajevovo, při kterémž leukocyt obsahoval pouze jedinou tyčinku anthraxu a přece značné zrnko barviva vytvořil.

Vzrůst zrnka a současné odbarvování bacillů může tudíž spolu souviseti jen z části, nemusí to býti pochody úplně od sebe odvislé, jak myslí Nečajev, nýbrž jen parallelní. Nečajev chce, ač dosti vyhýbavě tuto jím uznanou schopnosť leukocytův, odnímati bakteriím barvivo a vylučovati je uvnitř svého těla ve způsobě zrnek, přivésti v bližší connex s rychlejším ničením bakterií uvnitř leukocytův, a uvádí nález svůj jako nový, důležitý příspěvek pro vysvětlení, jak organismus zbavuje se microbů do něho vniklých. Praví při tom, že ani domněnku pronésti nelze přistávající úplné neznalosti histochemických pochodů, zda přecházejí s barvivem z bakterií do těla leukocytů také některé současti, tělo bakterií skládající, nebo děje-li se tu pochod, jejž Mečnikov »intracellulárním zažíváním« nazval.

Než tento nový nález Nečajevův na základě svrchu mnou uvedených důvodů dlužno posud za nedokázanou domněnku pokládati. Nález Nečajevův dá se dvojím způsobem vysvětliti a za tou příčinou nelze výklad Nečajevův co jedině správný, tudíž co dokázaný považovati.

---

* l. c. str. 432.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 23.

TRICHOPTEROLOGICKÝ VÝZKUM ČECH

V R. 1891.

PODÁVÁ

FR. KLAPÁLEK.

PŘEDLOŽENO DNE 11. BŘEZNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Výzkum trichopterologický za rok 1891 týkal se hlavně Krkonoš, čímž vyplněna byla citelná mezera v naší znalosti fauny české. Exkursi tuto podnikl jsem v měsíci červenci a srpnu a prvých čtrnácte dnů věnoval jsem Podkrkonoší, ostatní dobu vlastnímu horstvu Krkonošskému. Že s takovým úspěchem práce tyto se potkaly, děkuji hlavně Jeho Osvícenosti panu Janu hraběti Harrachovi, který dovolil mi pobývati v jeho letohrádku v Harrachově, kde mohl jsem po výletech klidně na praeparaci materialu nasbíraného pracovati. Při práci samé dostalo se mi mnohé podpory od pánů lesních úředníků, zvláště pana vrchního lesmistra Lud. Šmída v Branné, který s nevšední ochotou práci mi usnadniti se snažil.

Mimo to sbíral jsem sám ještě v okolí Prahy, kde zřetel můj obrácen byl hlavně k Labi, v okolí Litomyšle a Jablonného. Pro přehled (nebudeť zajisté každému známo, kde všechna podrobně udaná naleziště hledati) vypisuji zde všechny důležitější, později uvedené lokality podle čelných míst seskupeny.

Praha: Štvanice, Krč, Kunratice, Sv. Prokop, Hodkovičky, Radotín, Podbaba, Neratovice, Čelakovice.

Litomyšl: Osík, Kösselberg, Opatov.

Jablonné: T. Orlice, Orlička, Jamné, Černovický pot., Suchý Vrch, Nekoř, pot. Bořitovský.

Branná: pot. v Dolu, Vejsplach, Valtěřice, Žlábka, Jizerka, Zákoutí.

Harrachov-Nový Svět: Kamenice, Mumlava, Langer Fl., Kleiner Fl., Weissbach, Loboch, Milmice.

Krkonoše: V. Březno, Labský pramen, Labský Slap, Labský Důl, Pudelbach, Martinsbach, Bärengraben, Weisswasser, Malý Stav.

Mimo to dostalo se mi také letos příspěvků od p. Dra. Ot. Nickerla, který sbíral v okolí Pražském, p. chem. stud. Jana Sekery (sbíral v Kamenici u Hlinska) a p. Dra. Václ. Vávry, assistenta univ. (sbíral na ryb. Kačležském u Jindř. Hradce).

Všem pánům, kteří jakkoliv při práci mé mi přispěli, vzdávám vřelý dík.

* * *

Největší část druhů v řádcích dalších uvedených ovšem již z Čech jest známa a v »Předběžném seznamu« nebo »Dodatcích za rok 1890« uvedena, uvádím je však znova, když pro ně nové stanovisko neb nová doba letu byla nalezena. Přece zjištěna opět byla řada nových 15 druhů s novými 2 rody a sice:

1. z čeledi *Limnophilidae*: Asynarchus coenosus, Curt, Halesus ruficollis, Pict., Halesus uncatus, Brauer, Drusus discolor, Ramb.,
2. z čeledi *Sericostomatidae*: Brachycentrus montanus, n. sp., Micrasema minimum, Mc. Lachl.,
3. z čeledi *Leptoceridae*: Setodes tineiformis, Curt,
4. z čeledi *Hydropsychidae*: Dolophilus copiosus, Mc. Lach., Wormaldia triangulifera, Mc. Lach. a Plectrocnemia geniculata, Mc. Lachl.,
5. z čeledi *Rhyacophilidae*: Rhyacophila torrentium, Pict., R. evoluta, Mc. Lachl., R. hageni, Mc. Lachl., R. glareosa, Mc. Lachl., Mystrophora intermedia n. g. et n. sp.

Z přehledu tohoto patrno, že, Setodes tineiformis vyjímaje, druhy nové náležejí vesměs vyšším horám a žijí v době letní. Důležito by bylo ještě prozkoumati tytéž krajiny v době jarní, čímž by prospělo se hlavně znalosti čeledi Sericostomatidae, zvláště rodu Micrasema, který bedlivého potřebuje studia.

Ze druhů svrchu uvedených pro oblasť palaearktickou zcela novy jsou: Brachycentrus montanus a nový rod Mystrophora s jediným druhem M. intermedia. Zvláště tento druh jest zajímavý svým postavením soustavným mezi rodem Glossosoma i Agapetus.

Pro druh Rhyacophila vulgaris, Pict., posud mi z Čech neznámý, pro který Kolenati uvádí naleziště v Šumavě, zjištěno bylo letos několik lokalit.

Přehled počtu rodů a druhů Trichopter v Čechách.

	Rod	Druh
I. Phryganeidae	3	8
II. Limnophilidae	13	48
III. Sericostomatidae	12	17
IV. Leptoceridae	12	36
V. Hydropsychidae	13	33
IV. Rhyacophilidae	6	19
VII. Hydroptilidae	5	8
Celkem	64	169

A. Inaequipalpia.

I. Phryganeidae.

Neuronia, Leach.

ruficrus, Scop. Praha, potůček v Hodkovičkách 6. V. Velmi hojná a patrně v době největšího letu.

Phryganea, L.

grandis L. Slepá ramena Labe u Neratovic 7. VI. a 25. VI.
striata, L. Slepá ramena Labe u Neratovic 7. VI., R. Kačležský VI. (Vra).
minor, Curt. Při Labi i jeho slepých ramenech u Neratovic 7. VI. Velmi hojná a patrně v době největšího letu. Při výletu dne 25. VI. nalezena byla již jen spoře.

Agrypnia, Curt.

pagetana, Curt. U rybníka v Osíku u Litomyšle 6. V., R. Kačležský V. (Vra).

II. Limnophilidae.

Limnophilus, Leach.

rhombicus, L. Tůňka při T. Orlici, Jablonné 9. VII.
subcentralis, Brauer. Rybník Kačležský u Jindř. Hradce. V. (Vra).
decipiens, Kolti. Krkonoše Martinsbach 21. VIII. ♀, která, pterostigma vyjímaje, postrádá všech skvrn.
stigma, Curt. R. Kačležský (Vra).
lunatus, Curt. Tůňka při T. Orlici v Jablonném 9. VII.
centralis, Curt. Labský důl 17. VIII., Labský Slap 20. VIII., Branná u Jilemnice 25. VIII. Exempláře tyto habitem svým podobají se velice L. vittatus, F. Základní barva předních křídel jest slámově žlutá; ve přední části křídel táhne se zahnědlý proužek, který ostře jest omezen sektorem a zadní z prvých jeho větví a zadní větví druhé apikalní vidlice; směrem ku kraji kostalnímu jest barva tato znenáhla smyta, jen pterostigma jest slabě nahnědlou skvrnou naznačeno. Zadní kraj křídel předních jest též nahnědlý podél postkosty a v konečných dvou třetinách páté apikalní vidlice. Rozezná se však hned od L. vittatus, který ostatně nebyl nalezen tak vysoko v horách, tím, že 5. apikalní políčko má spodinu širokou a dosahuje anastomose.
griseus, L. Labe u Neratovic 25. VI.; forma s křídly téměř jednobarvými, velmi zřetelným hnědým pterostigma a uzoukými bílými skvrnami na

anastomose a skvrnou rhombickou. Mumlava 2., 10. VIII., Milmice, Nový Svět 24. VIII., Labský Důl 17. VIII.

extricatus, Mc. L. Tuňka př. T. Orlici, Jablonné 9. VII.

fuscicornis, Ramb. Labe u Neratovic 24. V., u Čelakovic 8. VI.

Anabolia, Steph.

laevis, Zett. Tůňka při T. Orlici, Jablonné 2. IX. Velmi hojně.

Asynarchus, Mc. Lach.

coenosus, Curt., var. arcticus. V. Březno (♂ velmi hojní s rozpjetím 20—29 *mm*) 6. a 16. VIII. pramen Labský 20. VIII. přehojně (♂ rozpj. 28 *mm*), Weisswasser 19. VIII., potůčky tekoucí do Malého Stavu 18. VIII. (individua proti ostatním malá), Labský důl 17. VIII., Pančice 30. VIII., Obří Důl 28. VIII. Velikost variiruje vůbec mezi 20—28 *mm* v rozpjetí. Co barvy se týče, vyskytají se pohromadě individua světlá blížící se typickému coenosus i tmavá blízka var. paludosus, Kolti. Zvláště ♀ jsou z pravidla barvy tmavší. Zajímavý tvar jest, který mimo pravidelnou, bílou skvrnu na arkulu, thyridiu a při kraji v 6. apikalním poli má v 1.—6. apikalním políčku při anastomose po malé bílé skvrně. U samic mnohdy celá apikalní část křídla poseta jest velmi drobnými bílými tečkami.

Stenophylax, Kolti.

picicornis, Pict. Pot. Bořitovský v Nekoři 18. V., Údolí Černovické a pot. Orlička v Jablonném 17. V., Kösselberg u Litomyšle 16. V. Pramen při Kamenici 31. VII.

nigricornis, Pict. Potůček tekoucí z Malého Stavu 18. VIII. Kamenice 30. VII.

stellatus, Curt. Mumlava 2. VIII., Labský Důl 17. VIII., Weisswasser 19. VIII.

latipennis, Curt. Mumlava 2., 6. VIII.

Halesus, Steph.

ruficollis, Pict. var. melancholicus, Me. Lach. Weissbach (jeden ♂) 4. VIII., Langer Floss (jedna ♀) 10. VIII., Weisswasser (jedna ♀) 19. VIII. Labský Slap (jeden ♂ a dvě ♀) 20. VIII., Milmice (jedna ♀) 24. VIII.

Ze sedmi exemplárů, které jsem nasbíral jsou 2 ♂, ostatní ♀. Samci v částech analních úplně se shodují s H. ruficollis, ♀ úplně s obrazem a popisem H. moestus, Mc. Lachl. Od H. ruficollis liší se tmavší barvou křídel, diskoidalním políčkem, jež jest o $^1/_3$ delší než jeho násadec, v čemž shoduje se s H. moestus. Analní části jsou u ♀ i ♂ červenavě bledohnědé (reddish testaceous) zrovna jako u H. ruficollis i moestus.

Ze všeho toho zdá se vyplývati, že H. ruficollis, od něhož dosud známi jsou pouze ♂ a H. moestus, jenž posud znám jest pouze v pohlaví ♀, patří témuž druhu, jsouce různými jeho pohlavími. Neměl jsem sice příležitosti nalézti je v kopule, leč u Labského slapu sbíral jsem je s téhož okolíku Angeliky. Náleží pak var. melancholicus, která shoduje se s typickým rufi-

collis v částech analních a liší se pouze temnější barvou a snad též malými úchylkami v nervatuře. Rozpjetí 31—35 *mm*.

uncatus, Brauer. Mumlava 6. VIII. (♂ rozpj. 33 *mm*), V. Březno 16. VIII. (♂ rozpj. 33—36 *mm*, ♀ 27—32 *mm*), potok tekoucí z Malého Stavu 18. VIII. (♂ rozpj. 34 *mm*, ♀ 35 *mm*), Weisswasser 19. VIII. (♂ 38 *mm*, ♀ 32 *mm* rozpj.). Pramen Labe 20. VIII. (rozpj. ♀ 38—40 *mm*), Pudelbach 21. VIII.

auricollis, Pict. Weisswasser 19. VIII. Exempláře velmi tmavé s hojnými skvrnami bílými a veliké; rozpj. ♂ 27 *mm*. ♀ 30 *mm*.

Anomalopteryx, Stein.

chauviniana, Stein. Labský důl 21. VIII. ♀ velmi veliká s rozpj. 22 *mm*, se křídly téměř veskrze, část kostalní vyjímaje šedými.

Drusus, Steph.

discolor, Ramb. Kleiner Floss 11. a 12. VIII., Loboch Fl. 13. VIII., Labský Důl 17. VIII., Labský Slap 20. VIII., Potůčky tekoucí do Malého Stavu 18. VIII.

trifidus, Mc. Lachl. Pramen při Kamenici 31. VII. Pramen při Mumlavě 2. VIII., Labský důl 17. VIII.

Peltostomis, Kolti.

sudetica, Kolti Kamenice 30. a 31. VIII. (rozpj. ♂ 20—27 *mm*, ♀ 26—28 *mm*), Pramen při Kamenici 31. VII. (rozpj. ♂ 18·5—22 *mm* ♀ 19—22 *mm*). Mumlava 2. a 10. VIII. (rozpjetí ♂ 27 *mm*), Langer Floss 10. VIII. (rozpj. ♂ 27. *mm*), 11. VIII. (♂ 20 *mm*), Kleiner Floss 11. a 12. VIII., Loboch. Fl. 13. VIII., Milmice 14. a 24. VIII., Labský Důl 17. VIII., Potůčky tekoucí do Malého Stavu 18. VIII. (Vesměs exempláry s velmi úzkou první vidlicí apikalní). Weisswasser 19. VIII. (s velmi úzkou 1. vidl. apikalní), Pramen Labe 20. VIII. (♂ rozpj. 17·5 *mm*; opět s velmi úzkou 1. apik. vidl.). Bärengraben 21. VIII. (s velmi úzkou 1. vidl apikalní). T. Orlice v Jablonném 2. IX.; Labský Slap, 20. VIII. Mezi exempláry sbíranými v polohách nižších jest jen malý počet takových, jež by měly 1. vidlici apikalní úzkou, naopak u exemplářů z krajin výše položených bývá tato vidlice velmi úzka a zaostřena. Druh i rod tento jest zajímavý zvláštním vztahem svým ku Drusus annulatus, Steph. od kterého liší se tím, že ♂ nemá na předních holeních žádných ostruh. Jen jediný exemplář (Kamenice 31. VII.) má na levé přední noze zřetelnou, ač malou ostruhu.

Ecclisopteryx, Kolti.

guttulata, Pict. Kamenice 31. VII., Mumlava 2. VIII., Pot. Valtéřický 27. VII. Vesměs jen ♀.

madida, Mc. Lachl. Kamenice 31. VII., Weissbach 4. VIII., Kleiner Floss. 11. VIII., Loboch. Fl. 13. VIII., Milmice 14., 24. VIII. Variiruje velice jak ve velikosti tak i v barvě. Exempláry sbírané u Kamenice jsou největší,

rozpj. ♂ 24 *mm*, ♀ 29 *mm*. Nejmenší ♂ od Kleiner Fl. 18 *mm*., nejmenší ♀ 24 *mm*. Některé exempláry mají barvu šedohnědou beze všech skvrn, vyjma bledou tečku na thyridiu, jiné jsou celé žlutohnědé, majíce velikou bílou skvrnu na thyridiu a přehojné žlutavé tečky v celé apikalní části křídel.

Apatania, Kolti.

fimbriata, Pict. Údolí Černovické u Jablonného 17. V., Kamenice 30. a 31. VII. (rozpj. ♂ 13—18 *mm*, ♀ 11 *mm*), Pramen při Kamenici (celkem menší než při Kamenici chytané, rozpj. ♂ obyč. 13—14 *mm*, ♀ 12—13 *mm*). Mumlava 2. VIII. (Rozpj. ♂ 18 *mm*, ♀ 15 *mm*), Pramen Labe 7. VIII., Labský Důl 7. a 17. VIII., Weissbach 4. VIII., Langer Floss. 10. VIII. (rozpj. ♂ 19 *mm*), Kleiner Fl. 11. a 12. VIII. (rozpj. ♂ 12 *mm*, ♀ 11·5 *mm*), Loboch. Fl. 13. VIII., Potůčky tekoucí do Malého Stavu 18. VIII., Weisswasser 19. VIII. (1 ♀ s rozpj. 15 *mm*, četní ♂ až 18 *mm* rozpj.); aspoň s polovice náležejí exempl. zde sbírané formě, jejíž 5. vidlice apikalní jest značný kus splynulá s větví předcházející. Bärengraben 21. VIII., Martinsbach 21. VIII. (1 ♀ rozpj. 16 *mm*), Pudelbach 21. VIII. Jak z výčtu stanovisk patrno, druh nejobecnější, v létě tak hojný, že se jen hemží na pobřežních rostlinách. Zdá se, že velikost jeho jest velmi odvislá od mohutnosti pramene či potoku, v němž larvy žily.

III. Sericostomatidae.

Sericostoma, Latr.

pedemontanum, Mc. Lachl. Langer Fl. 18. VIII., Mumlava 2. a 5. VIII.

Oecismus, Mc. Lach.

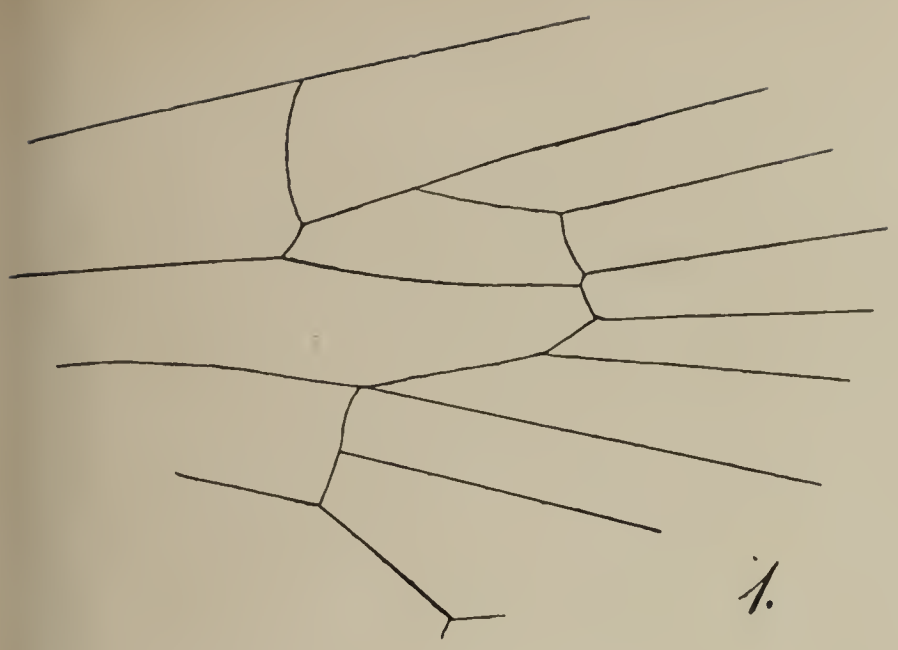
monedula, Hag. Jamné 13. VII., Nekoř. pot. Bořitovský 13. VII., T. Orlice v Jablonném 17. VII., Vejsplach u Branné 23. VII.

Notidobia, Steph.

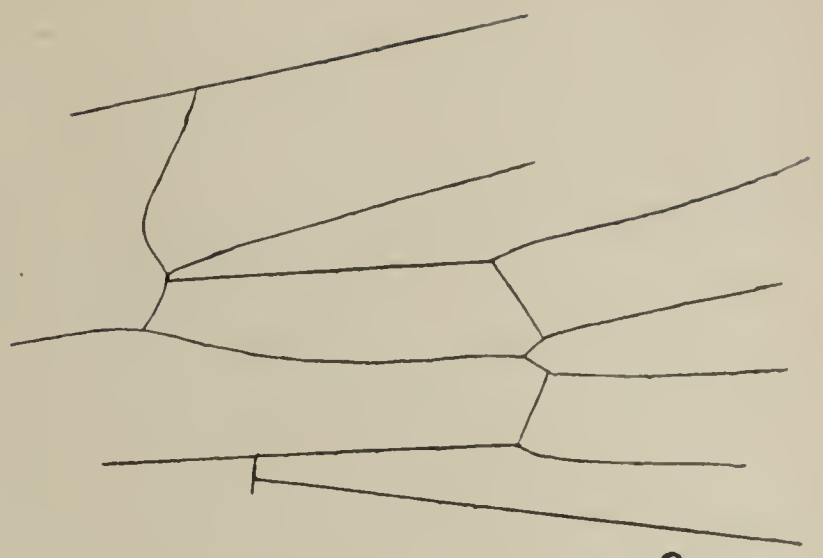
ciliaris L. Vystupuje dle nynějších zkušeností mnohem výše a variiruje velice ve své velikosti. Opatov 16. V. (♂ délka těla 7 *mm*, rozpjetí 21 *mm*), ♀ d. t. 11, rozpj. 24 *mm*); Kunratice 23. V. (Nick.), 30. V., T. Orlice v Jablonném 1. VI. (♂ d. t. 6—7 *mm* rozpj. 21 *mm*, ♀ d. t. 5—7 *mm*., rozpj. 20—24 *mm*). Pot. Bořitovský, Nekoř 18. V.

Připojený obraz 1. ukazuje řadu obměn v nervatuře křídel, která obsahuje takové úchylky, které při známé stálosti, kterou u mnohých jiných rodů nacházíme, by spojeny jsouce s nějakými úchylkami v přívěscích analních, mohly za dobré znaky druhové sloužiti.

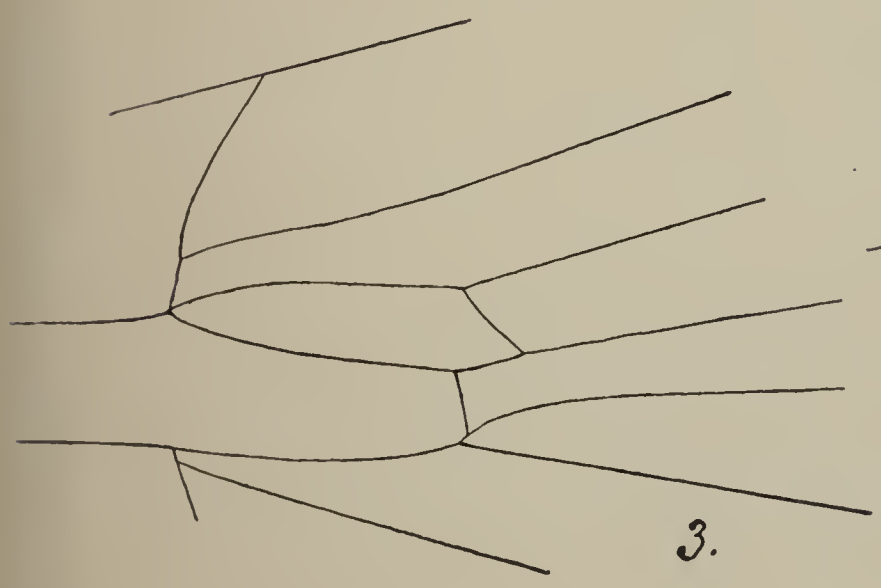
Zde ovšem nejsou to ani variety, nýbrž pouhé úchylky individuelní, posud neustálené. Nárys 2. ukazuje asi typický tvar žilnatiny: 1. vidlice apikalní sahá až ku příčné žilce mezi políčkem diskoidalným a radiem,



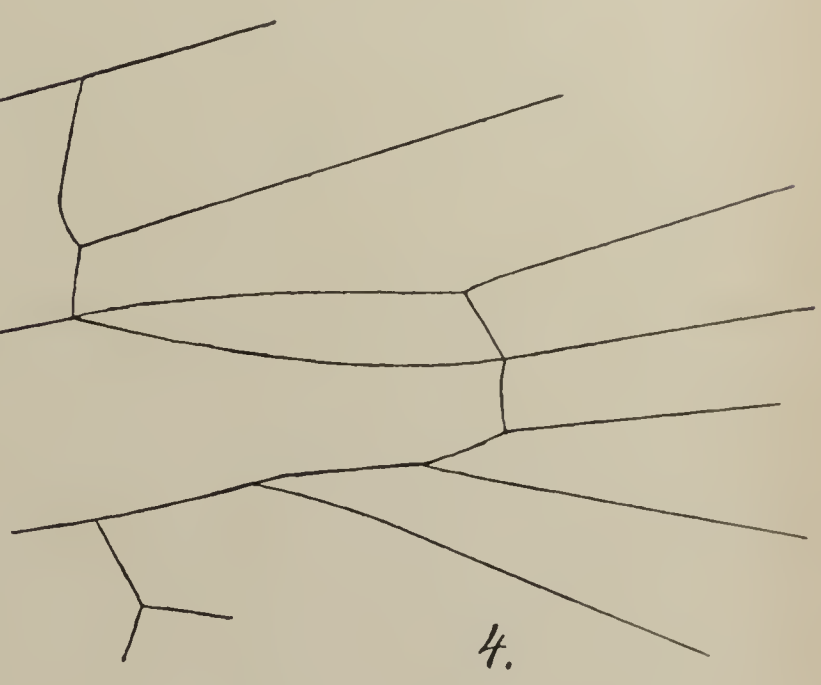
1.



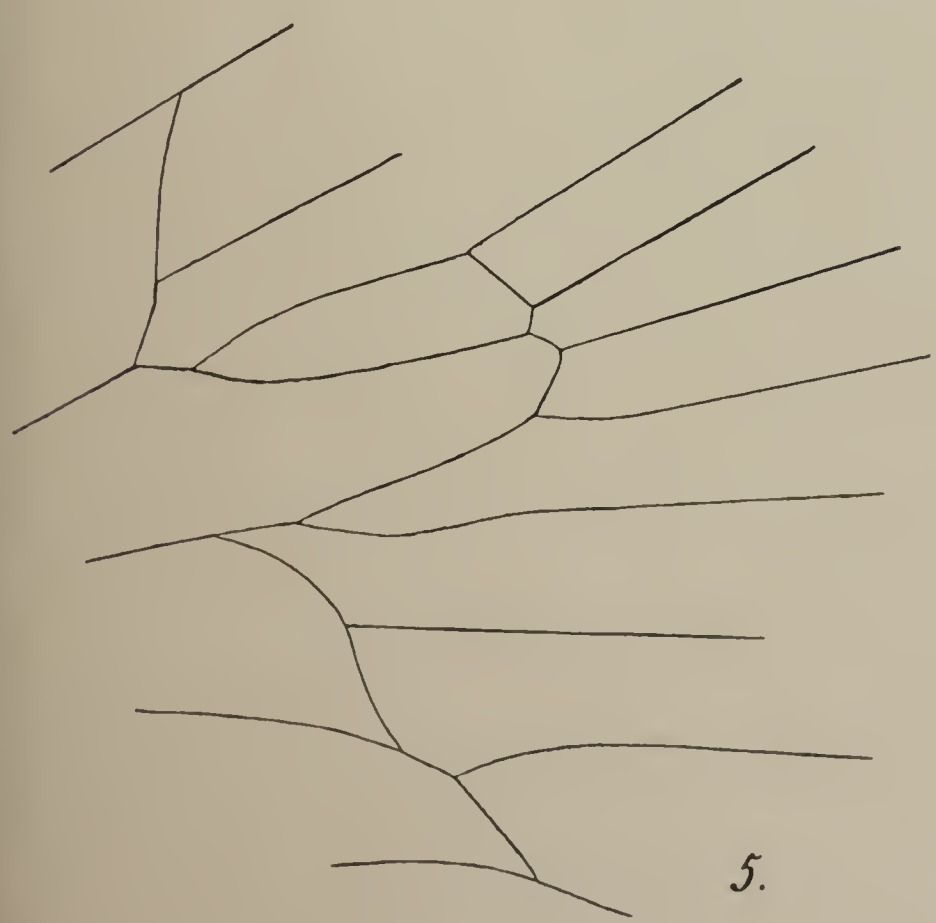
2.



3.



4.



5.

6.

Obr. 1. Různé způsoby nervatury předního křídla Notidobia ciliaris L.

3. vidlice apikalná sahá až ku příčné žilce mezi oběma větvema hořejšího kubitu. Nárys 1. ukazuje případ, kde 1. vidlice apikalná nedosahuje až ku příčné žilce mezi radiem a políčkem diskoidalným, nýbrž počíná as uprostřed hořejší hranice políčka jmenovaného. Na nárysu 3. sahá sice 1. vidlice apikalná, až ku žilce uvedené, ale jest na začátku svém velmi široká, tak že dolejší její větev sama tvoří hořejší mez políčka diskoidalního. Na nárysu 4. jest 1. vidlice vyvinuta podobně jako ve případě předešlém, za to však vidlice 3. nedosahuje žilky příčné mezi oběma větvemi kubitu hořejšího. V nárysu 5. prvá vidlice jest tak na počátku svém rozšířena, že počíná dříve než samo políčko diskoidalní a příčná žilka jdoucí k radiu spojuje se druhým koncem s vidlicí; 3. vidlice ap. nedosahuje příčné žilky mezi oběma větvemi hořejšího kubitu. Ve případě 6. jest 1. vidlice apikalná jako ve případě 5., vidlice 3. dosahuje sice zmíněné žilky, avšak žilka sama jeví veliké zohýbání.

Veškeré tyto odchylky jeví velikou neustálenost v nervatuře a zdají se nasvědčovati tomu, že rody Sericostoma, kde podobná variabilita byla pozorována, Notidobia a příbuzné jsou data mladšího. Svědectvím proto také jest obtíž, s jakou lze jednotlivé druhy rodu Sericostoma a průpravná stadia všech rodů této skupiny navzájem rozlišiti. Ostatně jest to novým dokladem variability ústrojů, jež jindy poskytují znaky v soustavě důležité.

Goëra, (Hoffmg.) Leach.

pilosa F. T. Orlice v Jablonném 9. VII., Kunratice 23. V. (Nick.)

Silo, Curt.

pallipes, F. Pot. Vejsplach mezi Brannou a Vrchlabím 25. VII.
piceus, Brauer. Jablonné T. Orlice 9. VII., Jamné 13. VII., Zákoutí u Jilemnice při Jizerce 27. VII.

Brachycentrus, Curt.

subnubilus, Curt. Neratovice u Prahy 3. V. V rozpjetí pouze 14 *mm* u ♂.
montanus n. sp. T. Orlice 17. V.
Character essentialis: Alae superioris cella discoidalis margine superiori recto; maris appendices inferiores angulo hebeti (nec recto) modeste sinuati.

Hlava černá se stříbrošedými chloupky, které s černými jsou promíchány. Makadla černohnědá, rovněž jako hlava stříbrošedými a černými chloupky porostlá. Kyčle i stehna černohnědá, tibie žlutohnědé. Přední křídla s apikalní částí parabolickou, protáhlejší než u Br. subnubilus, s blánou žlutošedou, pokrytou řídce hnědými chloupky, na thyridiu, arkulu a anastomosi pod políčkem diskoidalním bílé skvrny. Pterostigma temnější. Nervatura hnědá, v obou křídlech zřetelná, stejná jako u Br. subnubilus vyjímaje políčko diskoidalní, které jest poměrně užší a má hořejší větvičku je omezující rovnou a nezlomenou.

Appendices anales ♂ jsou podobný týmž přívěškům u Br. subnubilus. Dolejší přívěsky jsou sice rozšířeny, avšak pouze mělce vykrojeny, tak že patrně ponenáhlu jsou zúženy v konec, který u exemplárů, jež mám před sebou, pod posledním kroužkem jest ukryt.

Za to znatelně vyvinuty jsou přívěšky prostřední, odpovídající malým částem, jež nebylo lze u B. subnubilus blíže sledovati; jsou to přívěsky nahoru obrácené, válcovité, dole poněkud silnější, jež vynikají zpod konce přívěsků dolejších. ♀ shoduje se s Br. subnubilus.

Rozpjetí ♂ 18 *mm*, ♀ 21·5 *mm*.

Obr. 2. Brachycentrus montanus n. sp. 1. nervatura předního křídla, 2. konec těla ♂ zdola.

Liší se od Br. subnubilus podstatně podobou políčka diskoidalního, které na žádném z 8 kusů, které mám při popise před sebou neukazuje nahoře zlomené kontury, jako u druhu jmenovaného, což jest velmi dobrý znak pro prvý pohled. Tím podobá se druh náš Br. adoxus, Mc. Lachl., od něhož liší se temnějšími barvami, a snad nalezeny budou též rozdíly v přívěscích analních, až ústroje tyto u Br. adoxus známy budou. Také liší se od Br. subnubilus tvarem přívěsků spodních, které u Br. subnubilus dole jsou silně rozšířeny a pak pod pravým úhlem vykrojeny, tak že obrys jejich tvoří jeden pravý úhel vypuklý a jeden dutý. Také barva přívěsků těch jest různá; u Br. subnubilus jsou žlutohnědé, u montanus černohnědé.

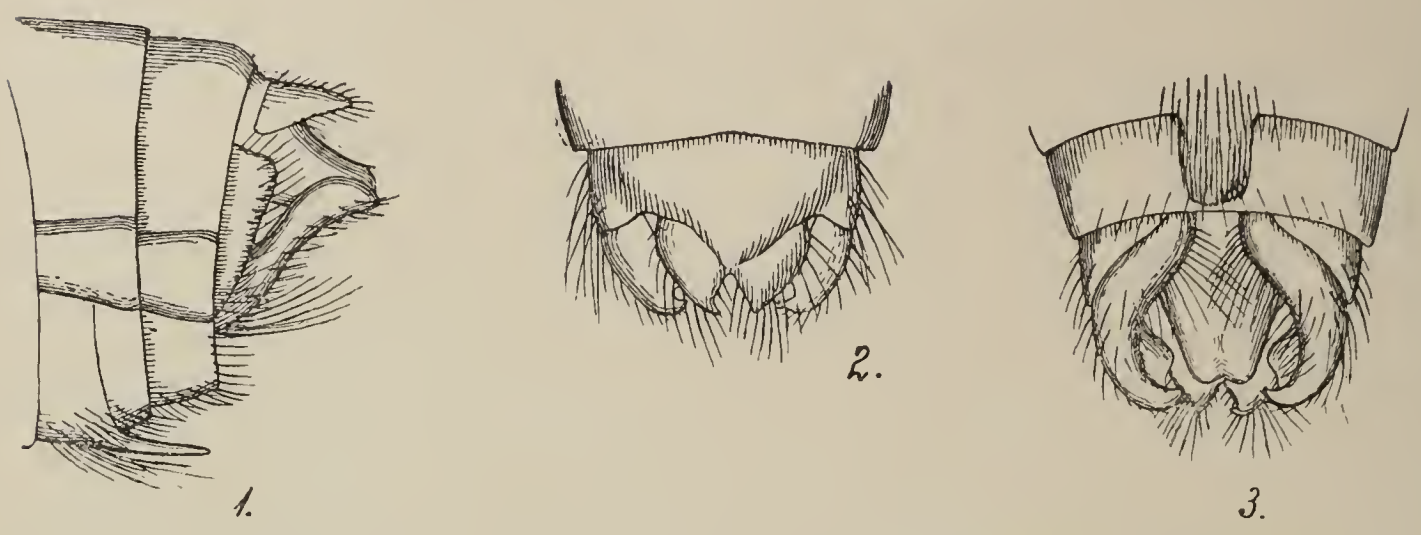
Počítám sem též 1 ♀ ze Sušice uvedenou v »Seznamu předběžném« jako Br. subnubilus.

Oligoplectrum, Mc. Lach.

maculatum, Fourc. Druh tento v roce letošním nebyl sice sbírán, podrobil jsem však nové revisi líhový material ze Sušice r. 1885 sbíraný a shledal, že ani popis, ani výkresy přívěsků analních uváděné v knihách příručných nejsou správny, a dovoluji si zde opravu jich připojiti.

Segment 7. vybíhá na straně břišní ve plošku, jejíž distalní kraj má obrys zaokrouhlený, avšak ozubený, tak že jest patrno, že celá destička vznikla splynutím množství ostenců, čemuž nasvědčuje také nerovný, po délce rýhovaný povrch.

Přívěšky hořejší jsou podobny jako u Brachycentrus, dva se zevnějším obrysem zaokrouhleným, spodinami svými srostlé, nechávajíce mezi sebou trojúhlý výkrojek. Přívěsky spodní basemi svými sblížené, nahoru obrá-

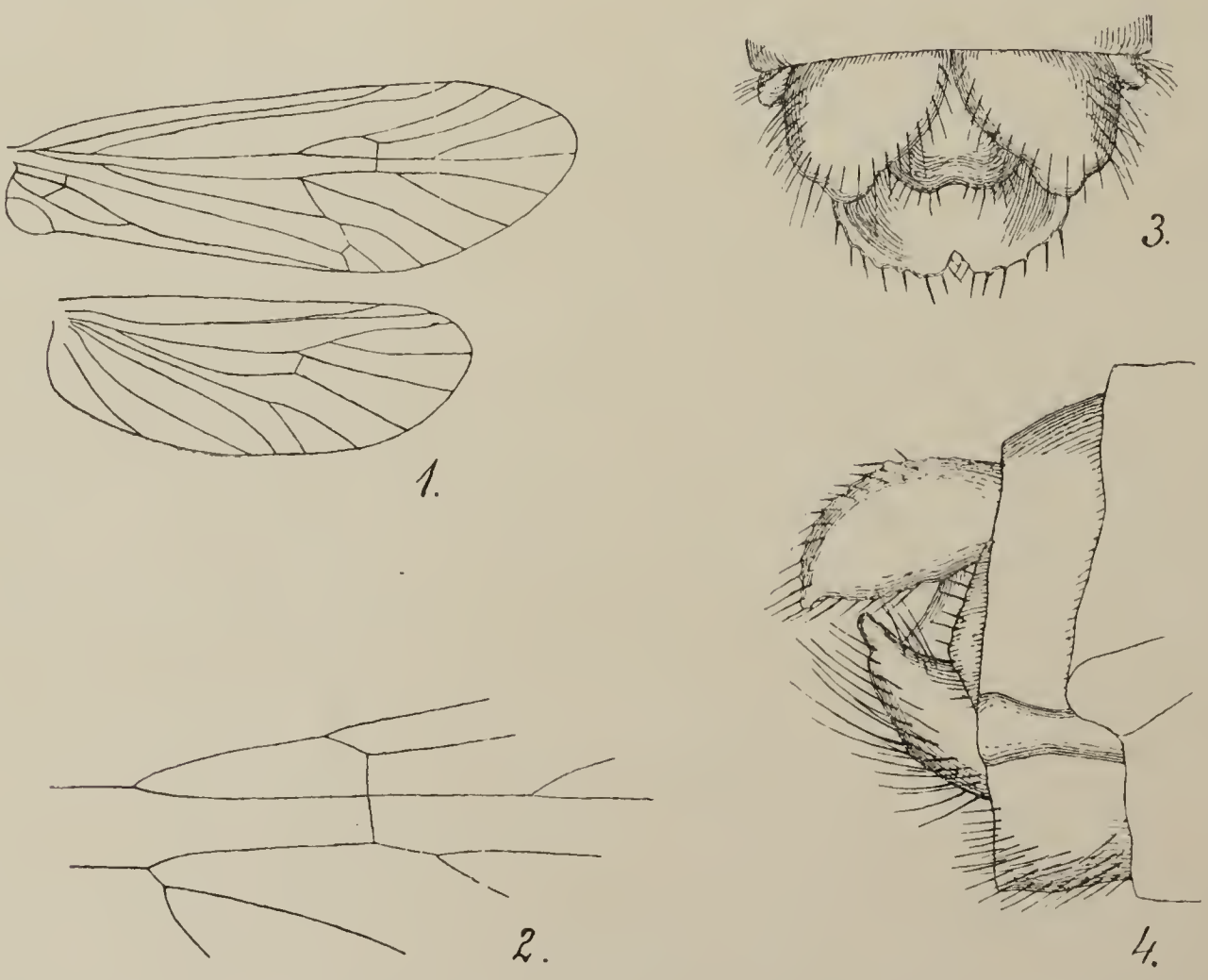


Obr. 3. Oligoplectrum maculatum, Fourc. Konec těla ♂ 1. se strany, 2. shora, 3. zdola.

cené, poněkud rozestálé a konci svými opět sblížené; hořejší kraj jejich jest dovnitř trojhranně rozšířen. Při pohledu zdola vyniká mezi těmito přívěsky penis široký a na konci mělce vykrojený.

Micrasema, Mc. Lachl.

longulum, Mc. Lachl. Mumlava 2. VIII. (1 ♀), 10. VIII. (1 ♂); Labský Důl 7. VIII. (2 ♂).



Obr. 4. Micrasema longulum, Mc. Lachl. 1. Nervatura křídel. 2. Cellula discoidalis křídel předních. 3. Konec těla ♂ zdola. 4. Týž se strany.

Poněvadž popis přívěsků analních, ani jich obraz posud podány nebyly, připojuji popis, který jsem, jakož i obrazy dle líhového materialu ze Sušice z r. 1885 sestavil.

Kroužek 9. nepatrně vyvinut. Hořejší appendices silně vyvinuty, dohromady srostlé, při pohledu zdola nebo shora obrysu zaokrouhleného, na konci uprostřed mělce vykrojené, a po celém kraji krátkými, tuhými štětinami posázené; při pohledu se strany na exemplářích líhových jest hořejší kraj obloukovitý, dolejší skoro rovný, tak že oba tvoří na konci distalním skoro pravý úhel. Přívěsky spodní silné a na povrchu, hlavně po kraji tuhými štětinami posázené, přitrojhranné, ze široké spodiny rozestálé, na konci s tenčím odstavcem. Mezi oběma vyniká, hledíme-li zdola, široký mírně vykrojený penis.

var? Z Jablonného od pot. Orličky poslal mi p. učitel Fr. Balcar něco Trichopter, mezi nimi několik kusů Micrasema. Material ten poněvadž byl porouchán a ku praeparaci se nehodil uschoval jsem v líhu. Velikost i nervatura křídel táž jako u M. longulum, ale ploška povstavší splynutím hořejších přívěsků analních jest mnohem více vykrojena a zřetelně jeví, že vznikla ze dvou trojúhlých přívěsků, které při pohledu se strany ukazují konec zaokrouhlený a nevybíhají v úhel. Možno však, že příčinou toho jest seschnutí dříve než material do alkoholu dán byl. Ostatně jest nevyhnutelno čerstvý material zkoumati.

minimum, Mc. Lachl. T. Orlice v Jablonném 17. V. (velmi hojně).

Crunoecia, Mc. Lachl.

irrorata, Curt. Langer Floss. 10. a 11. VIII. Velmi hojně.

Lepidostoma, Ramb.

hirtum, F. Jamné 13. VII., Vejsplach 25. VII.

B. Aequipalpia.

IV. Leptoceridae.

Beraeodes, Eaton.

minuta, L. Potok v Opatově u Litomyšle 16. V. velmi hojně; Kunratice 23. V. (Nick.)

Molanna, Curt.

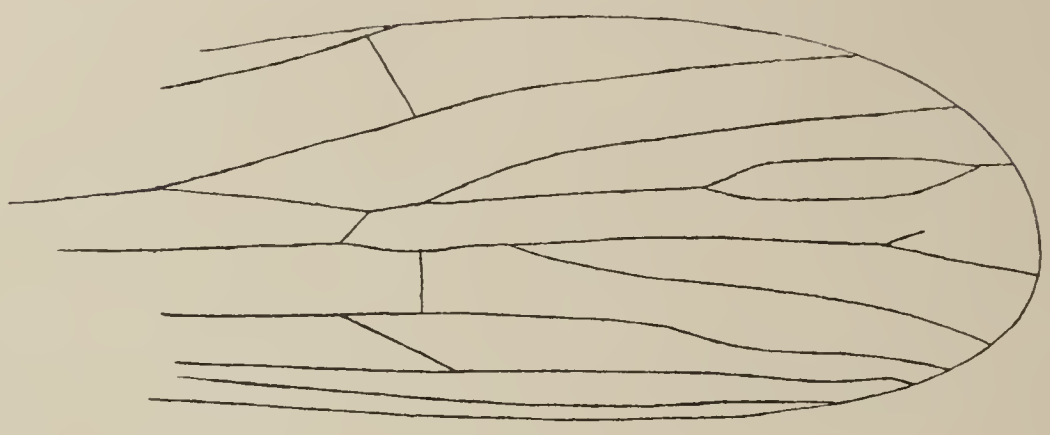
angustata, Curt. R. Kačležský V.—VI. (Vra) 1 ♀ exp. 28 *mm.* Má třetí apikalní vidlici před krajem opět uzavřenou. (Obr. 5.)

Molannodes, Mc. Lachl.

zelleri, Mc. Lachl. Černovický pot. Jablonné 9. VII. velmi spoře.

Odontocerum, Leach.

albicorne, Scop. Vejsplach 22., 23., 25. VII., Pot. Valtěřický 27. VII. Zákoutí při Jizerce 27. VII., Mumlava 2., 10. VIII



Obr. 5. Molanna angustata, Curt. Odchylná nervatura předního křídla.

Leptocerus, Leach.

senilis, Burm. Ryb. v Kamenici 3. VIII. (J. Sek.)
aterrimus, Stfph. Neratovice 7., 25. VI., Čelakovice 18. VI.
commutatus, Mc. Lach. T. Orlice 13. VII.
bilineatus, L. Jablonné 8. VII., Branná 18. VII., Vejsplach 23. VII. Valtěřice 27. VII.

Mystacides, Latr.

nigra, L. Kunratice 23. V. (Nick.). 30. V., pot. Valtěřický 27. VII., Branná pot. v Dolu 18. VII.
azurea, L. Jablonné 9. VII.

Triaenodes, Mc. Lach.

conspersa, Ramb. Čelakovice 18., 21. VII. hojně.

Adicella, Mc. Lach.

reducta Mc. Lach. Jablonné 9. VII., Jamné 13. VII., Vejsplach 23., 25. VII. Velmi hojně.

Oecetis, Mc. Lach.

ochracea, Curt. R. Kačležský (Vra).
furva, Ramb. R. Kačležský (Vra).
testacea, Curt. Jablonné 9. VII.

Setodes, Ramb.

tinciformis, Curt. Neratovice 25. VI. Velmi hojně.

V. Hydropsychidae.

Hydropsyche, Pict.

pellucidula, Curt. T. Orlice, Jablonné 17. V. Jarov 22. V. (Nick.)
fulvipes, Curt., Vejsplach 22., 23., 25. VII., Zákoutí 27. VII.
saxonica, Mc. Lach. Radotín 10. V., Kunratice 23. V. (Nick.), pot. Bořitovský v Nekoři 18. V.
angustipennis, Curt. Kunratice 23. V. (Nick.), 30. V.
guttata, Pict. Jarov 22. V. (Nick.), Podbaba 13. V., Kačlehy (Vra).

Philopotamus, Leach.

ludificatus, Mc. Lach. Suchý Vrch u Jablonného 11. VII. Žlábka u Branné 27. VII., Zákoutí 27. VII., Mumlava 2. VI. Labský Důl 7., 17. VIII. Kleiner Fl. 12. VIII. Loboch 13. VIII. Pudelbach 21. VIII. Martinsbach 21. VIII., Bärengraben 21. VIII., Potůčky tekoucí do Malého Stavu 18. VIII. (má 4. apikalní vidlici bez násadce), Weisswasser 19. VIII., Labský slap 20. VIII.

Variiruje velmi v délce násadců apikalních vidlic.

montanus, Donov. Orličká 17. V., Vejsplach 22., 23., 25. VII., Zákoutí 27. VII., Štěpanice 25. VII., Orličká 3. IX. (u jednoho exempl. nedosahuje 4. vidlice k anastomose a má krátkou násadu.

variegatus, Scop. Kamenice 31. VII., Mumlava 2. VIII. (levá křídla normalní, na pravém předním tvoří zpodní větev 3. apikalní vidlice nadpočetnou vidlici a na zadním křídle spodní větev 2. vidlice tvoří docela malou, nadpočetnou vidlici a přední větev 3. vidlice tvoří vidlici, jež však není dokonalá) Weissbach 4. VIII., Labský Důl 17., 21. VIII. (Na levé straně ve předním křídle přední větev 3. vidlice tvoří nadpočetnou vidlici a zadní větev 5. vidlice tvoří nepatrnou vidlici. Na zadních křídlech přední větev 3. vidlice tvoří malou nadpočetnou vidlici. Na pravé straně ve předním křídle přední větev 3. vidlice tvoří nadpočetnou vidlici, jež jest delší než její násada a zadní větev 5. vidlice tvoří dosti velkou vidlici nadpočetnou a na zadních křídlech přední větev 3. vidlice tvoří vidlici, jež jest delší než její násada.

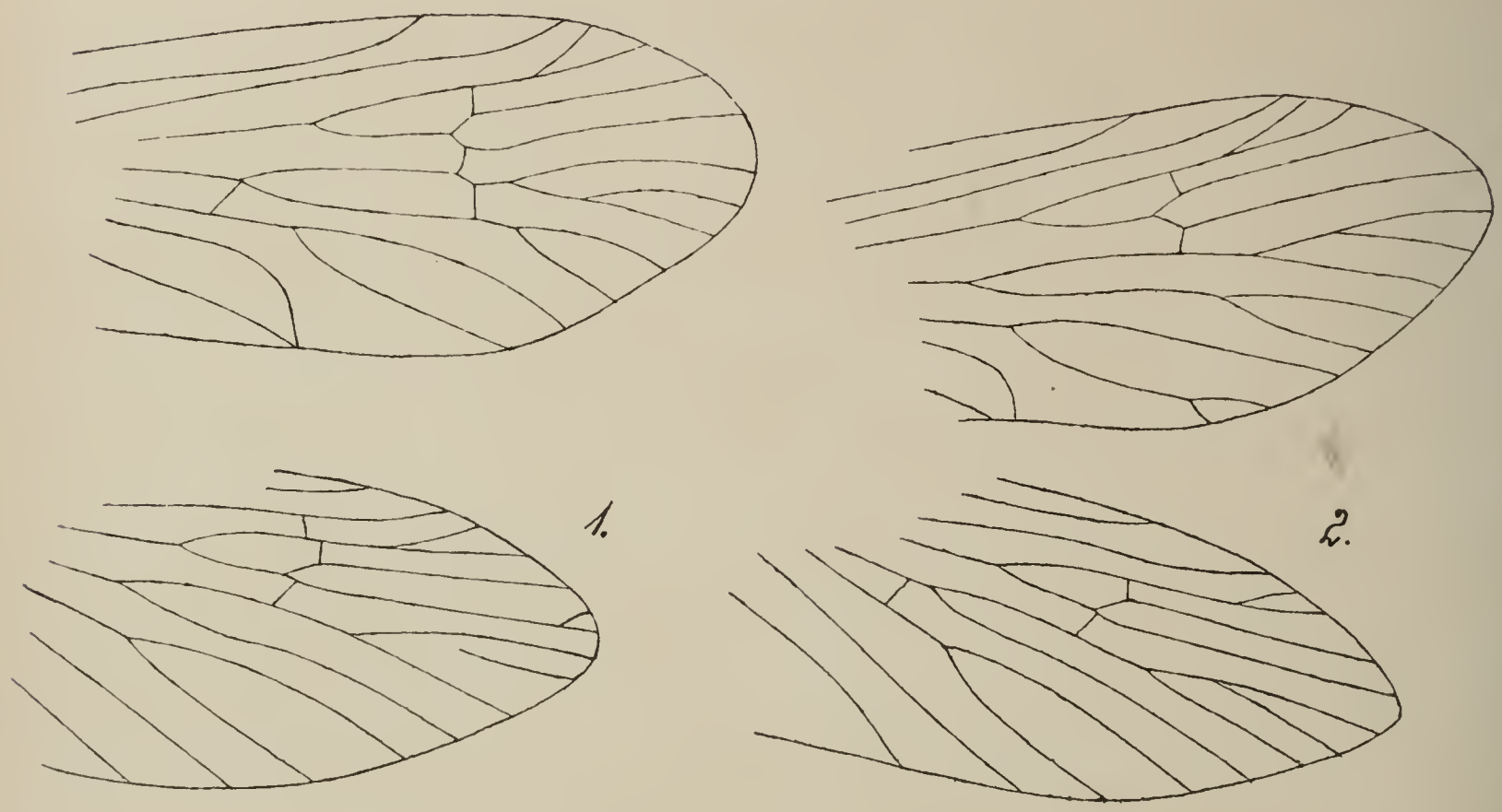
Dolophilus, Mc. Lachl.

copiosus, Mc. Lach. Weisswasser 19. VII. Z vidlic apikalných 4. velice variiruje; u některých takřka úplně zmizela, u jiných dosti dobře jest vyvinuta. Lze sledovati, jak děje se zakrnění políčka toho; nejprve sblíží se k sobě konce obou větví, které je tvoří, pak úplně splynou, tak že vidlice se uzavře, a posléze toto očko úplně zmizí.

pullus, Mc. Lachl. Mumlava 2. VIII., Labský Důl 17. VIII., Štěpanice 25. VII. U všech exemplářů, kterých jest veliký počet, jest 4. vidlice apikalní ve předních křídlech značně vyvinuta.

Wormaldia, Mc. Lachl.

triangulifera, Mc. Lach. Počítám sem exempláře, které mají nervaturu křídel, tvar a vrchol jich jako subnigra, jichž hřbetní kraj 8. kroužku abdominalního jest široce, mělce vykrojen, jichž spodní appendices anales nejsou na druhém článku ke konci zúženy, nýbrž tupě přikrojeny, jichž křídla při-



Obr. 6. Philopotamus variegatus Scop.: Odchylky v nervatuře.

kryta jsou sporými chloupky, tmavšími než u W. occipitalis, ale světlejšími než u subnigra. Celkem tedy stojí tyto exempláře uprostřed mezi oběma čelnými druhy rodu Wormaldia a nemohou náležeti druhu W. mediana pro světlou barvu křídel a proto že kraj osmého kroužku hřbetního jest velmi mělce vykrojen; také spodními přívěsky analními se liší, ježto tyto podobají se týmž ústrojům W. occipitalis.

Vůbec jest čím dále tím patrnější, že rod Wormaldia nevyhnutelně potřebuje revise a to na základě exemplárů líhových, poněvadž při suchých exemplárech jest vždy nebezpečí, že výkrojek osmého kroužku hřbetního, který pokládá se posud za velmi důležitý v soustavě tohoto rodu, scvrknutím tvar svůj změní.

Štěpanice 25. VII. Langer Fl. 10. a 11. VIII.

Neureclipsis, Mc. Lachl.

bimaculata, L. Neratovice 7. VI., R. v Kamenici 3. VIII. (J. Sek.)

Plectrocnemia, Steph.

conspersa, Curt. Kamenice 30., 31. VII., Mumlava 2. VIII., Loboch 13. VIII., Milmice 24. VIII., Weisswasser 19. VIII., Vejsplach 25. VII. Vesměs jen spoře a jednotlivě.

geniculata, Mc. Lachl. Kamenice 31. VII., Mumlava 2. VIII. Velmi spoře.

Polycentropus, Curt.

flavomaculatus, Pict. Jablonné 9. VII., Vejsplach 25. VII., P. Valtěřický 27. VII., Mumlava 2., 10., 23., VIII.

multiguttatus, Curt. Neratovice 7., 25. VI.

Holocentropus, Mc. Lachl.

dubius, Ramb. Neratovice 7. VI. (Velmi hojný), 25. VI.

picicornis, Steph. Rybník Kačležský (Vra)., Kunratice 30. V. (jeden exempl. barvy vůbec bledší, s tykadly žlutavými bledě-hnědě kroužkovanými. Rozpjetí 15 *mm*.

Cyrnus, Steph.

trimaculatus, Curt. Pot. Valtěřický 27. VII., Štvanice 21. V., Čelakovice 18., 21. VI.

flavidus, Mc. Lachl., R. Kačležský (Vra).

crenaticornis, Kolti. Neratovice 25. VI. (Rozpjetí 15·5 *mm*)

Tinodes, Leach.

pallidula, Mc. Lach. P. Valtěřický 27. VII. (Velmi hojný).

rostocki, Mc. Lachl. Vejsplach 22., 23., 25. VII. (Hojný).

Lype, Mc. Lach.

reducta, Hagen. T. Orlice, Jablonné 13. VII., Vejsplach 22., 23. VII.

Psychomyia, Latr.

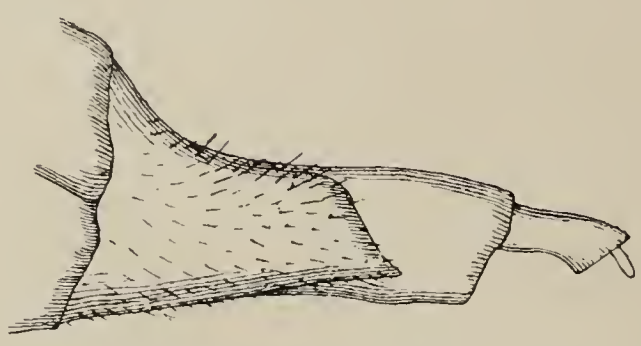
pusilla, F. Štvanice 21. V. 4. VI., Čelakovice 18. VI., Jablonné 18. VII.

VI. Rhyacophilidae.

Rhyacophila, Pict.

torrentium, Pict. Mumlava 2. VIII. (♂ rozpj. 31 *mm*) Labský Důl 17. VIII. (♀ rozpj. 30—36 *mm*), Jizerka 27. VII. (♂ rozpj. 32 *mm*).

evoluta, Mc. Lachl. Kamenice 30. VII., Labský Důl 7., 17. VIII., Langer Fl. 11. VIII., Martinsbach 21. VIII. Rozpj. ♀ 29—35 *mm*. ♀ posud popsána nebyla a proto připojuji vyobrazení konce těla jejího. Zub na 7. kroužku



Obr. 7. Rhyacophila evoluta, Mc. Lachl. Konec těla ♀ se strany.

břišním skoro úplně schází. Chlopně 8. segmentu dlouhé, ke konci zúžené, nahoře kratší, dole delší, tak že zadní kraj jest šikmý. Dobrý znak pro prvý pohled, jímž rozlišiti ji můžeme od R. torrentium, jsou žlutavé třásně křídel.

nubila, Zett. Pot. v Osíku 15. V., Jamné 13. VII., T. Orlice 13. VII., Jizerka 27. VII., Mumlava 2., 5., 9., 10., 23. VIII., Milnice 24 VIII., Labský Důl 17. VIII., Orlička 3. IX. Variiruje velmi značně v barvě; ♂ jsou z pravidla barev světlejších, poněvadž jsou na křídlech skvrny, sestávající ze zlatých chloupků větší a téměř splývají, kdežto u ♀ zůstávají osobitými a malými.

septentrionis, Mc. Lachl. Žlábka 27. VII. (♂ 23 *mm*), Langer Fl. 10., 11. VIII. (rozpj. ♂ 27 *mm*, ♀ 26 *mm*), Kleiner Fl. 12. VIII., Loboch. Fl. 13. VIII. Labský Slap 20. VIII., Martinsbach 21. VIII. (♂ rozpj. 26—32 *mm*), Pudelbach 21. VIII. Někteří ♂ mají křídla přední užší než normalní.

hageni, Mc. Lachl. Zákoutí 27. VII. (rozpj. ♂ 24—26 *mm*), Vejsplach 22. VII., Langer Floss 10., 11. VIII. (rozpj. ♂ —28 *mm*, ♀ —26 ½ *mm*), Potůčky u Malého Stavu 18. VIII., Mumlava 23. VIII., Petzer 28. VIII.

vulgaris, Pict. Jizerka 27. VII., Kamenice 30. VII., Mumlava 2., 9., 10. VIII., Labský Důl 17. VIII., Milmice 14., 24. VIII. Velikost sbíraných exemplářů jest poměrně malá; u mnohých barva předních křídel liší se od typických forem tím, že nemá žádných temných pásek, nýbrž jest u ♂ stejnoměrně zlatohnědá, u ♀ šedohnědá, hustě posetá bělavými tečkami.

glareosa, Mc. Lachl. Suchý Vrch u Jablonného 11. VII., Loboch Fl. 13. VIII.

tristis, Pict. Kamenice 31. VII., Mumlava 2., 10., VIII., Langer Fl. 10. VIII., Labský Důl 17. VIII., Weisswasser 19. VIII.

Glossosoma, Curt.

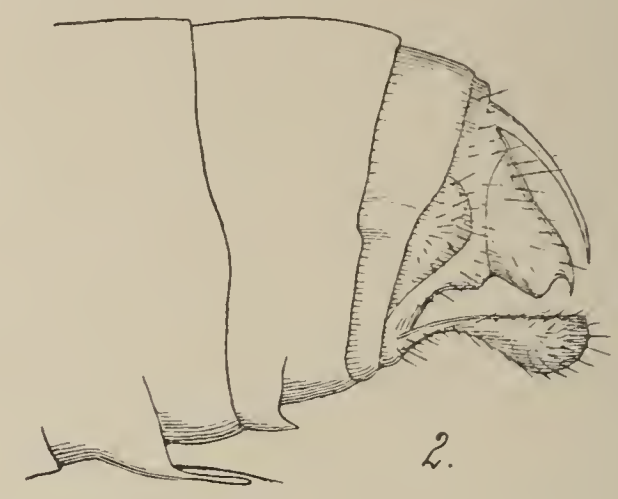
boltoni, Curt. Zákoutí 27. VII., Kamenice 31. VII. Mumlava 2., 10. VIII., Milmice 14. VIII.

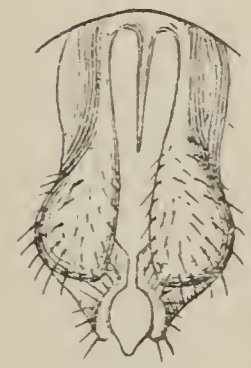
Mystrophora, n. g.

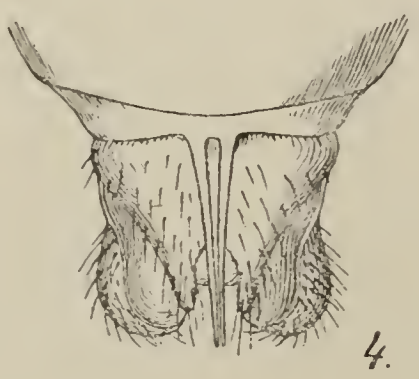
Character essentialis: Tibiae calcaribus 2 4 4 instructae; radius alarum superiorum cum subcosta atque cellula discoidali costula transversa junctus, in apice furcatus; utriusque alae cellula discoidalis clausa; segmentum 6. ventrale processu corneo brevi instructum, segm. 9. parvum, inconspicuum; maris appendices superiores desunt, app. inferiores duo ligulaeformes. Genus inter Glossosoma et Agapetum intermedium.

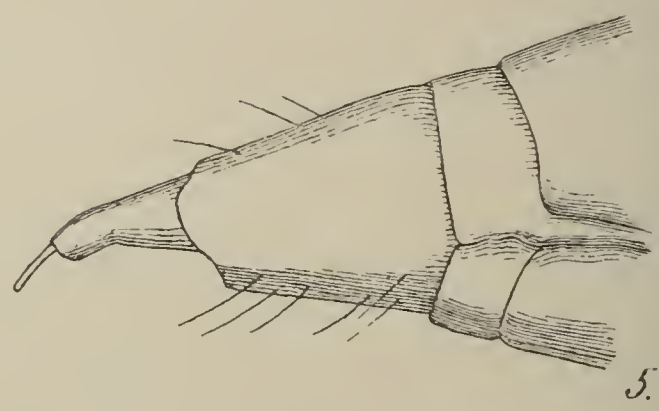
Hlava přiměřená, nahoře vypouklá se dvěma podlouhlými bradavkami týlními a dvěma malými okrouhlými temenními mezi očky; bradavky ty pokryty jsou dlouhými, silnými chloupky; přes témě táhne se slabě vtisklá čára a čelo jest mírně srstnaté. Očka jsou veliká. Tykadla jsou kratší než křídla, podobně jako u Glossosoma s prodlouženým třetím článkem. Makadla maxillarní pětičlenná se základními dvěma články krátkými, ostatními třemi dlouhými, z nichž poslední jest nejtenčí a nese na konci dosti veliký bledý drápek. Makadla labialní velmi nepatrná. Pronotum úzké, mezi hlavou a mesonotem téměř celé ukryté, tak že jen vejčité bradavky postranní vynikají. Mesonotum velmi silné, ve předu s hlubokou, podélnou ryhou střední a na každé straně s ryhou souběžnou, čímž vznikají na přední části hřbetu dva vyvýšené souběžné proužky. Metanotum srdčité se štítkem uprostřed prohloubeným. Nohy štíhlé, poměrně krátké, slabě srstnaté, tibie s velmi sporými trny; pouze vnitřní strana chodidel jest četnějšími ostenci opatřena. Ostruhy 2 4 4, na nohách předních malé, středních a zadních dlouhé. U ♀ jsou střední tibie rozšířeny, zvláště pod insercí středních ostruh; také prvé dva články chodidel na týchž nohách jsou velmi široké. Abdomen malé, štíhlé, do zadu zúžené. U ♂ jsou postranní chlopně při basi 5. kroužku jen jako malá vyvýšenina naznačeny. Břišní lžicovitý výběžek uprostřed segmentu 6. jest menší a užší než u Glossosoma. Sedmý kroužek břišní nese uprostřed vynikající trojboký zub; 9. segment jest nezřetelný. Z přívěsků analních vyvinuty jsou pouze spodní, které jsou podoby lžicovité, z užší základní části rozšířené a na konci uvnitř prohloubené, a zevně vypouklé a tuhými štětinami porostlé; z base mezi oběma přívěsky vyniká štíhlý trn přes $^1/_3$ délky přívěsků dosahující. Přívěsky hořejší a postranní scházejí. Vrchní pouzdro penisu má podobu dvou štíhlých trnů, zdélí dolejších přívěsků, jež vedle sebe vynikají a těsně podle sebe poněkud v oblouku dolů jsou skloněny. Pochvy penisu vyvinuty jsou jako dvě k sobě skloněné chlopně, jež při pohledu se strany ku konci jsou zúženy a na hořejším kraji v osten dolů sehnutý prodlouženy. U ♀ jest na 4. 5. a 6. segm. nepravá striktura, která na 6. segm. tvoří silný zub. Ostatně jest abdomen do zadu zúženo, devátý kroužek tvoří dlouhé kladélko, opatřené na konci dvěma tenkými, dolů sehnutými přívěsky. Křídla nervaturou svou podobají se Glossosoma;

přední pokryta jsou krátkými, dosti hustými chloupky, zadní jsou lysá a irisují; třásně jsou značně dlouhé. Na basi křídel předních jest u ♂ zadní políčko basalní poněkud tužší s blanou tmavší než jest na ostatní části křídel, pouze málo rozšířené a tudíž nepatrně se lišící od téhož políčka u ♀; takového mozoulku, jaký nacházíme u Glossosoma, tu není.









Obr. 8. Mystrophora intermedia, n. sp. 1. Nervatura křídel. 2. Konec těla ♂ se strany. 3. Týž zdola, 4. shora. 5. Konec těla ♀ se strany.

Nervatura křídel jest u obou pohlaví stejná: Ve křídlech předních radius jest na konci silně ohnut, zřetelně vidlicovitě rozdělen a spojen žilkou příčnou se subkostou i políčkem diskoidalním; toto jest široké, krátké, obrysu nepravidelného, uzavřené; políčko thyridiové dlouhé a úzké; apikalní vidlice 1—5 jsou vyvinuty, 4. krátká. Mimo uvedené již dvě příčné žilky jsou vyvinuty ještě tyto: žilka uzavírající políčko diskoidalní, mezi políčkem diskoidalním a basí 3. vidlice, mezi thyridiem a spodní větví hořejšího kubitu. Analní záhyb jest podlouhlý, čtyrúhlý. Zadní křídla jsou značně kratší než přední, tupá s velmi dlouhými třásněmi, jež zvláště na části analní jsou prodlouženy, a se záhybem analním vejčitým. Políčko diskoidalní jest ještě kratší než ve křídlech předních, čtyrúhlé, poněvadž druhé políčko apikalní má spodinu ostrou. Z vidlic apikalných vyvinuty jsou 1., 2., 3., 4. i 5. a ze žilek příčných: 1. mezi prvým sektorem apikalným a radiem, 2. pod políčkem diskoidalným, 3. nad začátkem 5. vidlice apikalné a jedna na basi křídla.

Porovnavše rod tento s rodem Glossosoma a Agapetus shledáme toto: rodu prvému podobá se nápadně žilnatinou křídel, rudimentem mozolku

u ♂ na křídlech předních a ozbrojením kroužků břišních; rodu Agapetus podobá se celkovým vzhledem a strukturou částí analních, má totiž vyvinuty spodní přívěsky, vrchní pouzdro i pochvy penisu. Liší se od obou příční žilkou spojující radius se subkostou, zřetelně rozvětveným radiem a tím, že postrádá vůbec hořejších přívěsků analních.

Novým tímto rodem pozmění se rozdělení III. sekce Rhyacophilid tímto způsobem:

A. Křídla nepříliš hustě srstnatá; ve předních křídlech ♂ zpravidla (Glossosoma spoliatum a Nylanderi vyjímaje) basalní postkostalní políčka s mozoulkem neb aspoň tužší blanou; políčko diskoidalní v obou párech křídel vyvinuto, široké; políčko postkostalní široké. Zadní nohy neobrvené; prostřední tibie ♀ velmi rozšířené; u ♂ má 6. kroužek břišní velký plochý výběžek, 7. kroužek zub.

1. radius nespojen se subkostou příční žilkou, 9. kroužek hřbetní značně vyvinut se zřetelnými, velikými, hořejšími přívěsky analními, břišní kroužek 9. zastoupen lichým, kopinatým výběžkem; dolejší přívěsky analní scházejí Glossosoma.

2. radius spojen se subkostou příční žilkou, 9. kroužek hřbetní i břišní nezřetelný; hořejší přívěsky scházejí, dolejší sudé, dobře vyvinuty. Mystrophora.

B. Křídla hustě srstnatá bez postkostalního basalního mozoulku; políčko diskoidalní pouze ve předních křídlech vyvinuto, políčko postkostalní úzké; u ♂ 6. kroužek břišní s výběžkem, který jest štíhlý a často velmi dlouhý; hořejší přívěsky jsou malé nebo scházejí, dolejší zřetelně vyvinuty Agapetus, Synagapetus, Pseudagapetus, Ptilocolepus.

intermedia N. SP. Character essentialis sicut in genere.

Hlava i thorax tmavě kaštanové, bradavky světlejší, posázené, jakož i čelo i bradavky na pronotum a oba parallelní vyvýšené kýly na mesonotum chloupky na konci zlatožlutými, ke spodu kaštanovými. Tykadla i makadla černohnědá. Kyčle i zevnější plocha tibií černohnědá, ostatní části světle hnědé, ostruhy černohnědé temnější než tibie. Abdomen hnědé vespod světlejší. Přední křídla temně popelavá s chloupky bledě zlatožlutými s bílou tečkou na thyridiu, arkulu a příčné žilce pod políčkem diskoidalním a světlejšími skvrnami při kraji v zadních apikalních vidlicích. Zadní křídla šedá s temnou, zřetelnou nervaturou s temněji šedými třásněmi a silně irisující.

Appendices anales ♂ i ♀ jakož pověděno bylo v popisu rodovém.

Rozepjetí 16—16·5 *mm.*

Mumlava 5. VIII. (jedna ♀), Milnice 14. VIII. (jeden ♂).

Agapetus, CURT.

fuscipes, CURT. Jablonné 15. VII., Langer Fl. 10. VIII.

VII. Hydroptilidae.

Hydroptila, Dalman.

sparsa, Curt. Čelakovice 18. a 21. VI.
femoralis, Eaton T. Orlice Jablonné 2. IX., Pot. Černovický 3. IX.
forcipata, Eaton Tichá Orlice, Jablonné 2. IX., Potok Černovický. 3. IX. Svatý Prokop. 11. IX.
maclachlani, Klp. Sv. Prokop. 11. IX. Velmi hojně.

Orthotrichia, Eaton.

angustella, Mc. Lachl. Štvanice 4. VI.

Oxyethira, Eaton.

friči, Klp. T. Orlice Jablonné 2. IX., Pot. Černovický 3. IX. Velmi hojně.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 24.

POZNÁMKY
K THEORII
FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH.

NAPSAL
M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 13. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CISAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

1. Nekonečná řada

$$(1) \qquad R(u, w \mid \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}},$$

v níž $q = e^{\tau\pi i}$ značí komplexní veličinu absolutně menší jednotky, konverguje patrně pro všecka u, w stejnoměrně a jen pro ona w postrádá smyslu, pro něž mizí jmenovatelé jednotlivých členů; jsou to řešení rovnice

$$1 - q^{2n} e^{2w\pi i} = 0, \quad \text{tedy } w = m - n\tau, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

a na těchto místech má uvažovaná řada, považovaná za funkci w, póly stupně prvního. Součin $R(u, w \mid \tau)\,\vartheta_1(w \mid \tau)$ [kde ϑ_1 značí známou základní transcendentu elliptickou známky (charakteristiky) 11] jest patrně celistvou funkcí transcendentní vůči oběma proměnným u, w.

Z výrazu (1) patrny jsou rovnice

$$R(u, w) = R(u + 1, w) = R(u, w + 1);$$

další vlastnosť funkce R plyne z té okolnosti, že v řadě (1) lze psáti $n + 1$ místo n, čímž vznikne

$$R(u, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n+1} e^{2nu\pi i + 2u\pi i}}{1 - q^{2n+2} e^{2w\pi i}} = q\, e^{2u\pi i} R(u + \tau, w + \tau)$$

a odtud hledaný vztah

$$(2) \qquad R(u + \tau, w + \tau) = e^{-\pi i(2u+\tau)} R(u, w).$$

Studium vlastností funkce R se usnadní, považujemeli w za odvislé od u, tak aby $w = u + v$, kde v jest nová neodvisle proměnná; zaveďme tedy funkci

$$f(u) = R(u, u + v \mid \tau),$$

považujíce v ní výhradně u za proměnnou, v za paramétr. Jest pak $f(u)$ funkce jednoznačná existující v celé rovině (u) a nemající jiných míst zvláštních kromě pólů stupně prvního $u = -v + m + n\tau$, $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, takže součin $f(u)\,\vartheta_1(u + v \mid \tau)$ jest celistvou funkcí transcendentní. Funkce ta hoví dále rovnicím

$$f(u + 1) = f(u), \quad f(u + \tau) = e^{-\pi i(2u+\tau)} f(u),$$

z nichž soudíme, že podíl

$$F(u) = \frac{f(u)}{\vartheta_3(u)}$$

jest funkce dvojperiodická o základních periodách 1, τ. Funkce ta má póly stupně prvého na místech rovnomocných s $-v$ a $\frac{1+\tau}{2}$.

Sestrojme Weierstrassovu funkci $\wp u$ mající základní periody 1, τ a uvažujme residua dvojperiodické funkce proměnné z,

$$\Phi(z) = F(z)\frac{\wp' z}{\wp z - \wp u};$$

póly funkce té jsou rovnomocny s místy $z = -v$, $z = 0$, a $z = \pm u$, kdežto na místech rovnomocných s bodem $\frac{1+\tau}{2}$ funkce $\wp' z$ mizí a tedy $\Phi(z)$ má na nich povahu funkcí celistvých.

Residua studované funkce $\Phi(z)$ jsou pak následující:

1^o při $z = -v$: $\quad \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\vartheta_3(v)}\frac{\wp' v}{\wp v - \wp u}$,

2^o při $z = 0$: $\quad -2F(0)$,

3^o při $z = \pm u$: $\quad F(\pm u)$.

Dle známé základní vlastnosti funkcí elliptických musí býti součet těchto residuí roven nulle, z čehož máme vztah

$$(a) \qquad F(u) + F(-u) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\vartheta_3(v)}\frac{\wp' v}{\wp u - \wp v} + 2F(0).$$

K další relaci dospějeme stanovením residuí funkce dvojperiodické

$$F(z)\frac{1}{\wp z - \wp u},$$

jejíž póly jsou $-v$, $\frac{1+\tau}{2}$, $\pm u$, a jejíž residua jsou následující:

1^o při $z = -v$: $\quad -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\vartheta_3(v)}\cdot\frac{1}{\wp v - \wp u}$,

2^o při $z = \frac{1+\tau}{2}$: $\quad \frac{f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp u}$;

3^o při $z = \pm u$: $\quad \pm F(\pm u)\frac{1}{\wp' u}$.

Annullujíce součet jich obdržíme rovnici

$$(b) \qquad \frac{F(u) - F(-u)}{\wp' u} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\vartheta_3(v)}\frac{1}{\wp v - \wp u} - \frac{f\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}\frac{1}{\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right) - \wp u}$$

jejížto spojením s rovnicí (*a*) plyne pro nás důležitý vztah

$$4\pi i[F(u) - F(0)] = -\frac{1}{\vartheta_3(v)} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - 2\pi i \frac{f(\frac{1+\tau}{2})}{\vartheta'_3(\frac{1+\tau}{2})} \frac{\wp' u}{\wp(\frac{1+\tau}{2}) - \wp u},$$

kterým jest náš problém, vyjádřiti funkci $F(u)$ výrazy elliptickými, v podstatě řešen. Zbývať jen ke konečnému upravení výsledku nahraditi $\vartheta'_3(\frac{1+\tau}{2})$ hodnotou $iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1$, kde ϑ'_1 značí veličinu $\vartheta'_1(0|\tau)$, a stanoviti hodnotu výrazu $f(\frac{1+\tau}{2})$.

Ta jest pak dle definice

$$\varphi(v) = f(\tfrac{1+\tau}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n^2+n}}{1+q^{2n+1}e^{2v\pi i}}$$

jednoznačnou funkcí proměnné v, jež hoví rovnicím

$$(c) \qquad \varphi(v+1) = \varphi(v), \qquad \varphi(v+\tau) = e^{\pi i(2v+\tau)}\varphi(v).$$

Abychom to dokázali, odvoďme hned vztah obecnější

$$(3) \qquad f(u, v+\tau) = e^{\pi i(2v+\tau)} f(u, v) + \vartheta_3(u).$$

Je tu totiž

$$f(u, v+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n+2} e^{2\pi i(u+v)}},$$

aneb, píšemeli $n-1$ místo n,

$$f(u, v+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2-2n+1} e^{2nu\pi i - 2u\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2\pi i(u+v)}},$$

odtud pak

$$f(u, v+\tau) - e^{\pi i(2v+\tau)} f(u, v)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2+1} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{n} e^{2\pi i(u+v)}} \left[e^{-2u\pi i} q^{-2n} - e^{2v\pi i}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2-2n+1} e^{2(n-1)u\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nu\pi i} = \vartheta_3(u),$$

čímž vzorec (3) verifikován, a následkem toho též vztah (*c*).

Z (*c*) plyne, že součin $\vartheta_3(v)\varphi(v)$ připouští periody $1, \tau$ a jelikož jest patrně funkcí stále konečnou, musí býti veličinou stálou, tedy

$$\varphi(v) = \frac{C}{\vartheta_3(v)};$$

konstanta C obdrží se porovnáním residuí při $v = \frac{1+\tau}{2}$, jež poskytne

$$\frac{1}{2\pi i} = -\frac{C}{\vartheta'_3(\frac{1+\tau}{2})},$$

takže

$$C = \frac{\vartheta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right)}{2\pi i} = \frac{q^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1}{2\pi},$$

a následkem toho máme jako vedlejší výsledek

$$\varphi(v) = \frac{q^{-\frac{1}{4}}\vartheta'_1}{2\pi}\,\frac{1}{\vartheta_3(v)}$$

čili

$$(4)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_3(v)} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{1+q^{2n+1}e^{2v\pi i}}.$$

Náš hlavní výsledek hořejší obdrží tak tvar definitivní

$$(5)\quad 4\pi i\vartheta_3(v)[F(u)-F(0)] = -\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v} + \frac{\wp' u}{\wp u-\wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right)},$$

který lze ovšem ještě pozměniti.

Poznamenejme, že zde

$$F(u) = \frac{R(u, u+v)}{\vartheta_3(u)},$$

tedy

$$F(0) = \frac{R(0, v)}{\vartheta_3}.$$

Upravme ještě pravou stranu našeho výsledku (5) na tvar součinu, jímž povaha funkce nejpřesněji jest charakterisována.

Uvažme za tím účelem, že dvojperiodická funkce $F(u)-F(0)$ mizí na $u=0$ a má póly stupně prvního na místech nullových funkcí $\vartheta_1(u+v)$, $\vartheta_3(u)$, t. j. na místech $-v$, $\frac{1+\tau}{2}$, a že tedy musí zmizeti ještě na místě $u=-v+\frac{1+\tau}{2}$, z čehož následuje

$$F(u)-F(0) = C\frac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u)\,\vartheta_1(u+v)},$$

takže zbývá toliko ustanoviti konstantu C, již obdržíme porovnáním residuí při $u=-v$; plyne tak rovnice

$$-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\vartheta_3(v)} = -C\frac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_3}{\vartheta_3(v)\,\vartheta'_1},$$

a odtud

$$C = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i\vartheta_3}\,\frac{1}{\vartheta_1(v)},$$

tudíž

$$(6) \qquad F(u) - F(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\vartheta'_1 \, \vartheta_1(u) \, \vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3 \, \vartheta_1(v) \, \vartheta_3(u) \, \vartheta_1(u+v)} .$$

Vyjádřen v původní symbolice zní tento výsledek:

$$(6^*) \quad \vartheta_3 R(u,w) - \vartheta_3(u) R(0, w-u) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \, \frac{\vartheta_1(u) \, \vartheta_3(w)}{\vartheta_1(w) \, \vartheta_1(w-u)} .$$

Z této rovnice lze obdržeti hodnotu funkce $R(0,v)$ ve tvaru omezeného integrálu; píšemeli ji totiž ve tvaru

$$\vartheta_3 R(u, u+v) - \vartheta_3(u) R(0,v) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \, \frac{\vartheta_1(u) \, \vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1(v) \, \vartheta_1(u+v)} ,$$

obdržíme odtud integrací

$$R(0,v) = \vartheta_3 \int_0^1 R(u, u+v) \, du - \frac{\vartheta'_1}{2\pi i \, . \, \vartheta_1(v)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(u) \, \vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1(u+v)} \, du .$$

Při integraci jest u realné a předpokládámeli pomyslnou část veličiny v v mezích pomyslných částí veličin $\alpha\tau$, $(\alpha+1)\tau$, kde α je číslo celistvé, obdržíme z definice

$$R(u, u+v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} \, e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} \, e^{2\pi i (u+v)}}$$

rozvinutím členů rozloženého součtu

$$R(u, u+v) = \sum_{n=-\alpha}^{\infty} \frac{q^{n^2} \, e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} \, e^{2\pi i (u+v)}} - \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n} \, e^{2nu\pi i - 2\pi i (u+v)}}{1 - q^{2n} \, e^{-2\pi i (u+v)}}$$

dvojnásobné řady

$$R(u, u+v) = \sum_{n,m} q^{n^2+2mn} \, e^{2\pi i (\overline{m+n}\, u + mv)} - \sum_{n',m'} q^{n'^2+2m'n'} \, e^{-2\pi i (\overline{m'+n'}\, u + m'v)} ,$$

$$\begin{cases} m = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty \\ n = -\alpha, -\alpha+1, -\alpha+2, \ldots \infty \\ m' = 1, 2, 3, \ldots \infty \\ n' = \alpha+1, \alpha+2, \ldots \infty . \end{cases}$$

V tomto rozvoji přicházejí členy nezávislé na u, jež příslušejí řešením $m+n=0$, resp. $m'+n'=0$. A sice tu existují řešení rovnice pouze první, jeli $\alpha > 0$, naopak má pouze druhá rovnice řešení, jeli $\alpha < 0$.

Jsou pak tato řešení

$$n = -m = 0, -1, -2, \ldots -\alpha ,$$

resp.

$$n' = -m' = -1, -2, \ldots \alpha+1 .$$

Součet členů stálých bude tedy

$$\sum_{m=0}^{\alpha} q^{-m^2} e^{2mv\pi i} \qquad \text{pro } \alpha \geqq 0 ,$$

a

$$-\sum_{m=1}^{-\alpha-1} q^{-m^2} e^{-2mv\pi i} \qquad \text{pro } \alpha < 0 .$$

Dle toho přejde hořejší rovnice v následující:

$$(7) \quad R(0,v) = A_v \vartheta_3 - \frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1(v)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1(u+v)}\, du ,$$

kde

$$A_v = \sum_{m=0}^{\alpha} q^{-m^2} e^{2mv\pi i} \qquad \text{pro } \alpha \geqq 0 ,$$

ale

$$A_v = -\sum_{m=1}^{-\alpha-1} q^{-m^2} e^{-2mv\pi i} \qquad \text{pro } \alpha < 0 ,$$

při čemž α značí celistvé číslo, dané nerovnostmi*):

$$\text{Im.}(\alpha\tau) < \text{Im.}\, v < \text{Im.}(\alpha+1)\tau .$$

Jeli tedy zvláště pomyslná část v obsažena v mezích 0 a Im. τ, bude $\alpha = 0$, $A_v = 1$.

Poznamenejme, že vzorcem (6*) redukována funkce tří proměnných $R(u, w|\tau)$ na funkci dvou proměnných $R(0, w-u|\tau)$ a na funkci elliptickou, a že vzorec (7) vyjadřuje se stanoviska formalného toliko rozvoj integrálu na pravé straně.

2. Uvažujme součin

$$(8) \qquad \psi(w,u) = \vartheta_1(w)\, R(u,w) ,$$

jenž jest funkcí celistvou, a poněvadž dle (3)

$$(3) \qquad R(u, w+\tau) = e^{\pi i(2w-2u+\tau)} R(u,w) + \vartheta_3(u) ,$$

hoví funkce (8) relacím:

$$(8^a) \begin{cases} \psi(w+1,u) = -\psi(w) , \\ \psi(w+\tau,u) = -\psi(w,u)\, e^{-2u\pi i} + \vartheta_3(u)\,\vartheta_1(w+\tau) . \end{cases}$$

Z uvedených vlastností funkce $\psi(w,u)$ plyne, že ji lze vyjádřiti řadou stále konvergentní

$$\psi(w,u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{(2\nu+1)w\pi i} ,$$

---

*) Symbolem Im. v znamenáme pomyslnou část veličiny v, tedy Im. $(a+bi) = b$.

kde součinitelé A se určí pomocí druhé relace (8^a). A sice obdržíme z rovnice této

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (q^{2\nu+1} + e^{-2u\pi i})\, e^{(2\nu+1)w\pi i}$$

$$= -i\vartheta_3(u) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu\, q^{(\nu+\frac{1}{2})^2}\, e^{(2\nu+1)(w+\tau)\pi i}\,.$$

Odtud plyne srovnáním součinitelů

$$A_\nu = -i\vartheta_3(u)\, e^{2u\pi i}\, \frac{(-1)^\nu\, q^{(\nu+\frac{1}{2})^2+2\nu+1}}{1+q^{2\nu+1}e^{2u\pi i}}$$

a tedy po dosazení do řady:

$$\psi(w,u) = i\vartheta_3(u)\,.\,e^{\pi i(2u-w-\tau)} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu\, q^{\nu^2+\nu+\frac{1}{4}}\, e^{2\nu w\pi i}}{1+q^{2\nu-1}e^{2u\pi i}}\;;$$

poněvadž lze pravou stranu psáti

$$i\vartheta_3(u)\, e^{\pi i(2u-w-\frac{3}{4}\tau)}\, R\left(w+\tfrac{1+\tau}{2},\, u-\tfrac{1+\tau}{2}\right),$$

nacházíme vztah velmi zajímavý:

$$(9)\qquad R(u,w) = i\frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3(w)}\, e^{\pi i(2u-w-\frac{3}{4}\tau)}\, R\left(w+\tfrac{1+\tau}{2},\, u-\tfrac{1+\tau}{2}\right).$$

Odtud máme vůči (3):

$$R(u+\tau,w) = e^{2w\pi i}\, R(u,w) + i\frac{\vartheta_3(u)\,\vartheta_3\left(w+\frac{1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1(w)}\, e^{-\pi i(w-\frac{1}{4}\tau)}\,,$$

čili

$$(10)\qquad R(u+\tau,w) = e^{-2w\pi i}\, R(u,w) - \vartheta_3(u)\, e^{-2w\pi i}\,,$$

vztah, jejž lze též přímo verifikovati.

Poznamenejme, že relacemi (8^a) jest celistvá funkce $\psi(w)$ úplně definována, podobně jako relací (10) funkce $R(u)$.

3. Funkce $R(u,w)$ patří ku kategorii výrazů, které do theorie funkcí elliptických zavedl p. Appell, aby obdržel rozklad dvojperiodických funkcí druhu třetího v prvky jednoduché a tím také jejich trigonometrické rozvoje. Chceme ukázati, že naše relace (6) či (6*) obsahuje jako bezprostřední konsekvence či lépe jakožto zvláštní případy celou řadu interessantních rozvojů, jakéž ve své thesi studoval p. Biehler,*) z nichž mnohé hrají podstatnou roli v krásných arithmetických studiích slavného mathematika p. Hermitea.**)

*) Théses présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Gauthier — Villars. 1879.

**) Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. (Mélanges mathém. et astronomiques tirées du Bulletin de l'Académie de St.

Klademeli ve vzorci

$$(6^*)\qquad \vartheta_3 R(u,w) - \vartheta_3(u) R(0,w-u) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(w)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(w-u)}$$

$u = \frac{1+\tau}{2}$, obdržíme

$$(A^0)\qquad \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1(w)} = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2+n} e^{w\pi i}}{1-q^{2n} e^{2w\pi i}},$$

z kteréhožto vzorce plynou rozvoje pro $\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_\alpha(w)}$ $(\alpha = 0,2,3)$ pouhou substitucí hodnot $w+\frac{1}{2}$, $w+\frac{\tau}{2}$, $w+\frac{1+\tau}{2}$ za w.

Differencujemeli (6) vůči u a klademeli $u=0$ u výsledku, nalezneme

$$(A^1)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_3}\,\dfrac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_1^2(w)} \\ \\ = -4\pi^2 \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n q^{n^2}}{1-q^{2n} e^{2w\pi i}} - 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n} e^{2w\pi i}}{(1-q^{2n} e^{2w\pi i})^2}. \end{cases}$$

Klademeli $w = u+\frac{1}{2}$, $u+\frac{\tau}{2}$, $u+\frac{1+\tau}{2}$, obdržíme ze vzorce (6*):

$$(A^2)\quad \begin{cases} \vartheta_0 \dfrac{\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = 2i \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1+q^{2n} e^{2u\pi i}} - i\vartheta_3(u), \\ \\ q^{\frac{1}{4}} \vartheta_2 \dfrac{\vartheta_1(u)\,\vartheta_2(u)}{\vartheta_0(u)} = 2i\vartheta_3(u) - 2i \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n+1} e^{2u\pi i}}, \\ \\ q^{\frac{1}{4}} \dfrac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_3}\,\dfrac{\vartheta_1^2(u)}{\vartheta_3(u)} = 2 \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1+q^{2n+1} e^{2u\pi i}} - 2\frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1+q^{2n+1}}. \end{cases}$$

Při tom jsme užili vzorců

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1+q^{2n}} = \tfrac{1}{2}\vartheta_3, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{1-q^{2n+1}} = \vartheta_3,$$

Pétersbourg, tome VI), otištěno též v Acta math. sv. V, dále Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques (Journal für die reine und angewandte Mathematik sv. 100). Tamtéž nalezne čtenář udaje literární o starších pracích slavného mathematika, z nichž připomínáme publikaci v Liouvilleově žurnálu z r. 1862. Že mnohé výsledky p. Appella již dříve známy byly p. Hermiteovi, dosvědčuje onen ve své práci o trigonometrických rozvojích funkcí druhu třetího, uveřejněné v druhém svazku třetí serie časopisu Annales de l'Ecole Normale Supérieure (r. 1885). Pan Hermite uveřejnil o svých studiích toliko krátkou poznámku v slavnostním spise In Memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica (Milán, 1881), a v té se vyskytuje ku konci vztah, jenž se s naším vzorcem (9) takměř kreje.

které lze následujícím způsobem dokázati; znamenámeli součty řad těchto s_1 a s_2, obdržíme z výrazů těchto píšíce $-n$, resp. $-n-1$ za n, rovnice:

$$s_1 = \sum \frac{q^{n^2+2n}}{1+q^{2n}},$$

$$s_2 = -\sum \frac{q^{n^2+4n+2}}{1-q^{2n+1}},$$

a tedy součtem obou druhů řad:

$$2s_1 = \sum \frac{q^{n^2}}{1+q^{2n}} + \sum \frac{q^{n^2+2n}}{1+q^{2n}} = \sum q^{n^2},$$

$$2s_2 = \sum \frac{q^{n^2}}{1-q^{2n+1}} - \sum \frac{q^{n^2+4n+2}}{1-q^{2n-1}}$$

$$= \sum q^{n^2}(1+q^{2n+1}) = \sum q^{n^2} + \sum q^{(n+1)^2},$$

takže patrně

$$2s_1 = \vartheta_3, \qquad 2s_2 = 2\vartheta_3,$$

jak výše tvrzeno.

Z každé z rovnic (A^2) obdržíme tři další, nahradíme-li u hodnotami $u+\frac{1}{2}$, $u+\frac{\tau}{2}$, $u+\frac{1+\tau}{2}$.

Další zvláštní případy rovnice (6*), jež chceme uvésti, odpovídají hodnotám

$$u = \tfrac{1}{2}, \tfrac{\tau}{2},$$

jsou to vzorce:

$$(A^3)\quad \begin{cases} \vartheta_2{}^2 \dfrac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_1(w)\vartheta_2(w)} = \dfrac{2i}{\vartheta_3}\sum \dfrac{q^{n^2}}{1+q^{2n}e^{2w\pi i}} \\ \qquad\qquad - \dfrac{2i}{\vartheta_0}\sum \dfrac{(-1)^n q^{n^2}}{1-q^{2n}e^{2w\pi i}}, \\ q^{\frac{1}{4}}\vartheta_0{}^2 \dfrac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w)\vartheta_1(w)} = \dfrac{2i}{\vartheta_3}\sum \dfrac{q^{n^2}e^{w\pi i}}{1-q^{2n-1}e^{2w\pi i}} \\ \qquad\qquad - \dfrac{2i}{\vartheta_2}\sum \dfrac{q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{w\pi i}}{1-q^{2n}e^{2w\pi i}}, \end{cases}$$

z kterýchžto vzorců lze substitucí $w+\frac{1}{2}$, $w+\frac{\tau}{2}$, $w+\frac{1+\tau}{2}$ za w odvoditi dalších šest rovnic.

4. Zaveďme nyní funkce

$$(11)\quad \begin{cases} f_1(u,v\mid\tau) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}}, \\ f_2(u,v\mid\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}}, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} f_3(u,v\mid\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{q^{n^2}e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}}\,, \\ f_0(u,v\mid\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n q^{n^2}e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}}\,, \end{cases}$$

z nichž $f_3(u,v)$ splývá s funkcí $f(u,v)$ výše studovanou.

Z výrazů těchto patrno, že existují především relace

$$f_0(u+1)=f_0(u)\,,\qquad f_1(u+1)=-f_1(u)\,,$$
$$f_2(u+1)=-f_2(u)\,,\qquad f_3(u+1)=f(u)\,,$$

a píšemeli v řadách $n+1$ místo n, obdržíme relace další:

$$f_0(u+\tau)=-f_0(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}\,,$$
$$f_1(u+\tau)=-f_1(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}\,,$$
$$f_2(u+\tau)=f_2(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}\,,$$
$$f_3(u+\tau)=f_3(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}\,;$$

tedy každá z našich funkcí $f_\alpha(u,v\mid\tau)$ hoví rovnicím tvaru:

$$f_\alpha(u+1)=(-1)^g f_\alpha(u)\,,\qquad f_\alpha(u+\tau)=(-1)^h f_\alpha(u)\,e^{-\pi i(2u+\tau)}\,.$$

kde čísla $g\,h$ pak tvoří známku (charakteristiku) funkce f_α. Dlužno si pamatovati, že známka funkce f_α je táž jako známka funkce $\vartheta_\alpha(u)$ týmž indexem α opatřená.

Ze vztahů těchto jest patrno, že podíly

$$(12)\qquad F_\alpha(u,v\mid\tau)=\frac{f_\alpha(u,v\mid\tau)}{\vartheta_\alpha(u\mid\tau)}$$

jsou dvojperiodické funkce stupně 2. o základních periodách $1,\tau$.

Póly funkce $F_\alpha(u)$ jsou jednak nullovými místy funkce $\vartheta_\alpha(u)$, jednak shodny s $-v$.

Funkce

$$F_\alpha(u)-F_\alpha(w)\,,$$

kde w je konstanta, má tytéž vlastnosti a mizí při $u=w$; jakožto funkce stupně druhého mizí ještě na jednom místě, kteréž má hodnotu $u_0=-w-v+c_\alpha$, kde c_α značí nullové místo funkce ϑ_α, takže $\vartheta_1(u-u_0)=\vartheta_1(u+v+w-c_\alpha)$ liší se od $\vartheta_\alpha(u+v+w)$ pouze činitelem exponencialným. Bude tudíž

$$F_\alpha(u)-F_\alpha(w)=A_\alpha\frac{\vartheta_1(u-w)\,\vartheta_\alpha(u+v+w)}{\vartheta_\alpha(u).\,\vartheta_1(u+v)}\,,$$

kde A_α nezávisí na u. Abychom je určili, porovnáme residua při $u=-v$; obdržíme tak

$$A_\alpha=\frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{V_\alpha}{\vartheta_1(v+w)\,\vartheta_\alpha(w)}\,,$$

kde

$$V_1 = -\,i\,q^{\frac{1}{4}}\,e^{-v\pi i}\,,\quad V_2 = q^{\frac{1}{4}}\,e^{-v\pi i}\,,$$
$$V_0 = V_3 = 1\,.$$

Nacházíme tedy obecný vzorec

$$(13)\qquad F_\alpha(u,v) - F_\alpha(w,v) = \frac{\vartheta'_1\,V_\alpha}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(u-w)\,\vartheta_\alpha(u+v+w)}{\vartheta_\alpha(u)\,\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(w+v)}\,,$$

který pro $\alpha = 3\,,\ w = 0$ přejde u výsledek (6), a z něhož máme integrací dle u v mezích 0 a 1,

$$F_\alpha(w,v) = 1 - \frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{1}{\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_1(v+w)}\int_0^1 \frac{\vartheta_1(u-w)\,\vartheta_1(u+v+w)}{\vartheta_1(u+v)}\,du\,,$$

pokud $\alpha = 0\,,3$ a $0 < \mathrm{Im}\,.\,v < \mathrm{Im}.\,\tau$.

Užijemeli ve vzorci (13) při $\alpha = 1\,,\ 3$ vztahů

$$\vartheta_1\left(\tfrac{x}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = -\,i\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,e^{\frac{x^2\pi i}{\tau}}\,\vartheta_1(x\,|\,\tau)\,,$$
$$\vartheta'_1\left(0\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = -\,\tau\,i\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,\vartheta'_1(0\,|\,\tau)\,,$$
$$\vartheta_3\left(\tfrac{x}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,e^{\frac{x^2\pi i}{\tau}}\,\vartheta_3(x\,|\,\tau)\,,$$

obdržíme

$$(14)\qquad \begin{cases} F_3\left(\tfrac{u}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) - F_3\left(\tfrac{w}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) \\ \qquad = i\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,e^{-v^2\frac{\pi i}{\tau}}\left[F_3(u,v\,|\,\tau) - F_3(w,v\,|\,\tau)\right], \\ F_1\left(\tfrac{u}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) - F_1\left(\tfrac{w}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) \\ = -\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,e^{-\frac{v^2-v(1+\tau)}{\tau}\pi i - \frac{\pi i}{4}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}\left[F_1(u,v\,|\,\tau) - F_1(w,v\,|\,\tau)\right]. \end{cases}$$

Odtud následuje, že *výraz*

$$(15)\qquad \Phi(v,\tau) = F_3\left(\tfrac{u}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) - i\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}\,F_3(u,v\,|\,\tau)\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,,$$

nezávisí na u; odtud máme

$$(15^a)\qquad \Phi(v,\tau)\,\vartheta_3(u)\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}} = f_3\left(\tfrac{u}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{u^2\pi i}{\tau}} - \tau f_3(u,v\,|\,\tau)\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,.$$

Integrujme dle u v mezích 0 a 1, předpokládajíce $0 < \mathrm{Im}\,.\,v < \mathrm{Im}\,\tau$; i obdržíme

$$\Phi(v,\tau)\,\sqrt{\tfrac{\tau}{i}} = -\,\tau\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} + \int_0^1 f_3\left(\tfrac{u}{\tau}\,,\tfrac{v}{\tau}\,\middle|\,-\tfrac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{u^2\pi i}{\tau}}\,du\,.$$

Avšak

$$f_3\left(\tfrac{u}{\tau}, \tfrac{v}{\tau} \mid -\tfrac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u-n)^2}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(u-n) + \frac{2v\pi i}{\tau}}}$$

a následovně

$$\int_0^1 f_3\left(\tfrac{u}{\tau}, \tfrac{v}{\tau} \mid -\tfrac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{u^2 \pi i}{\tau}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2 \pi i}{\tau}} dx}{1 - e^{\frac{2x\pi i}{\tau} + \frac{2v\pi i}{\tau}}}$$

Náš výsledek lze tedy psáti

$$(15^b) \qquad \Phi(v, \tau) \sqrt{\tfrac{\tau}{i}} + \tau e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau} x^2} dx}{1 - e^{\frac{2v\pi i}{\tau} + \frac{2\pi i}{\tau} x}}.$$

Pišme na okamžik $\frac{i}{\tau} = c$, $v = ri$, předpokládajíce c realné a kladné, a r rovněž realné; hořejší podmínka $0 < \mathrm{Im}.\, v < \mathrm{Im}\, \tau$ vyžaduje $r > 0, cr < 1$. Náš integrál lze pak psáti po substituci $x = \frac{\zeta}{c} - ri$

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{c}(\zeta - cri)^2} \frac{d\zeta}{1 - e^{2\pi\zeta}},$$

kde integrace se děje podél přímky $z = c(x + ri)$; integrál se však (dle podmínky $cr < 1$) nezmění, volímeli za cestu integrační přímku $z = x + \frac{i}{2}$, čímž obdržíme výraz (15^b) ve tvaru

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{c}(x + \frac{i}{2} - cri)^2} \frac{dx}{1 + e^{2\pi x}},$$

čili vrátímeli se k původnímu označení:

$$(15^c) \qquad \Phi(v, \tau) \sqrt{\tfrac{\tau}{i}} + \tau e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}} = \frac{\tau}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau\pi i (x + \frac{i}{2} - \frac{vi}{\tau})^2} \frac{dx}{1 + e^{2\pi x}}.$$

Připomeňme, že z (14^a) máme pro $u = 0$ rozvoj

$$(15^d) \qquad \Phi(v, \tau)\, \vartheta_3 \sqrt{\tfrac{\tau}{i}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi i}{\tau}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}} - \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{n^2 \tau \pi i - \frac{v^2 \pi i}{\tau}}}{1 - e^{2\pi i (v + n\tau)}}.$$

Klademeli mimo to $u = -v$ ve vzorci (15^a), obdržíme

$$(15^e)\quad \begin{cases} \Phi(v,\tau)\,\vartheta_3(v)\sqrt{\frac{\tau}{i}} = (\frac{1}{2} - v - \frac{\tau}{2})\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}}{1 - e^{-\frac{2n\pi i}{\tau}}} \\ \qquad\qquad - \tau\, e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{e^{(n^2\tau - 2nv)\pi i}}{1 - e^{2n\tau\pi i}}, \end{cases}$$

při čemž čárka u znamení Σ vyjadřuje vynechání členů $n = 0$.

Ze vzorce (15^c) vysvitá, že $\Phi(v,\tau)$ je vůči v funkcí celistvou, což se též snadno dokáže ze vzorce (15^d), vypočtouli se residua na místech $v = m\tau + n$, která se ukážou býti nullami.

Porovnáním (15^d) a (15^e) máme týž výsledek, neboť dle (15^d) může míti Φ pouze póly $m\tau + n$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, na kterýchžto místech však dle (15^e) Φ jest konečno.

5. Úvahy podobné předešlým lze provésti při obecnější funkci

$$(\mathrm{I})\qquad A(u, v\ \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2} e^{2\nu n u \pi i}}{1 - q^{2\nu} e^{2\pi i(u+v)}},$$

kterou do theorie funkcí elliptických zavedl pan *Appel* ve svých studiích o funkcích dvojperiodických druhu třetího uveřejněných v Annales de l' Ecole Normale Supérieure*) (III. řada, sv. 1, 2, 3).

Tato jest jednoznačnou a má pouze póly stupně prvního $u = m + \nu\tau$, $(m, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, při čemž $q = e^{\tau\pi i}$, $|q| < 1$, tedy Im. $\tau > 0$. Tato funkce hoví rovnicím

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} A(u+1) = A(u) \\ A(u+\tau) = e^{-n\pi i(2u+\tau)}\,A(u), \end{cases}$$

jimž hoví též funkce theta řádu n, známky $0\,0$.

Z těchto funkcí theta řádu n známky $0\,0$ vždy existuje n linearně neodvislých; znamenejme

$$\Theta_1(u), \Theta_2(u), \ldots \Theta_n(u)$$

takovouto soustavu n linearně neodvislých funkcí theta řádu n, známky $0\,0$, a uvažujme determinant

$$(\mathrm{III})\qquad \Delta(u) = \begin{vmatrix} A(u) & A(w_1) & A(w_2) \ldots & A(w_n) \\ \Theta_1(u) & \Theta_1(w_1) & \Theta_1(w_2) \ldots & \Theta_1(w_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Theta_n(u) & \Theta_n(w_1) & \Theta_n(w_2) \ldots & \Theta_n(w_n) \end{vmatrix},$$

*) Viz též poslední odstavce knihy Halphenovy (Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications; Paris, 1886) v dílu prvém. Jak p. Appell uvádí, byly tyto výrazy již dříve známy p. *Hermite*-ovi, o čemž viz poznámku výše učiněnou.

kde $w_1, w_2, \ldots w_n$ značí libovolné stálé. Tento determinant jest funkcí u, která hoví rovnicím (II), a podíl $\Delta(u) : \vartheta_3{}^n(u)$ je tedy elliptickou funkcí a sice $(n+1)^{ho}$ stupně. Jelikož $\Delta(u)$ zmizí na $w_1, w_2, \ldots w_n$, a má pól jednoduchý $u = -v$ a n-násobný $u = \frac{1+\tau}{2}$, musí tato funkce elliptická též mizeti na místě

$$w_0 = -v - \sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha + n\,\frac{1+\tau}{2}\,.$$

Jeli tedy n *liché,* nalezneme

$$\Delta(u) = C\,\frac{\prod_{\alpha=1}^{n} \vartheta_1(u - w_\alpha)\,.\,\vartheta_3(u+v+w_1+w_2+\ldots+w_n)}{\vartheta_1(u+v)}\,,$$

kde C nezávisí na u; tuto stálou obdržíme porovnáním residuí při $u = -v$; a sice bude

$$\frac{1}{2\pi i}\,|\,\Theta_\alpha(w_\beta)\,| = C\,\frac{\Pi\,\vartheta_1(v+w_\alpha)\,.\,\vartheta_3(w_1+w_2+\ldots+w_n)}{\vartheta'_1}\,,$$

kde $|\,\Theta_\alpha(w_\beta)\,|$ vyjadřuje determinant

$$D(w_1, w_2, \ldots w_n) = \begin{vmatrix} \Theta_1(w_1)\,\Theta_1(w_2)\ldots\Theta_1(w_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_n(w_1)\,\Theta_n(w_2)\ldots\Theta_n(w_n) \end{vmatrix}.$$

Tím tedy dokázána relace

(IV) $$\Delta(u) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{D(w_1, w_2, \ldots w_n)\,\vartheta_3(u+v+w_1+w_2+\ldots+w_n)\,\Pi\,\vartheta_1(u-w_\alpha)}{\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_3(w_1+w_2+\ldots+w_n)\,\Pi\,\vartheta_1(v+w_\alpha)}$$

která podstatně zobecňuje výsledky předešlé.

Determinant $D(w_1 . w_2, \ldots w_n)$ jest vůči každé z liter w funkcí theta řádu n o známce 00 a zmizí na $n-1$ místech daných; vůči w_1 na př. na místech $w_2, w_3 \ldots w_n$, i bude (ano n jest liché)

$$D(w_1, w_2, \ldots w_n) = \gamma\,\vartheta_3(w_1+w_2+\ldots+w_n)\prod_{\alpha<\beta}\vartheta_1(w_\alpha - w_\beta)$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots n)\,,$$

při čemž konstanta γ závisí toliko na volbě základní soustavy funkcí $\Theta_1 \ldots \Theta_n$.

Následkem toho můžeme výsledek (IV) uvésti na tvar

$$\Delta(u) = \frac{\gamma\,\vartheta_1{}'}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_3(u+v+w_1+\ldots+w_n)\,.\,\Pi\,\vartheta_1(u-w_\alpha)\,.\,\Pi\,\vartheta_1(w_\alpha - w_\beta)}{\vartheta_1(u+v)\,\Pi\,\vartheta_1(v+w_\alpha)}\,,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, n\ldots;\ \alpha<\beta)\,,$$

aneb změnímeli poněkud označení, na tvar přehlednější:

(IV*)
$$\begin{vmatrix} A(w_0)\,A(w_1)\,A(w_2)\ldots A(w_n) \\ \Theta_1(w_0)\,\Theta_1(w_1)\,\Theta_1(w_2)\ldots\Theta_1(w_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_n(w_0)\,\Theta_n(w_1)\,\Theta_n(w_2)\ldots\Theta_n(w_n) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\gamma\,\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_3(v+w_0+w_1+\ldots+w_n)\,\Pi\,\vartheta_1(w_\alpha - w'_\beta)}{\Pi\,\vartheta_1(v+w_\alpha)}\,,$$
$$(\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots n;\ \alpha<\beta)\,.$$

Další vlastnost funkce $A(u,v)$ podá nám známý vzorec*)

$$(V)\quad A(u,v+\tau) = A(u,v)\, e^{n\pi i(2v+\tau)} + \sum_{s=0}^{n-1} e^{2s\pi i(u+v+\tau)}\, \vartheta_3(nu+s\tau \mid n\tau),$$

který zde vzhledem k důležitosti předmětu a v zájmu úplnosti této práce chceme krátce odůvodniti. Píšemeli $\xi = e^{2u\pi i}$, $\eta = e^{2v\pi i}$, máme dle definice

$$A(u,v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2}\,\xi^{n\nu}}{1-q^{2\nu}\,\xi\eta},$$

$$A(u,v+\tau) = \sum_{\nu} \frac{q^{n\nu^2}\,\xi^{n\nu}}{1-q^{2\nu+2}\,\xi\eta};$$

píšemeli u vzorci prvním $\nu+1$ za ν, obdržíme

$$A(u,v)\,q^n\eta^n = \sum_{\nu} \frac{q^{n\nu^2}\,\xi^{n\nu}}{1-q^{2\nu+2}\,\xi\eta}\, q^{n(2\nu+2)}\,\xi^n\eta^n$$

a následkem toho rozdíl posledních dvou výrazů

$$A(u,v+\tau) - A(u,v)\,q^n\eta^n$$
$$= \sum_{\nu} q^{n\nu^2}\,\xi^{n\nu}\,\frac{1-q^{n(2\nu+2)}\,\xi^n\eta^n}{1-q^{2\nu+2}\,\xi\eta}$$
$$= \sum_{\nu} q^{n\nu^2}\,\xi^{n\nu} \sum_{s=0}^{n-1} q^{s(2\nu+2)}\,\xi^s\eta^s,$$

čímž vzorec (V) dokázán.

Píšemeli u výrazu $A(u,v)\ w$ místo $u+v$, přejde tento v řadu

$$R_n(u,w\mid\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2}\,e^{2n\nu u\pi i}}{1-q^{2\nu}\,e^{2w\pi i}},$$

a vzorec (V) obdrží tvar

$$(V')\quad R_n(u,w+\tau\mid\tau) = R_n(u,w\mid\tau)\, e^{n\pi i(2w-2u+\tau)} + \sum_{s=0}^{n-1} e^{2s\pi i(w+\tau)}\, \vartheta_3(nu+s\tau\mid n\tau).$$

Součin

$$\Psi(w) = R_n(u,w\mid\tau)\,\vartheta_1(nw\mid n\tau)$$

je celistvá funkce transcendentní a hoví relaci**) plynoucí z (V′):

$$(V'')\qquad \Psi(w+\tau)$$
$$= -\Psi(w)\,e^{-2nu\pi i} + \sum_{s=0}^{n-1} \vartheta_3(nu+s\tau\mid n\tau)\, e^{2s\pi i(w+\tau)}\,\vartheta_1(nw+n\tau\mid n\tau).$$

Jelikož $\Psi(v+1) = -\Psi(v)$, existuje rozvoj stále konvergentní:

$$\Psi(w) = \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} A_\sigma\, e^{(2\sigma+1)w\pi i}.$$

---

*) Viz citovanou knihu Halphenovu.

**) Stále předpokládáme, že n je liché.

Vložímeli jej do relace (V''), obdržíme vztah

$$\sum A_\sigma \left(e^{-2nu\pi i} + q^{2\sigma+1}\right) e^{(2\sigma+1)w\pi i}$$

$$= -i \sum_{s=0}^{n-1} \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu q^{n(\nu+\frac{1}{2})^2} e^{(2n\nu+n+2s)(w+\tau)\pi i},$$

kde jsme užili definice

$$\vartheta_1 (z \mid \tau) = -i \sum (-1)^\nu q^{(\nu+\frac{1}{2})^2} e^{(2\nu+1)z\pi i}.$$

Porovnávajíce podobné členy obou stran kladďme

$$2\sigma + 1 = 2n\nu + 2s + n,$$

tedy

$$\sigma = n\nu + s + \frac{n-1}{2},$$

i bude

$$A_{s+\frac{n-1}{2}+n\nu} = \frac{-i(-1)^\nu q^{(\nu+\frac{1}{2})^2+2n\nu+n+2s}}{e^{-2nu\pi i} + q^{n+2s+2n\nu}} \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right).$$

Částečný součet

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{s+\frac{n-1}{2}+n\nu} e^{(n+2s+2n\nu)w\pi i}$$

má tedy hodnotu:

$$-i \cdot q^{2s+n+\frac{1}{4}} e^{2nu\pi i+(n+2s)w\pi i} \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{n\nu^2+3n\nu} e^{2\nu n w\pi i}}{1 + q^{n+2s+2n\nu} e^{2nu\pi i}}$$

$$= iq^{2s-2n+\frac{1}{4}} e^{2nu\pi i+(2s-n)w\pi i} \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right) \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu \frac{q^{n\nu^2+n\nu} e^{2\nu n w\pi i}}{1 + q^{2s-n+2n\nu} e^{2nu\pi i}};$$

nekonečná řada shoduje se dle zavedeného označení s výrazem

$$R_1 \left(nw + n\frac{1+\tau}{2}, nu + s\tau - n\frac{1+\tau}{2} \mid n\tau\right)$$

a tedy obdržíme shrnutím všech výsledků:

$$\Psi (w) = i \sum_{s=0}^{n-1} q^{2s-2n+\frac{1}{4}} e^{2nu\pi i+(2s-n)w\pi i}$$

$$\cdot \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right) R_1 \left(nw + \frac{n+n\tau}{2}, nu + s\tau - \frac{n+n\tau}{2} \mid n\tau\right).$$

aneb konečně

(VI)
$$\left\{ \begin{array}{l} R_n (u, w \mid \tau) \vartheta_1 (nw \mid n\tau) q^{2n-\frac{1}{4}} e^{(nw-2nu)\pi i} \\ = i \sum_{s=0}^{n-1} q^{2s} e^{2sw\pi i} \vartheta_3 \left(nu + s\tau \mid n\tau\right) R_1 \left(nw + \frac{n+n\tau}{2}, nu + s\tau - \frac{n+n\tau}{2} \mid n\tau\right). \end{array} \right.$$

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 25.

PŘÍSPĚVKY
K THEORII FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH,
NEKONEČNÝCH ŘAD
A INTEGRÁLŮ OMEZENÝCH.

(POKRAČOVÁNÍ.)

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 13. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

II.

Při problému rovnováhy elektrické na dvou vodivých koulích vyskytují se řady tvaru *)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\sqrt{a + b q^{2n} + c q^{4n}}},$$

kde q je ryzý kladný zlomek; tyto řady jsou jen zvláštní případ výrazů tvaru

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^n (a + b q^{2n} + c q^{4n})^{\sigma}, \tag{1}$$

které chceme redukovati na integraci transcendent elliptických.

Rozviňme za tím účelem jednotlivé členy řady (1) dle vzorce

$$(a + b x + c x^2)^{\sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m,$$

i obdržíme tak dvojnásobnou řadu nekonečnou

$$S = \sum_{m,n} C_m q^{(2m+1)n},$$

která konverguje absolutně, jeli q dosti malé.

Provedemeli v ní sčítání vůči n, obdržíme

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}}.$$

Tento výraz přetvoří se snadno v omezený integrál na základě následujícího principu, s nímž se v pozdějších článcích opětně shledáme:

Konvergujíli řady

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu x \pi i}, \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-2\nu x \pi i}$$

stejnoměrně v celém intervallu $(0 \ldots 1)$, bude

$$\int_0^1 F(x) \varphi(x) \, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu a_\nu.$$

---

*) Viz na př. Mathieu, Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme; Paris, 1886. Díl II., str. 61.

Pro stanovení součtu S bude třeba tento přepsati na tvar

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \gamma^m \cdot \frac{\gamma^{-m} q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}},$$

a klásti

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{-m} q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}} e^{2mx\pi i},$$

$$(b) \qquad \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \gamma^m e^{-2mx\pi i},$$

a γ voliti tak, aby obě řady konvergovaly stejnoměrně. Avšak z poslední rovnice plyne patrně

$$\varphi(x) = (a + b\gamma e^{-2x\pi i} + c\gamma^2 e^{-4x\pi i})^{\sigma},$$

takže bude

$$(c) \qquad S = \int_0^1 F(x)(a + b\gamma e^{-2x\pi i} + c\gamma^2 e^{-4x\pi i})^{\sigma} dx,$$

i nezbývá leč vyjádřiti hodnotu řady (a) transcendentami elliptickými.

K tomu cíli vyšetřme řadu

$$(a') \qquad \Phi(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2mu\pi i}}{1 - q^{2m+1}};$$

znamenámeli $q = e^{\tau\pi i}$, bude konvergenční podmínka vyžadovati $0 < \text{Im.}\, u < \text{Im.}\, \tau$. Rozložme tuto řadu ve dvě sestávající ze členů $m \geqq 0$ a z členů $m < 0$,

$$\Phi(u) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{2mu\pi i}}{1 - q^{2m+1}} - \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2m-1} e^{-2mu\pi i}}{1 - q^{2m-1}},$$

a rozviňme členy obou částí v řady geometrické; i vzniknou tak absolutně konvergentní výrazy

$$\Phi(u) = \sum_{m,n} q^{(2m+1)n} e^{2mu\pi i} - \sum_{m',n'} q^{(2m'-1)n'} e^{-2m'u\pi i},$$

$$\begin{pmatrix} m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ m', n' = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix};$$

provedemeli v obou dvojnásobných řadách sčítání vůči m, obdržíme

$$\Phi(u) = \sum_{0}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n} e^{2u\pi i}} - \sum_{1}^{\infty} \frac{q^n e^{-2u\pi i}}{1 - q^{2n} e^{-2u\pi i}},$$

t. j.

$$\Phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n} e^{2u\pi i}}.$$

Uvážíme-li, že tato funkce jest jednoznačná v celé rovině (u), že hoví rovnicím

$$\Phi(u+1) = \Phi(u)\,, \qquad \Phi(u+\tau) = e^{-\tau\pi i}\Phi(u)\,,$$

a že součin $\vartheta_1(u\,|\,\tau)\,\Phi(u)$ je celistvá funkce transcendentní hovící podmínkám

$$\psi(u+1) = -\psi(u)\,, \qquad \psi(u+\tau) = -\psi(u)\,e^{-\pi i(2u+2\tau)}\,,$$

obdržíme přihlédnuvše zároveň k hodnotě residua při $u = 0$:

$$\Phi(u) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1(u)}$$

čili

(a'')
$$\Phi(u) = \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_1(u)}\,e^{-u\pi i}\,.$$

Porovnáním vzorců (a), (a') však máme

$$F(x) = q\,\Phi(x-\alpha+\tau)\,, \qquad \text{kde } e^{2\alpha\pi i} = \gamma\,,$$

a tedy dle (a''):

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_0(x-\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)}\,e^{2\pi i(\alpha-x)}\,,$$

takže hledaný vztah zní

(2)
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n(a+bq^{2n}+cq^{4n})^\sigma \\ \displaystyle = \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\int_0^1 \frac{\vartheta_0(x-\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)}\,e^{2\pi i(\alpha-x)}\left(a+be^{2\pi i(\alpha-x)}+ce^{4\pi\sigma i(\alpha-x)}\right)^\sigma dx \end{array}\right.$$

čili

$$= \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\int_{-\alpha}^{1-\alpha} \frac{\vartheta_0(x)}{\vartheta_1(x)}\,e^{-2x\pi i}\left(a+be^{-2x\pi i}+ce^{-4x\pi i}\right)^\sigma dx\,.$$

Při tom značí α veličinu podrobenou jediné té podmínce, aby řady (a), (b) konvergovaly pro $\gamma = e^{2\alpha\pi i}$ při realném x. Prvá z nich konverguje, jakmile

$$0 < \text{Im.}\,\alpha < \text{Im.}\,\tau\,,$$

konvergence druhé řady pak vyžaduje, aby $\gamma = e^{2\alpha\pi i}$ bylo absolutně menší než kořeny rovnice kvadratické

$$a+bx+cx^2 = 0\,,$$

t. j.

$$|e^{2\alpha\pi i}| < \left|\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right|.$$

Vzorec (2) je tedy správným, jsouli splněny podmínky

$$(3) \qquad \begin{cases} |e^{2\alpha\pi i}| < \left| \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right|, \\ 0 < \text{Im. } \alpha < \text{Im. } \tau\,, \end{cases}$$

takže se ho dá užiti jen tehdy, jeli

$$(3^a) \qquad |q^2| < \left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right|.$$

Podmínkám těm lze vyhověti při všech q, jsouli a, b, c realné a $b^2 - 4ac < 0$.

Příbuznou povahu mají výrazy, k nimž při řešení zmíněného problému elektrostatického dospěl p. *Mehler**) a které jinou cestou verifikoval *Heine*.**)

Zcela podobnou methodou dal by se řešiti úkol převedení řady obecnější

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n (a + b q^{2n} + c q^{4n})^\sigma e^{2nu\pi i}$$

na tvar integrálu, kterýžto problém ponechán buď jednomu z článků následujících této práce.

---

*) Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern. Jahresbericht des Elbinger Gymnasiums, 1879. Otištěno v Mathematische Annalen, sv. 18.

**) Handbuch der Kugelfunctionen, 2. vyd., II. díl, str. 57 a násl.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 26.

O VZÁCNÝCH ROHOVÝCH NÁDORECH OKA

(KERATOMA, KERATOEPITHELIOMA A KERATOPAPILLOMA).

PODAVÁ

PROF. Dr. JOS. SCHÖBL.

PŘEDLOŽENO DNE 11. BŘEZNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Kožní rohy (Cornu cutaneum, Keratoma, Keratosis circumscripta) různé velikosti a různého tvaru nalézáme na nejrůznějších místech těla lidského i zvířecího.

Délka kožních rohů kolísá mezi 1—250 *mm*, průměr na spodině má 1—60 *mm*.

Tvar kožních rohů jest všelijaký, většinou převládá tvar kuželovitý; některé však vynikající případy ukazují nám tvar více méně válcovitý, neb hranolovitý, podélně ryhovaný a často zkroucený na způsob rohu beraního.

Tak na příklad popisuje a vyobrazuje Rindfleisch[1] dva skvělé rohy ze sbírky university v Bonnu, z nichžto jeden jest 9 palců dlouhý, více méně hranolovitý a podobá se rohu beranímu, druhý tupě kuželovitý, asi 2 palce vysoký, na spodině s průměrem $1^1/_2$ palce.

Velmi vzácný tvar kožního rohu popisuje Lebert[2] u jistého nosiče Rodrigues-a, jehožto roh byl ve tři ratolesti téměř stejně silné rozvětvený.

Velmi krásný a velký kožní roh nalézá se ve sbírce české chirurgické kliniky. Laskavostí slovutného přednosty téže kliniky p. prof. Maydla bylo mi dovoleno jej prohlédnouti.

Vychází ze zadního okraje ucha. Je 9 *cm* dlouhý, má $4^1/_2$ *cm* na spodině v průměru tupě kuželovitý, šroubovitě zakroucený, barvy hnědé s temnějšími skvrnami a na spodině kombinován s epithelialním carcinomem; objevil se u muže 87letého.

Taktéž velmi nápadný a velký roh popisuje a vyobrazuje Bergh[3] ze sbírky pathologického musea Kodaňského, který byl vyňat ze stehna staré paní, měl výšky 58 *mm* a průměr 54 *mm*. Tvaru zaokrouhleně kubického a na temeně mnohotně rozeklaný.

Špička rohu bývá obyčejně tupá, někdy jako obroušená neb roztřepená, zřídka kdy ostrá.

Konsistence velmi tvrdá, rohovitá. Barva bledožlutá, hnědá a černavá, obyčejně mdlá, zřídka kdy střídají se proužkovitě různé barvy.

Co se počtu týče, pozorujeme obyčejně pouze jediný roh, zřídka je jich více neb mnoho, a pak mohou se opět nalézati na obmezeném místě, jak na

---

[1] Rindfleisch, Pathologische Geweblehre 6. Aufl. 1886, pag. 329.

[2] Lebert, Über Keratose 1861, pag. 72.

[3] Bergh, Fälle von Hauthörnern, Archiv für Dermatologie und Syphilis B. V. p. 185.

příklad Lebert[4] popisuje 6 neb 7 rohů na hoření, vlasy nesoucí části hlavy člověka; neb jsou různě roztroušené po různých částech těla.

Textor[5] popisuje případ, kde okolo velkého rohu na ruce vyrostlo jako věneček 7 malých růžků, a Cruveilhier[6] pozoroval okolo bradavky na prsu jedné paní celý věneček malých růžků.

Co se umístění týče, nalézáme kožní rohy na některých místech častěji, na jiných vzácněji.

Nejčastěji vyskytují se na hlavě, tak že Lebert sčítal ve 109 případech 59 výhradně na hlavě, a tu zas nejčastěji na části hlavy vlasy pokryté, řídčeji na čele, na spáncích, na tváři, nosu, pysku a nejřídčeji na víčkách.

Uvnitř štěrbiny oční nebyl dosavade ještě nikdy kožní roh pozorován, tak že jest náš případ vycházející ze řasy půlměsíčité dosavade unicum.

Relativně hojně objevují se kožní rohy na mužských genitaliích (Glans penis, Praeputium, Scrotum), velmi zřídka však u ženských (Labia).

Na končetinách a na trupu objevují se velmi vzácně.

Historická data

Rozhlédneme-li se ve starší literatuře, najdeme vzdor tomu, že kožní rohy jak u člověka, tak u zvířat jsou zjevy dosti vzácné, dosti valný počet případů zaznamenaných a dosti dobře co curiosa popsaných, což hlavně vysvětluje se tím, že rohy takové, jsou-li poněkud veliké, jsou zjevem nejen nápadným a činí vzezření toho kterého patienta v některých případech postavou směšnou a upomínají často na normalní rohy zvířecí; tak velký roh na nose nosorožce, podobný roh na středu čela na mythického jednorožce, dva rohy symetricky na čele neb hlavě postavené na ožúvavce, a není věcí nemožnou, že některé mythologické osobnosti, jako Pan atd. a mythus o čertech zakládá se na podobném základu.

Kožní rohy u zvířat.

Co se především kožních rohů u zvířat týče, nalézáme dosti četné případy zaznamenané.

Jeden z nejstarších případů uvádí Malpighi,[7] byl asi 6 palců dlouhý a měl 3 palce v průměru a seděl na týle vola; byl darován do Aldrovandova Museum Curiosorum.

Brechet nalezl mnoho palců dlouhý roh na krku starého kohouta.

Mimo to byly pozorovány případy rohu u koní, hovězího dobytka, ovcí, koz, psů, jednou u kočky (Valisnieri) a u zajíce (Bartholin) a kohouta, pak

---

[4] Lebert, l. c.
[5] Textor, Würzburger Verhandlungen B. I. p. 132.
[6] Cruveilhier, Traité d' Anatomie pathologique générale T. III. p. 930.
[7] Malpighi, Opera omnia T. II. p. 213.

u papouška, čížka (museum Vratislavské), ovšem nejčastěji na hlavě, mimo to na krku, ve slabiznách, na končetinách i na vemenu.

Případy tyto sesbírali a sestavili velmi pilně Kitt,[8] Nörner,[9] Hutyru,[10] a Lebert.[11]

Kožní rohy lidské mimo oko.

Co se kožních rohů lidských mimo víčka týče, pozorován byl již v 13. věku od Lanfranka[12] skvělý případ takový u jednoho muže, který měl 7 rohů na hlavě, kozímu rohu podobných, z nichžto jeden byl několik palců dlouhý. Podobné udání nalézáme u Aldrovandus-e[13] a Schenckius-e.[14]

Mimo tento velmi zajímavý případ sesbíral a sestavil Lebert[15] s neobyčejnou pílí asi 110 případů, a sice na temeně hlavy 25, na čele 11, na spánku 4, na tváři 8, na nose 2, na pysku hořením 3, na dolením 5, na rameni 1, na paži 1, na předloktí 1, na ruce 5, na stehně 7, na holeni 2, na kolenu 1. na palci 1, na prsou 5, na kříži 2, na glans penis 6, na scrotum 2, více rohů v jisté krajině tělesní 4, více rohů na různých místech těla 8, u ostatních nebylo lze vypátrati, kde asi seděly.

Dalších 25 případů sestavil Hessberg[16] ve své dissertační práci.

Mimo to popsal a vyobrazil Siebold[17] nápodobný případ z glans penis, a Demarquay[18] taktéž popsal a dobře vyobrazil zajímavý případ z ramena.

Pancoast[19] popsal roh, po jehožto utržení vyvinul se na témže místě epithelialní carcinom.

Hebra[20] popsal vzdor obrovskému materialu kožních nemocí, který k dispposici měl, pouze 2 případy.

Bergh[21] popsal 2 případy, z nichžto jeden okazoval na temeni hlavičku místo obyčejného tvaru přišpičatělého. Unna[22] konečně pozoroval 3 malé kožní růžky, které však za to velmi bedlivě pozoroval a prozkoumal, a na základě jejich zbudoval hypothesu histogenetickou, o které se dále zmíníme.

---

[8] Kitt, Münchener Jahresbericht 1884—85, p. 70.
[9] Nörner, Schweizer Archiv für Thierheilkunde B. XXIY, p. 57.
[10] Hutyra, Oesterreichische Zeitschrift für Veternaerkunde I. p. 132.
[11] Lebert l. c. p. 58.
[12] Lanfrancus, Chirurgiae maioris. Tractatus 3, cap. 3.
[13] Aldrovandus, Monstrorum historia p. 126.
[14] Schenckius de Grafenberg, Observationes medicae de capite humano. Basil. 1584.
[15] Lebert l. c. p. 6.
[16] Hessberg, Beitrag zur Kenntniss der Hauthörner von Menschen u. Thieren. Inaug.-Dissert. Göttingen 1869.
[17] Siebold C. C., Ephemer. nat. curiosos VI. p. 234. 1778.
[18] Demarquay, Un. med. XVII. p. 235, 1863.
[19] Pancoast, Archiv für Dermat. & Syphilis III. p. 126, 1871.
[20] Hebra & Cohn in Virchows Handbuch für Path. & Therap. III. B. p. 27, 1870.
[21] Bergh, l. c.
[22] Unna, Das Fibrokeratom. Deutsche Zeitschrift für Chirurgie B. XII. pagina 267, J. 1879.

Kožní rohy víček.

Objevení se kožních rohů na víčku čítáme mezi velké vzácnosti.

Nejstarší případy sděluje nám Ammon;[23] jeden případ byl jemu r. 1839 sdělen od prof. Strohmayera.

Byla to patientka 71letá, která měla malý kožní roh na víčku. Strohmayer vynasnažil se ordinací salinických laxantií upadnutí kožního růžku docíliti, o dalších osudech jeho nemůžeme se ničeho dočísti.

Druhý případ pozoroval Ammon sám; byl to malý růžek na okraji hořeního víčka, který z bradavky se vyvinul. Ammon ho uřízl nůžkami a leptal ránu; recidiva nenastala.

Třetí případ byla 50letá paní, u které taktéž z bradavky na hořením víčku se růžek vyvinul; byla však jen běžně pozorována.

Další případ sdělil Fronmüller,[24] týkal se 50letého muže, seděl na středu hořeního víčka, byl 1 palec dlouhý a tlustý jako brk. Fr. ho uřízl, recidiva nenastala. Zdá se, že vyvinul se z bradavky.

Podobný případ, bohužel jen zběžně pozorovaný, operoval slavný francouzský chirurg Nelaton,[25] jak to již Lebert uvádí.

Taktéž Szokalski[26] pozoroval kožní roh na okraji víčka, a Soelberg-Wells[27] dva, z nichž jeden vyobrazil, s víčka doleního asi palec dlouhý, jako brk tlustý a spiralně točený; vyobrazení to reprodukuje Michel.[28]

Dr. Gulstad, mladý okulista v Odense, sdělil Berghovi,[29] že operoval asi ½ palce dlouhý roh na okraji hořeního víčka u 19leté služky, který se byl z bradavky vyvinul.

Henry Shaw[30] pozoroval na hořením víčku tříletého dítěte kožní roh, po jehož odtržení vyrostly dva nové. Raymond[31] pozoroval patienta, u kterého po uškubnutí bradavky na víčku vyrostl roh.

Chisolm[32] konečně pozoroval na místě cysty se vyvinující během desíti let kožní roh as 1 palec dlouhý, který vypadal jako ostruha kohoutí.

Já sám pozoroval jsem kožní roh na hořením víčku starého muže r. 1872, který dále podrobněji popíšu.

Druhý roh, který jsem pozoroval u staré paní a který se vyvinul z papillomu řasy půlměsíčité, co pravé unicum, taktéž do podrobna vylíčím.

---

[23] Ammon, Monatschrift für Medicin, Augenheilkunde & Chirurgie v. Ammon. Band III. p. 3, 9, 2, J. 1840.

[24] Fronmüller, Journal für Chirurgie & Augenheilkunde v. Walther & Ammon. B. II. p. 178, J. 1843.

[25] Nelaton, Elements de pathologie chirurgicale p. 388, J. 1844.

[26] Szokalski, Annales d'oculist. LIII. p. 209, 1865.

[27] Soellberg-Wells a treatise on the diseases of the eye p. 736, 1870.

[28] Michel in Graefe Saemisch Handbuch B. IV. p. 187.

[29] Bergh l. c. 187.

[30] Henry Shaw Case of cutaneus horn of the eyelid; Boston med. and surg. Journal 1869.

[31] Raymond, Osservazione di producione cornea sulla palpebra Giornale de academia medicina di Torino 1871.

[32] Chisolm, Virginia medical monthly p. 261, 1877.

Pseudocornua cutanea.

Ku konci musím se ještě zmíniti o tak zvaných nepravých rozích kožních (Pseudocornu cutaneum, Pseudokeratoma).

Pozorujeme někdy kožním rohům velmi podobné tvrdé a často dosti objemné výčnělky na epithelialních carcinomech, které tím snáze za kožní rohy považovány býti mohou, poněvadž jest známo, že kombinace s epethelialním carcinomem je u rohů kožních dosti častá.

Takové výčnělky sestávají obyčejně ze zeschlých stroupků a produktů různých regressivní metamorphosy.

Při podrobnějším vyšetření liší se tím, že konsistence není nikdy tak tvrdá, že povrch není tak hladký a ryhovaný jako u rohu kožního, a že se velmi snadno odlupují, což u rohu kožního se jen mimořádně stává.

Jak Lebert[33] uvádí, byly podobné pseudokeratomy také pozorovány na ruce, a sice od Bandeloqueho, Danielsena a Boeckha a sice ve množném počtu při Scabies norvegica.

Já pak pozoroval jsem roku 1865, když jsem suploval někdejší kliniku p. prof. Hasnera, rohu podobný přírůstek, asi 8 *mm* vysoký a 2 *mm* v průměru mající, na dolením okraji víčka doleního 8letého děvčete, který byl dosti tvrdý a kožnímu růžku náramně se podobal. Po exstirpaci jsem shledal, že skládá se ze srostlých několika cilií, mezi kterými bylo mnoho mladých buněk a jemných neoplastických cev. Povrch zdál se sestávati ze zeschlého sekretu, podobal se však nápadně zrohovatělé pokožce. Byla to tedy Plica polonica ciliarum.

Bohužel se mi tento praeparat jako tak mnoho jiných velevzácných roku 1866 v průběhu tehdejší války ztratil.

Histologie a histogenesa kožních rohů.

Kožní roh tvoří nádor kožní (výminečně sliznicový), který zakládá se na atypickém bujení epidermoidalních buněk a náchylnosti k rychlému zrohovatění jich.

V normalních kožních rozích jest tedy histologický nález velmi jednoduchý. Nalézáme v nich více méně četné, obyčejně zbytněné a prodloužené, často rozvětvené papilly.

Tkaň vazivová nalézá se v nich jen velmi spoře a tvoří výhradně velmi jemné stroma, které nese cévy obyčejně štíhlých a často velmi dlouhých papill.

Papilly obyčejně obaleny jsou vrstvou jednoduchou krásných buněk cylindrických, v kterých často lze pozorovati změny karyokinetické jader, dělení buněk předcházející.

---

[33] Lebert, l. c. p. 62.

V nejbližším sousedství nalézají se obyčejně buňky více méně kubické, dělením z předchozích povstalé, pak následuje více méně mohutná vrstva buněk tak zvaných ostnatých (Stachel- o. Riffzellen), které jeví nejdřív tvar kubický, pak více méně polyedrický.

Čím dál od papill, tím víc se tyto buňky ostnatě prodlužují v jednom směru a berou na sebe ráz buněk vřetenovitých.

Konečně pak poznenáhla ztrácejí protoplasma a zrna, a stávají se z nich čím dále tím více zrohovatělé ploténky epidermoidalní.

Čím dříve zrohovatění buněk nastává, tím užší bývá vrstva buněk ostnatých nad papillami, a tím snáze vnikají novotvořené buňky mezi papillami dolů a tvoří epidermoidalní klíny, více méně hluboko vnikající do vaziva kožního, na kterém ten který roh sedí.

Nastane-li zrohovatění buněk poměrně brzo, pak nastane nad nepatrnou vrstvou buněk ostnatých nad každou papillou vrstva buněk zrohovatělých, která na ní sedí jako čepička nebo jako náprstek, a tyto čepičky se dalším tvořením a neustálým zrohovatěním neustále množí a v dalším vzrůstu dál a dále nahoru pošinují tak, že nad každou papillou neb skupinou papill nalezneme cylindrický neb hranolovitý sloupec takových čepiček, který v dalším vzrůstu se neustále do výšky prodlužuje, a celý roh skládá se z četných takovýchto sloupců.

Na průřezu podélním spatříme následkem toho čáry vlnité, jako pohoří, jehožto vrcholky odpovídají temenům papill a dolíky mezerám mezi nimi.

Na tomto útvaru dle mého náhledu spočívají obě definitivní kardinalní formy rohů kožních: tvar cylindrický, neb hranolovitý a tvar kuželovitý.

U rohů, které pomalu rostou a u kterých zrohovatění buněk stává se velmi brzo a následkem toho vrstva buněk ostnatých je nepatrná, stává se, že ony čapky a sloupce čapek nad papillami tvořícími buňky čím dále do výšky tím víc při neustále přibývajícím zrohovatění mají dosti času se oplošťovat, tak že vlnité čáry na průřezu podélném stávají se neustále čím výš, tím rovnějšími; difference vrcholků a údolíček stává se neustále menší a menší, tak že konečně tvoří čáru jen velmi mírně vlnitou. Za to však jednotlivé sloupce nad papillami neb skupinami jich podrží na celé délce tu samou šířku, poněvadž buňky jednotlivé při processu zrohovatění čím dál tím víc stávají se pouze tenčími, kdežto plochový průměr jich zůstává nezměněn.

Jelikož pak celý takový roh skládá se ze samých takových sloupců cylindrických neb hranolovitých, které mají od svého počátku nad papillami až k temenu rohu tentýž průměr, musí také součet všech těch sloupců, totiž roh sám míti tvar více méně cylindrický neb hranolovitý a průměr jeho na temenu musí býti více méně tentýž, jako na základě, odkud vyrůstá. Končí tedy tupě, někdy jakoby byl uťat.

Takový roh representuje roh mnou pozorovaný a na tabulce V. obr. 5. vyobrazený.

Jinak má se věc, když roh roste rychle a zrohovatění stává se poměrně pomalu, poznenáhla.

Tu může se vyvinout nad každou papillou, neb nad skupinou papill, neb nad papillami vůbec, mohutná vrstva buněk ostatních, tu také klíny epidermoidalní, vnikající mezi papillami dolů, stávají se nepatrnějšími, poněvadž novotvořené buňky mají více volnosti šířit se do výšky a nejsou nepodajností rychle zrohovatělých buněk nuceny vyhýbati se a vnikati mezi papilly; tu nenalézáme nad papillami neb skupinami jich tak pravidelné čapky, ty vyvíjejí se mnohem výše, ve větší vzdálenosti od papill a většina buněk vřetenovitých podrží směr longitudinalní, stejnoběžný s osou rohu a jelikož v dalším zrohovatění se průměr jich neustále seslabuje, musí souhrn jich roh sám čím dál tím více ztenčovat, přišpičaťovat a nastává forma exquisitně konická.

Takový vzrůst ukazuje nám druhý případ mnou pozorovaný, který jsem na tab. III. obraz 3. vyobrazil.

Samo sebou se rozumí, že platí to jen pro formy extremní, a jako ve všem mohou existovati a existují v přírodě formy přechodní, které se brzo té brzo oné extremní formě více blíží.

Ve starých kožních rozích s pomalým vzrůstem potkáváme se mimo tkaně uvedené se tvořením se dřeňových mezer mezi jednotlivými sloupci svrchu popsanými a v nich nalézáme produkty regressivní metamorphosy, a sice amorphní hroudovité hmoty molekularní detritus a zřídka produkty regressivní metamorphosy tukové.

V mém případu na tab. V. obr. 5. vyobrazeném jsou tyto dřeňové mezerky naznačené.

Toto tvoření se dřeňových prostor v jednom kožním rohu pozoroval první Simon,[34] a později Virchow,[35] a popsal v nich produkty regressivní metamorphosy plotének epidermoidalních, jak jsem je též ve svém případu pozoroval a svrchu uvedl. Náhled Lebertův[36] však, který myslí, že se v těchto mezerkách nalézají hmoty tukové, původně ze žlaz tukových povstalé, nezdá se zakládati na pravdě, jelikož vývin kožních rohů ze žlaz vůbec jest, jak se mi zdá, víc jak pochybný.

Co se histogenesy kožních rohů týče, mám to přesvědčení, že náramná většina jich, ne-li všechny, povstává na základě preformovaných papill, bujením mladých buněk epidermoidalních a poměrně více méně brzkým zrohovatěním jich.

První stadium tvořilo by tedy zbytnění, prodloužení, eventuelně rozvětvení se papill, kterému sleduje bujení buněk mladých, epidermoidalních, stratu Malpighiova odpovídajících, okolo nich ležících, a tak povstává malý nádorek, buď měkký struktury papillomatosní, neb tvrdý bradavkovitý; a jest pro mne pravděpodobné, že z měkkých novotvarků papillomatosních vyvíjely by se kožní rohy rychle rostoucí s pomalejším zrohovatěním a formou kužclovitou, kdežto z tvrdých, bradavkovitých novotvarků vyvíjely by se pomalu rostoucí rohy s rychlým zrohovatěním a formou cylindrickou neb hranolovitou.

---

[34] Simon, Die Hautkrankheiten, Berlin 1848, p. 38.

[35] Virchow, Würzburger Verhandlungen 1855.

[36] Lebert l. c.

Co se obou mých případů týče, předcházel u jednoho měkký papillomatosní nádorek na řase půlměsíčité, kterého vývin jsem sám pozorovati příležitost měl; v případě druhém udával patient v anamnese se vší určitostí, že vývinu kožního růžku na víčku bradavička předcházela.

Mám mimo to ve své sbírce jeden náramně tvrdý papillomek, který jsem z víčka jednoho staršího kollegy roku 1870 vyřízl, který tvoří v pravém smyslu slova přechod mezi papillomy a malými kožními rohy a mohl by směle co malý, rozsochatý roh mezi ostatní kožní rohy vřaděn býti a který ku konci této práce podrobněji popíšu a vyobrazím. Chci ho pojmenovati Keratopapilloma.

Myslím, že valná většina badatelů jak starších tak moderních s tímto mým náhledem souhlasiti bude.

Již Malpighi,[37] o kterém jsme svrchu uvedli, že byl jedním z nejprvnějších pozorovatelů kožních rohů, vyslovil se rozhodně pro původ papillarní.

Rovněž tak celá řada dalších pozorovatelů a v novější době Rindfleisch,[38] Unna,[39] Virchow[40] atd. I sám Lebert,[41] který glandularní původ kožních rohů tak vřele favorisuje, musil se přiznat, že v mnohých případech papillarní původ rohu nelze upříti a ve valné většině jím tak pilně sesbíraných případů kožních rohů, u kterých vůbec o původu něco známo bylo, bylo lze z anamnesy konstatovat, že vývinu rohu předcházela bradavka neb bradavce podobný novotvarek, a sice v jeho případech: 2, 5, 6, 12, 13, 15, 19, 26, 29, 35, 37, 40, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 56, 57, 58, 65, 70, 99, 102 a 105.

Námitky proti papillarnímu původu rohů kožních, které Lebert a jiní činí, že se totiž vyvíjí dosti často z kyst atheromatosních, nelze považovati za dosti závažné, jelikož v podobných kystách na spodině jich v četných případech velmi krásné papilly a ve velkém počtu pozorovány byly, jak mezi jinými Rindfleisch[42] udává a já sám dvakrát viděl, a z případů, které Lebert a jiní uvádějí, není ani jediný tak přesně prozkoumán histologicky, aby z toho nálezu bylo lze tvrdit, zdali se v té které kystě preformované papilly nalézaly čili nic.

Také případům, které taktéž Lebert uvádí, kde měly se kožní rohy vyvinouti na jizvách po spáleninách neb vředech, nelze žádné důležitosti přikládati, poněvadž pozorování ta jsou nespolehlivá a nepředléhá taktéž přesný histologický nález, a mimo to nelze popírati, že by se nemohly objevit novotvořené papilly někde, kde bychom je obyčejně neočekávali.

Mám ve své bohaté sbírce velevzácný Tumor mixtus, který měl velikost velikého pomeranče a vyrůstal z orbity as 4letého hošíka a který jsem na své klinice exstirpoval. Tumor ten sestával hlavně z kombinace Gliomu a Sarcomu, v kterém se však také nalézaly vrstvy dosti mohutné neoplastických hladkých svalů a množství novotvořených cev, které místy i retia mirabilia tvořily. Mimo to byl polymorphní tento tumor na velké části svého povrchu

---

[37] Malpighi l. c.
[38] Rindfleich l. c.
[39] Unna l. c.
[40] Virchow l. c.
[41] Lebert l. c.
[42] Rindfleisch l. c. p. 330.

pokryt krásnými papillami, které se od normalních papill v ničem nelišily, a aby bylo vše zastoupené, i epithelialnímu carcinomu podobné klíny buněk epithelialních do vnitra zhoubného nádoru na některých místech vnikaly. Mohly-li se tedy zde na tak polymorphním zhoubném tumoru vyvinouti papilly neoplastické, proč by se eventuelně nemohl také vyvinouti na granulační tkani po spálenině neb po processu ulceračním.

Theorie Bädge-ho,[43] který tvrdí oproti theorii papillarní, že při kožních rozích papilly jsou nezměněné anebo dokonce tlakem od bujících buněk zatlačené, a kterou zbudoval na základě dvou jím pozorovaných případů, jest úplně neoprávněna.

Nechci pochybovati o správnosti jeho pozorování, avšak my tvrdíme, že u tvoření se kožních rohů jsou činny obyčejně s velkou pravděpodobností dva faktory a sice zbytnění neb bujení papill a bujení zrohovatění epidermoidalních buněk; tím však není nikterak tvrzeno, že by ve všech případech oba faktory stejnoměrně činnými býti musily, a dá se velmi dobře mysliti, ba jest velmi pravdě podobno, a nasvědčují tomu různá a četná pozorování, že v některém případě jeden v druhém, pak druhý faktor převládá.

Avšak ze dvou pozorovaných případů chtít generalisovat s apodiktickou určitostí na vývoj kožních rohů, jak to Bädge činí, jest chybou, kterou jemu již Unna vytknul.

Theorie Auspitzova,[44] která jest velmi duchaplná a práce jeho velmi závažná, odsuzuje papilly k absolutní passivitě.

Na základě pozorování u zárodků, že tvoří se papilly tím, že vrůstají klíny buněk epidermoidalních do hloubi kůže, hleděl Auspitz dokázati, že také při processech pathologických se papilly aktivně zbytněním neb rozvětvováním nesúčastňují, nýbrž že změna papill jedině bujením epidermoidalních buněk podmíněna jest.

Auspitz považuje veškeré novotvary, které nás při vývinu kožních rohů zajímají, výhradně za zbytnění epidermoidalních buněk a rozeznává:

1. Keratosy, kam čítá mozol, kuří oko, kožní roh a ichthyosu, při kterých papilly se vůbec nemění, ba naopak od bujících buněk epidermoidalních stlačeny bývají, a

2. Papillomy, kam čítá bradavky, condylomy, a epitheliomy, u kterých následkem bujení buněk ostnatých tyto do stromatu vazivového klínovitě vnikají a tím papilly passivně prodlužují a vysýláním do nich postranních klínků druhého řádu dendritické rozvětvení jich taktéž podmiňují.

Theorie tato, ač duchaplná a lákavá, o analogii v životě foetalním se opírající a pro jisté případy dojista platná, jest vzdor tomu přece jednostranná a příliš exklusivní.

---

[43] Bädge, Zur Casuistik multipler Keratosen. Deutsche Zeitschrift für Chirurgie B. VI. Jahrg. 1876.

[44] Auspitz, Über das Verhältniss der Oberhaut zur Papillarschicht. Archiv für Dermatologie & Syphilis B. II. J. 1870.

Co se především kožních rohů týče, tvrdí Auspitz, že při nich jsou papilly buď nezměněné, neb že naopak kompressí trpí. Udání toto jest úplně mylné a nesouhlasí s tím téměř žádný nepředpojatý pozorovatel, který měl příležitost papilly v kožních rozích pozorovati, ba naopak nalézáme téměř ve všech případech rozhodně a se vší určitostí udání, že papilly byly shledány zbytněné, prodloužené někdy kolossálně a buď štíhlé neb více méně rozvětvené; tak na příklad Rindfleich,[45] Birch Hirschfeld,[46] Michel[47] a jiní.

Jediný pohled na vyobrazení mého kožního rohu z půlměsíčité řasy na obraze 3. postačuje k důkazu, že jsou zde papilly kolossálně prodloužené až na délku 12 *mm*, což se dojista pouhým tlakem dle theorie Auspitzovy nikterak vysvětliti nedá.

Také obraz druhého mého případu kožního rohu víčka ukazuje poměrně obrovsky zvětšené zvlášť prodloužené papilly.

Ale i co se papillomu týče, nemohu aspoň pro všechny případy s theorií Auspitzovou souhlasit; mám na příklad ve své sbírce jeden skvostný případ papillomu, který později uveřejním, který vychází částečně z limbu a velké části rohovky samé; jest větší než velký lískový ořech a tvoří náramně komplikovaně rozvětvený stromek, a nemohu si nikterak vysvětliti, jak by z krajiny takové jako jest limbus rohovky, kde jest vaziva velmi málo a papilly de norma ani neexistují, mohl dle theorie Auspitzovy vyrůsti tak mohutný a tak komplikovaně rozvětvený papillom.

Theorie Unnova[48] o tvoření se kožních rohů jest téměř totožná s theorií Auspitzovou pro tvoření se papillomů.

Unna tvrdí, že vývin papill neb jak se vyjadřuje útvarů papillám podobných v kožních rozích jest pochod úplně passivní a sekundarní, rovněž jak Auspitz pro papillomy tvrdí.

Na základě pozorovaných 4 případů arci malých kožních růžků popisuje Unna vývin kožních růžků následovně.

Nejdřív vyvine se na kůži krku, tváře neb víček, nejčastěji u starých ženštin malinký vazivový nádorek fibromek; následkem dráždění neb i beze známých příčin počne na něm bujet vrstva buněk epidermoidalních ho pokrývajících a když se pak stává, že vrstva nejdřív zrohovatělých buněk abnormní pevnost a kohaerenci dostane, přinutí dalším bujením neustále se množící buňky ostnaté vnikati do tkaně vazivové, a tvořit klíny buněk, které čím dál tím hlouběji vnikají. Jelikož pak cévy těmto klínům větší odpor kladou, nežli tkaň mezi nimi, stává se, že se jednotlivé klíčky cev jako poupátka budoucích papill isolují, a čím dál klíny vnikají, tím více se klíčky prodlužují a tvoří papillám podobné útvary, následkem postranních, sekundarních klínků může pak povstati další rozvětvení papillám podobných útvarů. A když pak bujení buněk

---

[45] Rindfleisch l. c.

[46] Birch-Hirschfeld, Lehrbuch der allgemein. pathologischen Anatomie 4. Auflage, pag. 170.

[47] Michel l. c.

[48] Unna l. c.

poněkud ustává, postupuje zrohovatění jich do hloubi a tvoří vlnitou rohovinu nad útvarem papillarním.

Unna jmenuje tyto jím pozorované nádorky, jichžto histogenesu jsme právě vylíčili, fibrokeratomy, jelikož se původně z fibromu byly vyvinuly.

Nechci ani v nejmenším pochybovati o správnosti pozorování Unnových, a můžeme o theorii jeho tvrditi totéž, co jsme byli řekli o theorii Auspitzově, že jest velmi duchaplná a krásná, že se však pro všechny, ba ani pro valnou většinu kožních rohů nehodí, což i Unna sám, který nepadl do chyby Bädge-ho, chtít svá pozorování generalisovat na veškeré případy se vší určitostí, uznává.

Že pro některé případy zvlášť malých růžků papillomům blíže stojícím se hodí, rád uznávám, a také výraz Unnův fibrokeratom pro takové případy je dozajista dobře volený.

O theorii Krämerově,[49] která se přímo kožních rohů netýče, nýbrž pouze bradavek neb papillomů, jim obyčejně předchozích, chceme se jen zkrátka zmíniti. Krämer si myslí, že papillomy atd. nepovstávají aktivním bujením papill, nýbrž že jsou mechanicky vytlačeny. Myslím, že není třeba tuto theorrii obšírněji vyvracovat.

Co se konečně theorie glandularní týče, že se totiž vyvíjejí kožní rohy ze žlaz tukových neb potových neb z kyst, z nich povstalých, byl již Home[50] na konci minulého století jejím vřelým zastáncem.

Za naší doby je Lebert[51] nejvřelejším jejím přívržencem, ačkoli papillarní původ v jistých případech nepopírá.

Lebert rozeznává především primarní keratogenesu glandularní, kde se mají tvořit kožní rohy přímo z hyperplasie epithelialních buněk vystelajících žlázy tukové, potové neb míšky vlasové, a myslí, že následkem nějaké změněné výživy neb nějakého podráždění na obmezeném okršku počnou dotyčné buňky bujet, a jakmile přes povrch kůže vynikají, že zrohovatějí a tvoří kožní roh, zbytky tukového sekretu dotyčných žlaz, myslí, že dají se někdy dokázat v dřeňových mezerkách těchže rohů.

Proti této primarní keratogenesi Lebertově lze především namítat, že neexistuje v celé literatuře ani jediný přímý histologický nález, který by tomu nasvědčoval.

Jediný, často citovaný nález Virchowův, že totiž na spodině některého rohu nalezl epidermoidalní klíny, které měly podobný útvar jako rozšířené vývody žlaz tukových, nedokazuje ani v nejmenším, že tyto klíny byly by ze žlaz tukových původ svůj vzaly, ba jest téměř nade vši pochybnost jisto, že naopak do vývodů těch aktivně vzrůstaly a tím je rozšířily.

Mimo to nelze ani povzdálí si vysvětliti možnost, jak by ono mohutné bujení buněk při rozměrech rohů často tak kolossalních a tak od kožních žlazek vzdálených stávati mohlo a odkud by výživné látky bralo, kdyby cev úplně postrádalo.

---

[49] Krämer, Über Condylome und Warzen. Göthingen 1847.
[50] Home, Philosoph. Transact. V. LXXXI. 1791.
[51] Lebert l. c. p. 77.

Nelze se tedy divit, že na primarní keratogenesu Lebertovu dnešního dne již téměř žádný histolog seriosně nepomýšlí.

Sekundarní keratogenesou glandularní jmenuje Lebert vývoj kožních rohů z cyst atheromatosních. Námitky proti téže keratogenese jsme již svrchu uvedli a viděli jsme, že vzdor tomu, když pozorujeme roh vyvinutý z kysty atheromatosní, nejsme oprávněni tím pouhým faktem popírati papillarní původ jeho, jelikož v takových kystech velmi často papilly nalezeny bývají.

Když jsme tedy veškeré theorie histogenesy kožních rohů poněkud kriticky probrali, musíme přijíti k tomu náhledu, že z počátku vyslovené přesvědčení naše papillarního původu pro téměř všechny rohy kožní má pro sebe tu největší pravděpodobnost, a že ve ohromné většině kožních rohů musí připustiti aktivní súčastnění se papill brzo ve větší, brzo v menší míře a že jen pro malou skupinu fibrokeratomů můžeme koncedovat passivní vývoj papill.

Komplikace kožních rohů.

Co se konečně komplikace kožních rohů s epithelialním carcinomem týče, nesmíme opominouti se zmíniti, že jest tatáž zjevem nápadně častým.

V případech, které byl Lebert sestavil, byl carcinom na spodině rohů pozorován ve 12%.

Také v případě mém, týkajícím se kožního rohu řasy půlměsíčité, stávala tatáž komplika, rovněž jako u onoho z počátku uvedeného rohu ucha ze sbírky naší chirurgické kliniky.

Komplikace tato může povstati na dvojí způsob, a sice buď může býti carcinom primarní a na něm vyroste v dalším průběhu kožní roh, neb roh je affekce primarní a po dlouhém trvání vyvine se na spodině jeho epithelialní carcinom.

Případy prvého druhu jsou mnohem řidší a byly dosud pozorovány pouze na scrotum a glans penis. Jest pravdě podobno, že se zde jednalo o tak zvaný Carcinoma epitheliale luxurians papilliferum, jehožto povrch z velké části papillami často krásně vyvinutými pokryt bývá a k vývoji kožního rohu podmínky poskytuje.

Kombinaci druhého druhu, kde předchází roh, pozorujeme taktéž na predelekčních místech, kde se i mimo roh nejraději carcinom epithelialní vyskytuje, jako na pysku, tváři, uchu, nosu, víčku, scrotum atd.

Dále nutno podotknouti, že kombinaci tu téměř výhradně pozorujeme u lidí starých, nejčastěji mezi rokem 60—80tým.

Kombinované takto rohy kožní nazveme nejlépe keratoepithelioma.

Vývoj a průběh kožních rohů.

Co se průběhu kožních rohů týče, bývá vzrůst jejich obyčejně velmi pomalý, z počátku bezbolestný, později dostaví se různé nepohodlí, když se značně zvětšuje neustále rostoucí citlivost a bolestivost, zvlášť při dotknutí, ku které se v případech, s carcinomem komplikovaných často velké spontanní bolesti

přidruží. Nepohodlí a zohyzdění, které tomu kterému patientu činí, řídí se dle velikosti a dle umístění jich. Někdy stává se, že ob čas, často i několikrát v roce odpadávají, neb patient si je odlupuje na hranici části zrohovatělé, vždy však opět dorůstají, rovněž tak, jako když se část upiluje. Ve velmi řídkých případech mohou odpadnouti úplně bez následující recidivy, když spodina zvředovatí.

Diagnosa, prognosa a therapie kožních rohů.

Diagnosa kožních rohů je velmi snadná a třeba jedině pomýšleti na tak zvaná pseudocornua, jichžto rozdíly jsme svrchu uvedli.

Prognosa v celku dobrá, nestává-li komplikace s carcinomem.

Jediná rozumná therapie je operativní, a sice radikální exstirpace.

Zbývá mně ještě ku poučení uvésti popis tří případů očních, mnou pozorovaných a operovaných.

I.

Kožni roh řasy půlměsičité.

(Keratoepithelioma plicae semilunaris). (Cornu cutaneum plicae semilunaris complicatum cum carcinomate epitheliali.)

Holíková Barbora, 82 roky stará vdova po měšťanu, konsultovala mne 20. března 1881 co zemského lékaře za příčinou, že jí oči slzí a pálí, zvlášť levé, a ráno že je mívá zalepené.

Patientka udávala, že, pokud se očí týče, byla vždy zdráva mimo nepatrné obtíže svrchu uvedené, na které si stěžovala; ty že trvají již více let, v poslední době však že se zvlášť na oku levém stupňují.

Patientka byla velmi slaboučka, marastická, velmi citlivá a nedůtklivá, měla emphysem a trpěla ob čas těžkými asthmatickými záchvaty.

Na obou očích shledal jsem dočasný katarrh spojivky, jak jej u lidí starých tak často co neduh sice nepatrný, avšak skoro nevyléčitelný nalézáme. Mimo to byly slzovody obou očí něco zúžené.

Na oku levém shledal jsem na řase půlměsíčité tam, kde de norma caruncula sedává, malý papillomatosní nádorek velikosti asi malého hrášku.

Předepsal jsem patientce léky pro spojivkový katarrh její se hodící a radil jsem, aby si nádorek dala vyříznouti a ujišťoval ji, že jest to encheiresa velmi nepatrná a téměř bezbolestná.

Patientka však, náramně citlivá a bázlivá a, jak se říká, nervosní, nechtěla o operaci ani slyšet, ba toho návrhu se tak ulekla, že okamžitě se sedadla vyskočila a z mé ordinační síně utekla.

Roku 1882 v květnu viděl jsem ji opět. Katarrh oka pravého byl poněkud zlepšen, na oku levém však zhoršen a výměšek hojný. Nádorek papillomatosní vyrostl značně a byl nyní asi 12 *mm* vysoky a měl asi 6 *mm* v průměru.

Radil jsem a sice nyní mnohem důtklivěji, než při první návštěvě, exstirpaci nádoru, avšak opět bez výsledku, ba naopak patientka následkem té opětované rady na mne zanevřela a téměř dvě léta jsem ji nespatřil.

Na sklonku roku 1883 byl jsem opět k ní volán; byla nyní již 84 roky stará, ještě slabší a sešlejší, nežli při první návštěvě, a velmi nedůtklivá.

Na první pohled byl jsem nemálo překvapen, vida z krajiny vnitřního koutku levého vyrostlý mohutný kuželovitý kožní roh asi 40 *mm* vysoký a na základě asi 30 *mm* v průměru mající, barvy hnědošedé, konsistence na temeni rohovité, tvrdé, na spodině měkký, hrbolkovitý. Kůže okolo tvořila val naduřenin hrbolkovitých, rudých, cevami protkaných.

Spodina rohu seděla částečně ve vnitřním koutku štěrbiny oční, částečně na vnitřní části obou víček, částečně na nosu v krajině, kde leží ligamentum canthi internum.

Roh byl při dotknutí bolestivý a patientka naříkala si na velké bolesti spontanní, zvlášť v noční době, tak že následkem toho často tak potřebného jí spánku postrádala.

Diagnosa byla velmi snadná; jednalo se zde o velevzácný a náramně rychle vyrostlý kožní roh, který se byl beze vší pochyby vyvinul z onoho nádorku papillomatosního, který jsem ve svém vývoji během minulých let po dvakráte u téže paní viděl. Když jsem však pozoroval spodinu rohu a změny kůže okolo a bral ohled na velké spontanní bolesti, nemohl jsem pochybovati, že roh ten na své spodině komplikován jest s carcinomem epithelialním. Měl jsem tedy před sebou keratoepithelioma plicae semilunaris, který se byl poznenáhla z původního sídla svého rozšířil na vnitřní část obou víček a částečně na nos.

Bezodkladná radikalní operace, kterou jsem radil, byla opět odmítnuta se vší rozhodností, a mohu říci, že jsem se z toho příliš nermoutil, ačkoli bych skvostný ten případ velmi rád byl acquiroval pro svou sbírku, jelikož jsem se bál narkosy.

Jak věci nyní stály, bylo předsevzetí operace dosti závažné, bez narkosy zcela nemožné, jelikož by při tak pokročilém marasmu, tak excessivní slabosti a citlivosti, také báječné bázlivosti před nožem a krví a takové nervositě byla by bývala i bez narkosy operace nebezpečnou, narkosa však za právě vylíčených poměrů tělesních, ku kterým ještě nutno připomenouti náramnou slabost srdce, emphysem a asthmatické záchvaty, byla velmi nebezpečnou a mohla se snadno státi smrtonosnou.

Od té doby byl jsem k patientce pravidelně volán asi 2krát týdně k vůli nesnesitelným bolestem, které ji konečně k tomu přiměly, že svolila k operaci; ačkoli jí i příbuzným velké nebezpečí narkosy sděleno bylo, přála si raději zemřít nežli nesnesitelné bolesti déle trpěti.

Přijmul jsem ji na svou kliniku oční do všeobecné nemocnice a dal ji fotografovati, jak na tab. I. obraz 1. ji věrně ukazuje.

Operaci předsevzal jsem 28. února r. 1884 v přítomnosti svého auditoria za výtečné assistence tehdejšího assistenta mého Dra. Deyla, který převzal vedení velenebezpečné narkosy.

Obvedl jsem roh cirkularním řezem, při čemž jsem ovšem vnitřní skoro třetiny obou víček odstraniti musil; krvácení bylo silné a četné tepny musil jsem podvazovat. Mělo-li býti oko zachováno, musila býti provedena plastika.

Vzal jsem lalok ze středu čela formy nahoře dvojšpičaté, asi jako latinské V· a tím jsem chybějící částky obou víček nahradil na způsob plastiky tak zvané Hasnerovy.

Patientka operaci a narkosu šťastně přestála, vše zhojilo se per primam a 10. den po operaci mohla býti propuštěna domů; radovala se náramně z výsledku skvělého a byla zbavena všech bolestí.

Než mou kliniku opustila, dal jsem ji opět fotografovati, jak lze viděti na obraze 2.

Exstirpovaný roh měl délku 50 *mm* a měl na základě průměr 35 *mm*, byl kuželovitý, něco málo na zad zahnutý, ryhovaný, barvy temně hnědošedé, na hoření části rohovitě tvrdý.

Zkusil jsem injekci cev na zpodině karminovou gelatinou, která se však jen částečně povedla.

Velkou obtíž mi způsobilo zhotovení průřezů. Obrátil jsem se na více učenců i lučebníků i histologů i zde i v cizině o laskavé udání, jakým způsobem bych pevnou tu rohovinu změkčiti mohl, aniž bych jemnější strukturu na zpodině porušil, avšak žádný nedovedl mi nic poradit.

Konečně zkoušel jsem to empiricky různými prostředky, až se mně konečně podařilo aspoň část rohu tak změkčiti, že jsem, ovšem s velikou obtíží a napjetím všech technických zručností, potřebné řezy zhotoviti mohl.

Takový průřez při mírném zvětšení ukazuje obraz 3.

Jelikož jsem histologickou strukturu různých kožních rohů svrchu do podrobna vylíčil, mohu se při popisu tohoto průřezu držeti jen zkrátka a zmíniti se pouze o odchylkách, které oproti jiným případům na něm shledáváme.

Především jest nápadné, že papilly jsou štíhlé a náramně dlouhé, mají délku aspoň 20 *mm*.

Dále napadá na první pohled, že roh ten neskládá se ze samých sloupců neb hranolů, jak to u většiny jiných rohů shledáváme, a že takové sloupce jen nepatrně k temeni a na kraji naznačeny jsou.

Dále pak jest nápadná veliká hojnost buněk ostnatých v zoně mezi papillami a nad nimi a nenápadné vnikání klínu do zpodiny.

Dále nápadno jest úplné chybění dřeňových mezerek a všech produktů regressivní metamorphosy.

Veškeré tyto odchylky vysvětluji si neobyčejně rychlým a kyprým vzrůstem tohoto rohu, který od roku 1881—1883, tedy během ne celých tří let vyvinul se z malinkého měkkého papillomku v mohutný roh 50 *mm* délky měřící.

Na zpodině průřezu potkáváme se s nálezem epithelialního carcinomu tvořícího různá hnízda buněk epithelialních ve stromatu vazivovém.

II.

Kožní roh hořeního víčka.

(Keratoma palpebrae superioris, Cornu cutaneum p. s.)

Kalina Antonín, 72 roky starý dělník, dal se přijmouti v květnu r. 1872 do zemského operačního ústavu s oboustranným šedým zákalem (Cataracta senilis).

Byl to stařec poněkud marastický, jinak zdravý, a shledal jsem u něho mimo oboustranné cataracty na první pohled na hořením víčku levého oka kožní roh, který seděl téměř uprostřed přímo pod obočím.

Roh ten byl asi 20 *mm* dlouhý a obnášel v průměru 6 *mm*, tvaru byl válcovitě hranolovitého, dole a nahoře stejně tlustý. Temeno tupé, jako by šikmo uťaté bylo. Celý roh byl něco málo na zad zakřivený, povrch ryhovaný a zvlášť na zadní straně jako roztřepený; barvy byl hnědé. Na obraze 4. jest roh ten v přírodní velikosti vyobrazen.

Patient si rohu, který ho nebolel, nevšímal a k vůli němu pomoci vůbec nevyhledával.

Co se anamnesy týče, udával se vší určitostí, že na tom místě před mnoha lety vyvinula se malá bradavka, kterou několikráte uškrábnul a která často krvácela a vždy zas narostla.

Trvání rohu samého páčí asi na 10 roků.

Patient si nabídnuté odstranění rohu nepřál, poněvadž prý mu to nevadí; dal se však po šťastně přestálé operaci cataracty, když opět dlouho postrádaného zraku nabyl, ode mne přemluvit a roh před propuštěním z ústavu vyříznouti.

Operace byla velmi jednoduchá. Růžek jsem povytáhl poněkud do výšky a nůžkami zakřivenými i s kouskem kůže, z které vyrůstal, vyřízl. Dosti značné krvácení ustalo po zavedení tří stehů a rána se per primam zahojila.

Zdali následovala recidiva čili nic, nevím, poněvadž patient odešel do svého domova a nikdy víc jsem o něm neslyšel.

Obraz 5. ukazuje nám dosti nesnadně zhotovený průřez téhož růžku.

Na zpodině vidíme do něho zabíhat zvětšené papilly a mezi ně vnikají do hloubi klíny buněk epidermoidalních.

Celý roh skládá se dále ze samých sloupců, které od základu až k temenu jsou téměř stejného průměru a tím podmiňují válcovitý tvar rohu celého.

Mezi sloupci shledáváme četné dřeňové mezerky naplněné produkty regressivní metamorphosy hroudovité amorphní hmoty, a molekularní detritus, degeneraci tukovou jsem nikde nepozoroval. Kůra celého rohu se od sloupců ve vnitru poněkud liší, epidermoidalní zrohovatělé ploténky jsou poněkd delší, ve skupiny sestavené a jako roztřepené, tak že tím povrch rohu stává se drsným.

III.

Papillom rohový víčka.

(Keratopapilloma palpebrae.)

Malý tento nádoreček vyřízl jsem roku 1869 z doleního víčka jednoho staršího kollegy. Pan kollega si ho příliš nevšímal a nevěděl nic jiného o původu udat, leč že trval již více let.

Nádorek byl asi 6 *mm* vysoký a měl taktéž 6 *mm* v průměru, byl hvězdovitě rozvětvený, velmi tvrdý, jednotlivé větévky špičaté, barvy byl hnědé.

Operace byla velmi jednoduchá. Nádorek jsem nůžkami vyřízl a ránu mírně poleptal, poněvadž p. kollega si steh nechtěl dát zavésti. Zhojení bylo hladké, recidiva žádná. Roku 1886 operoval jsem zcela podobný nádorek ambulantně na své klinice v nemocnici; scházejí mi však o něm bližší data a injekce cev se tak skvěle nezdařila, pročež přidržuji se případu prvého.

Obraz č. 6. ukazuje nám průřez téhož nádorku, kterého cévy úplně injikovat se mi nepodařilo.

Struktura jest velmi jednoduchá; vidíme v dosti sporém stromatu vazivovém komplikovaně rozvětvený stromek cev, který papillami všude končí.

Okolo těchto papill vidíme buňky částečně cylindrické, částečně kubické, pak přijdou buňky ostnaté a na peripherii vřetenovité. Mohutnou kůru celý nádorek stejnoměrně pokrývající tvoří vrstva úplně zrohovatělých buněk epidermoidalních.

Jak na první pohled vidno, tvoří tento nádorek přechod mezi papillomy a kožními rohy. Kdyby byly papilly zůstaly pospolu a nebyly by se rozsochatě rozvětvily a rozstoupily, měli bychom před sebou kožní roh.

Můžeme tedy nádorek ten považovati za hvězdovitě rozvětvený kožní růžek.

Jsou při něm titíž faktorové činni, které jsme viděli při líčení histogenesy, že tvoří rohy kožní, totiž bujení papill a eventuelně rozvětvování se jich bujením epidermoidalních buněk a brzké a vydatné zrohovatění jich.

Navrhuji pro tyto nádorky jméno keratopapilloma, které jak vlastnost jich tak genesu, jak myslím, nejlépe naznačuje.

Rohy kožní rozsochatě rozvětvené, jak jsme je z počátku uvedli a malý fibrokeratom, který Unna (l. c.) popisuje a tab. VIII. fig. 3. vyobrazuje, který rozbíhá se na temeni ve tři větve, tvoří přechody mezi keratomy a keratopapillomy.

Vysvětlení obrazů.

Obraz 1. ukazuje nám patientku s kožním rohem půlměsíčité řasy oka (Keratoepithelioma plicae semilunaris), než byla přijata na mou kliniku oční dle fotografie.

Obraz 2. ukazuje tutéž paní po provedené na ní operaci, než byla z mé kliniky propuštěna, rovněž dle fotografie.

Obraz 3. ukazuje nám průřez téhož rohu mírně zvětšený, při čemž však podotknouti musím, že histologické elementy, totiž epidermoidalní buňky a jich derivaty, kreslil jsem úmyslně, hledě k nepatrnému zvětšení celého předmětu nepoměrně velké a většímu zvětšení odpovídající.

Tomu však, chtěl-li jsem podati obraz přehledný a povšechně srozumitelný, nebylo lze se vyhnouti, jelikož by jinak, kdybych při daných rozměrech byl kreslil dotyčné buňky přiměřeně veliké, byly by to bývaly nepatrné tečky, na kterých by nebylo bývalo lze naznačit ani tvar, ani poznenáhlé přeměny; kdybych pak naopak byl kreslit chtěl buňky v přiměřeném poměru k celku, byl by obraz musil nabyti rozměrů obrovských, neb by se byl musil počet tabul nepřístojně rozmnožit, což oboje provésti nebylo by lze.

Veškeré ostatní poměry jsou vyobrazeny přesně dle přírody. Vidíme zde obrovské štíhlé papilly, na zpodině hnízda buněk tvořící epithelialní carcinom.

Obraz 4. ukazuje nám oko a víčka patienta s kožním rohem hořeního víčka (Keratoma palpebrae superioris) v přirozené velikosti.

Obraz 5. Průřez téhož růžku úplně dle přírody kreslený, mírně zvětšeny.

Obraz 6. ukazuje nám průřez rohového papillomu (Keratopapilloma palpebrae) věrně dle přírody kreslený, 60krát zvětšený.

ÜBER EINIGE SELTENE
KERATOME DES AUGES
(KERATOMA, KERATOEPITHELIOMA UND KERATOPAPILLOMA).

VON

PROF. D^R. J. SCHÖBL.

Einleitung.

Hauthörner, Cornua cutanea (Keratoma, Keratosis circumscripta) verschiedener Grösse und Gestalt finden sich, wenn auch selten, an den verschiedensten Theilen des menschlichen Körpers und mancher Thiere. Ihre Länge schwankt zwischen 1—250 *mm*, ihr Durchmesser zwischen 1—60 *mm* und ihre Gestalt ist in der Mehrzahl der Fälle entweder cylindrisch, prismatisch oder kegelförmig.

Ausgezeichnete derartige Fälle beschreibt z. B. Rindfleisch [1] aus der Sammlung der Universität Bonn, von denen eines 9″ lang, cylindrisch und widderhornartig gekrümmt, das andere 2″ lang und kegelförmig war. Leider fehlen über diese seltenen Gebilde alle näheren Angaben. Auch Lebert [2] beschreibt ein sehr seltenes dreizinkiges Horn vom Kopfe eines Lastträgers. Auch auf unserer chirurgischen Klinik in Prag wird ein solches Prachtexemplar aufbewahrt, welches ich durch die Freundlichkeit meines verehrten Collegen des Herrn Prof. Maydl, Vorstandes derselben Klinik, untersuchen durfte. Es entwickelte sich von der Ohrmuschel eines 87jährigen Juden; war stumpf, kegelförmig, etwas schraubenartig gedreht von Gestalt, 9 *cm* lang, an der Basis $4^1/_2$ *cm* im Durchmesser. Auch Bergh [3] beschreibt aus der Sammlung des pathologischen Museums von Kopenhagen ein schönes Horn ohne nähere Angaben. Die Consistenz der Hauthörner pflegt gewöhnlich sehr hart zu sein, die Farbe braun, schwarz, seltener melirt. Der Zahl nach findet man entweder ein einziges oder deren mehrere; so beschreibt Lebert [4] vom behaarten Theile des

---

[1] Rindfleisch, Pathologische Geweblehre 6. Aufl. 1886, pag. 329.
[2] Lebert, Über Keratose 1864, pag. 72.
[3] Bergh, Fälle von Hauthörnern, Archiv für Dermatologie und Syphilis B. V. p. 185.
[4] Lebert, l. c.

Kopfes eines Menschen 7 Hauthörner, Textor[5] sah neben einem grossen Horne 7 kleinere sich entwickeln, Cruweilhier[6] beobachtete rings um die Brustwarze einer Frau einen ganzen Kranz von kleinen Hauthörnern.

Was die Lage der Hauthörner anbelangt, so finden sich dieselben am häufigsten am Kopfe, und zwar am häufigsten am behaarten Theile desselben, seltener auf der Stirn, der Schlafe, der Wange, der Nase, dem Ohre, am seltensten am Augenlied. Innerhalb der Liedspalte wurde vor meinem Fall noch kein einziges beobachtet. Relativ häufig finden sich Hauthörner an den männlichen Genitalien. Selten an den Gliedmassen oder am Rumpfe.

Historische Daten über Hauthörner bei Thieren.

Die älteste verlässliche Angabe finden wir bei Malpighi,[7] welcher am Halse eines Rindes ein 6″ langes Hauthorn beobachtete und dem Museum Curiosorum Aldrovandi's einverleibte.

Brechet fand ein mehrere Zoll langes Hauthorn am Halse eines alten Hahnes. Ausserdem wurden wiederholt Hauthörner beobachtet bei Pferden, beim Hornvieh, bei Schafen, bei Ziegen und Hunden. Nur ein einzigesmal bei einer Katze (Valisnieri) und bei einem Hasen (Bartholin). Je ein Hauthorn bei einem Papagei und einem Zeisig findet sich im path. Museum zu Breslau. Diese Fälle sind sehr fleissig gesammelt und zusammengestellt in den Arbeiten von Kitt,[8] Nörner,[9] Hutyra[10] und Lebert.[11]

Hauthörner bei Menschen ausserhalb des Auges und seiner Adnexa.

Die erste Beobachtung über ein Hauthorn stammt bereits aus dem dreizehnten Jahrhundert von Lanfrancus,[12] welcher mehrere ziegenhornartige Hauthörner vom Kopfe eines Mannes beschreibt.

Ähnliche Angaben finden wir bei Aldrovandus[13] und Schenkius.[14] Lebert[15] hat mit besonderem Fleisse aus älterer Zeit 110 Fälle von Hauthörnern beim Menschen gesammelt und zusammengestellt, und zwar 25 am behaarten Theile des Kopfes, 11 auf der Stirn, 4 auf der Schläfe, 8 auf der Wange, 2 auf der

---

[5] Textor, Würzburger Verhandlungen B. I. p. 132.
[6] Cruveilhier, Traité d'Anatomie pathologique générale T. III. p. 930.
[7] Malpighi, Opera omnia T. II. p. 213.
[8] Kitt, Münchener Jahresbericht 1884—85, p. 70.
[9] Nörner, Schweizer Archiv für Thierheilkunde B. XXIY, p. 57.
[10] Hutyra, Oesterreichische Zeitschrift für Veternaerkunde I. p. 132.
[11] Lebert l. c. p. 58.
[12] Lanfrancus, Chirurgiae maioris. Tractatus 3, cap. 3.
[13] Aldrovandus, Monstrorum historia p. 126.
[14] Schenckius de Grafenberg, Observationes medicae de capite humano. Basil. 1584.
[15] Lebert l. c. p. 6.

Nase, 8 auf den Lippen, 1 auf der Schulter, 1 am Arme, 1 am Vorderarme, 5 auf der Hand, 6 auf der glans penis, 2 am Scrotum, mehrere Hauthörner auf einem Körpertheile 4mal, mehrere Hauthörner in verschiedenen Gegenden des Körpers 8mal. In einigen Fällen konnte der Standort nicht ermittelt werden; weitere 25 Fälle hat Hessberg [16] zusammengestellt. Ausserdem hat Siebold [17] einen schönen Fall beschrieben und abgebildet von der glans penis; ebenso Demarquay [18] von der Schulter. Pancost [19] beschreibt ein Hauthorn, nach dessen Entfernung sich ein Carcinoma epitheliale entwickelte. Hebra [20] sah trotz seines kolossalen Materiales nur 2 Fälle. Bergh [21] beschreibt gleichfalls 2 Fälle, Unna [22] drei kleine Hauthörnchen.

Cornua cutanea der Augenlieder.

Hauthörner auf den Augenliedern gehören zu den grössten Seltenheiten. Den ältesten Bericht über ein solches Horn finden wir bei Ammon [23] aus dem Jahre 1839. Es war eine alte Patientin Strohmeyer's, auf deren Liede ein kleines Hauthorn sass, welches der betreffende Arzt durch diverse Laxantien zu bekämpfen sich bestrebte. Über die weiteren Schicksale dieses Falles is nichts bekannt.

Den zweiten Fall beobachtete Ammon selbst. Es handelte sich um ein kleines Horn am Rande des Oberliedes, welches Ammon mit der Schere excidirte und die Wunde cauterisirte, worauf Heilung eintrat. Dieses Horn entwickelte sich aus einer Warze.

Den dritten Fall berichtet gleichfalls Ammon, es handelte sich um eine 50jährige Frau, bei der sich am Oberliede gleichfalls aus einer Warze ein derartiges Horn entwickelte. Die Patientin wurde jedoch nur flüchtig beobachtet und ihre weiteren Schicksale bleiben dem Forscher unbekannt. Ein weiterer Fall wurde von Fronmüller[24] mitgetheilt. Hier war es ausnahmsweise ein 50jähriger Mann, bei dem sich am Oberliede gleichfalls aus einer Warze ein Horn entwickelte, welches einen Zoll lang und federkieldick war. Es wurde von Fronmüller operirt und es trat keine Recidive auf.

---

[16] Hessberg, Beitrag zur Kenntniss der Hauthörner von Menschen u. Thieren. Inaug.-Dissert. Göttingen 1869.

[17] Siebold C. C., Ephemer. nat. curiosos VI. p. 234. 1778.

[18] Demarquay, Un. med. XVII. p. 235, 1863.

[19] Pancoast, Archiv für Dermat. & Syphilis III. p. 126, 1871.

[20] Hebra & Cohn in Virchows Handbuch für Path. & Therap. III. B. p. 27, 1870.

[21] Bergh, l. c.

[22] Unna, Das Fibrokeratom, Deutsche Zeitschrift für Chirurgie B. XII. pagina 267, J. 1879.

[23] Ammon, Monatschrift für Medicin, Augenheilkunde & Chirurgie v. Ammon. Band III. p. 3, 9, 2, J. 1840.

[24] Fronmüller, Journal für Chirurgie & Augenheilkunde v. Walther & Ammon. B. II. p. 178, J. 1843.

Eine ähnliche, leider nur flüchtige Beobachtung finden wir bei dem berühmten französischen Chirurgen Nelaton.[25] Szokalski[26] beobachtete gleichfalls ein Hauthorn am Liedrande. Soelberg-Wells[27] sah ein derartiges Horn, welches gut einen Zoll lang und federspulendick und spiralig gewunden war, am Unterliede. Die Abbildung dieses Hornes wurde von Michel[28] reproducirt. Nach Berghs[29] Angabe hat ein junger Oculist in Odense gleichfalls ein etwa $^1/_2$ Zoll langes Horn operirt, welches sich aus einer Warze am Oberliede eines 19jährigen Mädchens entwickelt hatte.

Henry Shaw[30] beobachtete am Oberliede eines 3jährigen Kindes ein Hauthorn, nach dessen Entfernung zwei neue wuchsen, und Reymond[31] sah nach Entfernung einer Warze am Liede an derselben Stelle ein Horn wachsen. Chisolm[32] endlich sah an der Stelle einer vom Liede entfernten Cyste im Laufe von 10 Jahren ein Horn wachsen, welches etwa 1 Zoll lang war und dem Sporne eines Hahnes ähnlich sah. Ich selbst sah am Oberliede eines alten Mannes ein Hauthorn, welches ich weiter unten genauer beschreiben werde, und ein zweites, welches sich aus einem Papillom der halbmondförmigen Falte bei einer alten Frau entwickelte, und das ich gleichfalls als Unicum später schildern werde.

Pseudocornua cutanea.

Falsche Hauthörner oder Pseudokeratome beobachtet man mitunter als wahren Hauthörnern ähnliche harte Gebilde, welche sich auf epithelialen Carcinomen entwickeln und zuweilen eine beträchtliche Grösse erreichen. Sie bestehen aus vertrockneten Krusten und diversen Producten regressiver Metamorphose. Sie unterscheiden sich von wahren Hauthörnern dadurch, dass ihre Consistenz nie so fest ist, ihre Oberflache nie so glatt ist, und dasss sie verhältnissmässig leicht abreissen oder abbröckeln.

Ähnliche Pseudocornua cutanea werden nach Lebert's[33] Angabe auch bei Scabies norvegica beobachtet, und zwar von Bandeloque, Danielsen und Boeck.

Ich selbst beobachtete im Jahre 1865, als ich die Klinik des verstorbenen Herrn Prof. Hasner supplirte, ein derartiges Gebilde, welches auf den ersten Blick ungemein einem kleinen Hauthorne glich. Es war etwa 8 *mm* lang und 2 *mm* im Durchmesser und stand am unteren Liedrande eines 8jährigen Mädchens. Nach Exstirpation zeigte sich, dass dieses Gebilde aus einigen verwach-

---

[25] Nelaton, Elements de pathologie chirurgicale p. 388, J. 1844.

[26] Szokalski, Annales d'oculist. LIII. p. 209, 1865.

[27] Soellberg-Wells a treatise on the diseases of the eye p. 736, 1870.

[28] Michel in Graefe Saemisch Handbuch B. IV. p. 187.

[29] Bergh l. c. 187.

[30] Henry Shaw Case of cutaneus horn of the eyelid; Boston med. and surg. Journal 1869.

[31] Raymond, Osservazione di producione cornea sulla palpebra Giornale de academia medicina di Torino 1871.

[32] Chisolm, Virginia medical monthly p. 261, 1877.

[33] Lebert, l. c. p. 62.

senen Cilien bestand, zwischen denen sich Granulationsgewebe mit zahlreichen neoplastischen Blutgefässen befand, und welches von einer harten Epidermisdecke umgeben war; es musste somit als eine Art von plica polonica betrachtet werden. Leider gieng mir dieses Präparat nebst vielen anderen äusserst seltenen im Kriegsjahre 1866 verloren.

Histologie und Histogenese der Hauthörner.

Hauthörner sind Neoplasmen, welche auf einer atypischen Wucherung der Epidermoidalzellen und einer Inclination derselben zu frühzeitiger Verhornung beruhen.

Der histologische Befund ist demgemäss bei normalen Hauthörnern ein sehr einfacher. Wir finden in ihnen gewöhnlich zahlreiche hypertrophische, gewöhnlich sehr verlängerte, oft vielfach verästelte Papillen, welche von einem sehr spärlichen bindegewebigen Stroma getragen werden.

Die Papillen sind gewöhnlich von einer Schichte cylindrischer Zellen bekleidet, dann folgt eine mehr oder weniger mächtige Schichte von Stachel- oder Riffzellen, welche gegen die Peripherie zu allmälig spindelförmig werden, endlich das Protoplasma und im Kerne verlieren, verhornen und als verhornte Epidermoidalplättchen die Rinde des Hornes bilden. Erfolgt die Verhornung der Epidermoidalzellen verhältnissmässig bald, so entsteht ober jeder Papille oder Papillengruppe eine fingerhutartige Kappe von verhornten Zellen, welche durch den fortschreitenden Vermehrungs- und Verhornungsprocess stets mächtiger und mächtiger in die Höhe wächst und so über jeder Papille oder Papillengruppe einen in die Höhe strebenden Cylinder oder ein Prisma von verhornten Zellen bildet, welche zusammenn das Ganze Hauthorn bilden.

Am Längsschnitt solcher Hauthörner erblicken wir deshalb lauter Wellenlinien, deren Wellenberge den Gipfeln der Papillen, deren Wellenthäler den Vertiefungen zwischen denselben entsprechen.

Auf diesem Entwickelungsmomente beruhen meiner Ansicht nach die beiden definitiven Grundformen der Hauthörner, die cylindrische und die kegelförmige.

Bei Hauthörnern, welche sehr langsam wachsen, bei denen dagegen der Verhornungsprozese verhältnissmässig sehr bald eintritt, ist die Schichte der Stachelzellen eine sehr wenig mächtige, und die ober den Papillen die betreffenden Kappen bildenden verhornten Zellen haben bei dem langsamen Wachsthumsprocesse hinlänglich Zeit zur weiteren Entwickelung, sie werden stets flacher, ohne in den übrigen Dimensionen viel zu verlieren; in Folge dessen werden die Wellenlinien auf den betreffenden Längsdurchschnitten solcher Hauthörner immer flacher und flacher; Wellenberge und Wellenthäler werden wohl stets niedriger; aber weil die Zellen im Querdurchmesser wenig oder nichts verlieren, bleibt über jeder Papille oder jeder Papillengruppe ein Cylinder oder ein Prisma von verhornten Zellen von stets sich gleich bleibendem Durchmesser, und da das ganze Horn aus der Summe dieser Cylinder oder Prismen

zusammengesetzt wird, so muss es nothwendigerweise eine cylindrische oder cylindrischprismatische Gestalt annehmen. Solche Hauthörner endigen am Gipfel stets stumpf oft sieht es aus, als ob sie abgehackt worden wären. Ein solches Hauthorn nach meiner Beobachtung habe ich auf Figur 5 abgebildet.

Anders verhält sich die Sache, wenn ein Hauthorn sehr rasch wächst und der Verhornungsprocess verhältnissmässig langsam eintritt. In einem solchen Falle entwickelt sich ober den Papillen und zwischen denselben eine sehr mächtige Schicht zu Stachelzellen, welche jedoch, da sie zur Ausbreitung Raum genug besitzen, nicht so tiefe Epithelzapfen zwischen den Papillen in die Tiefe treiben, und auch nicht so typisch ausgesprochene Kappen ober den Papillen oder Papillengruppen bilden. Die Stachelzellen werden ganz allmälig, je weiter sie von Papillen entfernt werden, mehr und mehr spindelförmig von Gestalt, und da sie zumeist die Longitudinalrichtung bewahren, muss sich, da sie im transversalen Durchmesser stets abnehmen, das ganze Horn allmälig zuspitzen und eine kegelförmige Gestalt annehmen. Ein solches Horn nach meiner Beobachtung zeigt Figur 3.

Es ist selbstverständlich, dass dies nur für die beiden Hauptformen von Hauthörnern gemeint ist und dass es, wie in Allem in der Natur, Übergangsformen gibt, welche sich bald diesem, bald jenem Typus nähern.

In alten, langsam wachsenden Hauthörnern finden wir mitunter ausser den bereits angeführten Gewebselementen Markräume, welche mit Producten, regressiver Metamorphose angefüllt sind und zwischen den oberwähnten Zellencylindern oder Prismen angetroffen werden. Gewöhnlich finden wir in ihnen amorphe schollenartige Massen, und molekulären Detritus. Schon Simon[34] und Virchow[35] haben diese Markraumbildungen in Hauthörnern beobachtet. Lebert[36] will in ihnen Fettmassen gefunden haben, was jedoch anderweitig nicht bestätigt wurde.

In meinem auf Figur 5. abgebildeten Falle sind die Markräume angedeutet.

Was die Histogenese der Hauthörner anbelangt, so habe ich die Überzeugung, dass die allermeisten derselben, wenn nicht alle aus präformirten Papillen, eventuell aus Warzen oder papillomatösen Excrescenzen, durch weitere Wucherung derselben und durch atypische Wucherung junger epidermoidalen Zellen und rascher Verhornung derselben entstehen.

Ich halte es somit für wahrscheinlich, dass in den meisten Fällen sich Hauthörner aus Warzen oder Papillomen entwickeln, wenn dieselben, sei es durch eine uns noch unbekannte Ursache oder durch fortwährende Reizung zu weiterer Entwickelung angeregt werden, wobei die Papillen sich verlängern, eventuell verzweigen und das junge epidermoidale Zellgewebe atypisch wuchert und an der Peripherie rasch verhornt. Es wäre nicht unwahrscheinlich sich zu

---

[34] Simon, Die Hautkrankheiten, Berlin 1848, p. 38.
[35] Virchow, Würzburger Verhandlungen 1855.
[36] Lebert l. c.

denken, dass die langsam wachsenden cylindrischen Hauthörner sich aus Warzen, die rasch wachsenden kegelförmigen sich aus papillomatösen Gebilden entwickeln könnten, wie es bei beiden von mir beobachteten Fällen der Fall war.

Ich habe überdies in meiner reichhaltigen Sammlung ein kleines, sehr hartes papillomartiges Gebilde, welches ich vom Unterliede eines älteren Collegen im Jahre 1870 exstirpirt und sorgfältig injicirt habe, welches sozusagen den Übergang zwischen Papillomen und Hauthörnern bildet; man könnte es leicht als ein kleines morgensternförmiges Hauthorn auffassen, ich will es als Keratopapilloma bezeichnen und zum Schlusse dieser Arbeit genauer schildern und abbilden.

Ich glaube, dass die grosse Mehrzahl der Forscher mit dieser meiner Ansicht übereinstimmen wird. Schon Malpighi[37] war derselben Ansicht, ebenso Rindfleisch,[38] Unna[39] und Virchow.[40] Selbst Lebert,[41] welcher den glandulären Ursprung der Hauthörner so eifrig favorisirt, konnte nicht leugnen, dass in der grossen Mehrzahl der von ihm so fleissig zusammengestellten Fälle von Hauthörnern constatirt werden konnte, dass dem betreffenden Horn eine Warze oder eine warzenartige Neubildung vorangieng. So in seinen Fällen Nr. 2, 5, 6, 12, 13, 15, 19, 26, 29, 35, 37, 40, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 56, 57, 58, 65, 70, 99, 102 und 105.

Die Einwendungen, welche Lebert und Andere gegen den papillären Ursprung von Hauthörnern machen, dass nämlich viele derselben sich aus Atheromcysten entwickeln, ist nicht stichhältig, weil es bekannt ist, dass in Atheromcysten oft eine sehr üppige Papillenwucherung vorkommen kann, wie es bereits Rindfleisch[42] angegeben hat, und ich selbst wiederholt zu beobachten Gelegenheit hatte.

Auch die Angabe Lebert's, dass sich Hauthörner auf Narben entwickelt hätten, ist in dieser Richtung nicht stichhältig, denn einestheils liegen hierüber keine exacten Beobachtungen vor, anderntheils kann nicht mit Bestimmtheit behauptet werden, dass sich am Granulationsgewebe nicht Papillen oder papillenartige Gebilde entwickeln könnten. Ich besitze in meiner Sammlung einen äusserst seltenen Tumor mixtus, den ich aus der Orbita eines 4jährigen Knaben auf meiner Klinik exstirpirt habe, und welcher mehr als pomeranzengross war und dessen Injection mir nach der Exstirpation vollkommen gelang. Der Tumor war der Hauptmasse nach ein Gliosarcom, doch fanden sich in demselben auch mächtige Schichten glatter Muskelbündel; ausserdem war derselbe von sehr zahlreichen Blutgefässen durchsetzt, welche theilweise Wundernetze bildeten, theils Divertikelbildungen zeigten, wie ich sie in der Rachenschleimhaut nackter Amphibien beschrieben habe. Dieser polymorphe Tumor war an einem

[37] Malpighi l. c.
[38] Rindfleich l. c.
[39] Unna l. c.
[40] Virchow l. c.
[41] Lebert l. c.
[42] Rindfleisch l. c. p. 330.

grossen Theile seiner Oberfläche mit schönen Papillen bedeckt, zwischen denen an einzelnen Stellen carcinomartige Epithelzapfen in das Innere desselben eindrangen. Wenn es also möglich ist, dass sich auf einem malignen Tumor Gebilde entwickeln, die von den schönsten normalen Papillen nicht zu unterscheiden sind, so muss auch die Möglichkeit zugegeben werden, dass sich eventuell derartige Gebilde am Granulationsgewebe ausbilden könnten.

Der Einwand, welchen Bädge [43] gegen den papillären Ursprung der Hauthörner macht, weil er in zwei Fällen die Papillen unterhalb derselben unverändert oder sogar comprimirt fand, ist gleichfalls unberechtigt, und kann umsoweniger, wie Bädge es thut, für alle Fälle generalisirt werden.

Die Theorie von Auspitz [44] dagegen, welcher die Papillen bei der Bildung der Hauthörner und anderwärts zu absoluter Passivität verurtheilt, muss als geistreich und seine Arbeit als gediegen bezeichnet werden.

Auf Grundlage seiner Beobachtungen über die Papillenbildung im foetalen Leben durch Eindringen der Epidermiszapfen in die Tiefe glaubt Auspitz berechtigt zu sein zu behaupten, dass auch bei pathologischen Processen die Papillen nicht activ sich vergrössern oder verzweigen, sondern dass die betreffenden Veränderungen an denselben lediglich durch Hineinwucherung von Epidermiszapfen hervorgebracht werden. Auspitz betrachtet sämmtliche Neoplasmen, die uns hier interessiren, ausschliesslich als Wucherungen epidermoidaler Zellen, und unterscheidet

1. Keratosen, zu denen er das Cornu cutaneum, die Schwiele, den Clavus und die Ichtyose rechnet, und bei denen die Papillen seiner Angabe nach durchaus unverändert bleiben sollen; und

2. Papillome, wohin er Warzen, Condylome und Epitheliome rechnet, bei denen die Papillen in passiver Weise durch Hineinwuchern von Epidermiszapfen verlängert und ramifizirt werden sollen.

Obgleich diese Theorie viel Verlockendes für sich hat und sich an die foetale Entwickelung der Papillen anlehnt, und für einzelne Fälle zutreffend sein dürfte, so ist dieselbe dennoch einseitig und zu sehr exclusiv.

Was zunächst die Hauthörner anbelangt, welche uns hier vor allem interessiren, so behauptet Auspitz, dass die Papillen in denselben gänzlich unverändert, wenn nicht gar durch Druck comprimirt erscheinen. Diese Angabe ist vollkommen falsch und kein unbefangener Beobachter wird mit derselben übereinstimmen, namentlich, wenn er ein injicirtes Cornu cutaneum gesehen haben sollte. Wir sehen vielmehr in allen Fällen, welche bis jetzt in dieser Hinsicht mit genügender Exactheit untersucht worden sind, die Papillen verlängert, oft kolossal verlängert, manchmal schlank und einfach, ein andermal vielfach verästelt. Ein einziger Blick auf meine beigefügten Abbildungen gibt hierüber ein

---

[43] Bädge, Zur Casuistik multipler Keratosen. Deutsche Zeitschrift für Chirurgie B. VI. Jahrg. 1876.

[44] Auspitz, Über das Verhältniss der Oberhaut zur Papillarschicht, Archiv für Dermatologie & Syphilis B. II. J. 1870.

klares Bild; und auch Rindfleisch,[45] Birch-Hirschfeld,[46] Michel[47] und Andere machen dieselben Angaben.

Aber auch was die Papillome anbelangt, kann ich mich nicht, wenigstens nicht für alle Fälle mit der Auspitz'schen Theorie befreunden. So besitze ich in meiner Sammlung ein prachtvolles, im wahren Sinne des Wortes praecorneales Papillom, welches nur von einem geringen Theile des Limbus ausgeht und sonst die ganze Hornhaut bedeckt, haselnussgross ist, und eine äusserst complicirte Ramification zeigt.

Es ist für uns geradezu undenkbar, wie an einer solchen Stelle sich ein complicirtes und grosses Papillom nach der Hypothese von Auspitz entwickeln sollte.

Die Theorie Unna's[48] über die Histogenese der Hauthörner ist so ziemlich identisch mit der Theorie, welche Auspitz für die Papillome angibt. Auf Grundlage von vier beobachteten Hauthörnchen beschreibt Unna die Bildung derselben, namentlich der in ihnen enthaltenen papillomartigen Gebilde ähnlich wie Auspitz in passiver Weise durch allmäliges Vordringen von Epidermiszapfen gegen und in dieselben.

Unna nennt die von ihm beobachteten 4 Hauthörnchen Fibrokeratome, weil sie sich aus ursprünglichen kleinen Fibromen entwickelt haben sollen. Ohne an der Richtigkeit der Beobachtung Unna's im geringsten zweifeln zu wollen, glaube ich, dass gegen dessen Ansicht dieselben Einwendungen gemacht werden können, wie gegen die Theorie von Auspitz; übrigens ist Unna selbst nicht in den Fehler Bädge's verfallen, seine Beobachtung generalisiren zu wollen, und gibt für andere Fälle den papillären Ursprung der Hauthörnern zu. Die Theorie Krämer's,[49] welche die Hauthörner nicht direct tangirt, sondern nur Warzen und Condylome, will ich nur flüchtig erwähnen. Nach Krämer würden diese Gebilde als mechanische Hervordrängung der Gewebe zu betrachten sein, welche Ansicht wohl wenige Anhänger finden dürfte. Was endlich die glanduläre Theorie anbelangt, dass nämlich sich Cornua cutanea aus Talgdrüsen oder Schweissdrüssen oder deren Derivaten entwickeln sollten, so wurde dies bereits von Home[50] am Ende des vorigen Jahrhundertes behauptet, und es fand diese Theorie in neuerer Zeit in Lebert[51] einen sehr eifrigen Vorkämpfer. Lebert unterscheidet eine primäre glanduläre Keratogenese, wo sich das Hauthorn unmittelbar durch Hyperplasie der die Drüsengänge auskleidenden Zellen entwickeln soll, und eine secundäre glanduläre Keratogenese, wobei sich Hauthörner aus atheromatösen Cysten entwickeln sollen. Gegen die primäre glandul. Keratogenese Lebert's lässt sich einwenden, dass sich in

---

[45] Rindfleisch l. c.

[46] Birch-Hirschfeld, Lehrbuch der allgemein. pathologischen Anatomie 4. Auflage, pag. 170.

[47] Michel l. c.

[48] Unna l. c.

[49] Krämer, Über Condylome und Warzen. Göttingen 1847.

[50] Home, Philosoph. Transact. V. LXXXI. 1791.

[51] Lebert l. c. p. 77.

der ganzen Literatur kein einziger exact beobachteter histologischer Befund vorfindet, welcher sie stützen würde.

Die einzige, oft citirte Beobachtung Virchow's, dass an einem Hauthorne an der Basis Epithelzapfen gefunden wurden, welche in die erweiterten Ausführungsgänge von Talgdrüsen passten, ist nicht stichhältig, sondern es ist wahrscheinlich, dass in diesem Falle umgekehrt die Epithelzapfen activ gewuchert und in die betreffenden Ausführungsgänge hineingewachsen sind und dieselben erweitert haben. Die Einwendungen gegen die secundäre glanduläre Keratogenese Lebert's haben wir schon früher angeführt. Nachdem wir hiemit sämmtliche Theorien der Histogenese der Hauthörner oder der Keratogenese kritisch beleuchtet haben, kommen wir wieder zu der bereits oben ausgesprochenen Ansicht, dass die meisten derselben, wenn nicht alle, durch active Betheiligung und Wucherung der Papillen, sowie durch atypische Wucherung der Epidermoidalzellen und Verhornung derselben zu Stande kommen.

Complicationen der Hauthörner.

Cornua cutanea sind am häufigsten complicirt mit epithelialen Carcinomen und zwar an der Basis derselben. Diese Complication ist so häufig, dass sie bei den von Lebert zusammengestellten Fällen volle 12% beträgt.

Auch das von mir beobachtete Cornu der halbmondförmigen Falte zeigte eine derartige Complication, ebenso wie jenes, welches in der Sammlung unserer chirurgischen Klinik aufbewahrt wird, dessen ich in der Einleitung erwähnt habe. Derartige Complicationen können auf zweifache Art zu stande kommen, entweder ist das Carcinom das primäre, das Hauthorn das secundäre, oder umgekehrt Complicationen der ersten Art, wo auf einem lange bereits bestehenden epithelialen Carcinom sich ein Hauthorn entwickelt, gehören zu den allergrössten Seltenheiten und wurden bisher ausschliesslich am Scrotum und der Glans penis beobachtet.

Wahrscheinlich handelte es sich um Fälle von sogenanntem Carcinoma epitheliale luxurians papilliferum, bei denen die Oberfläche oft mit sehr schönen grossen Papillen bedeckt ist, wie ich sie auch wiederholt beobachtet und injicirt habe.

Complicationen der zweiten Art, wo sich am Grunde alter Hauthörner epitheliale Carcinome entwickeln, kommen viel häufiger zur Beobachtung, doch fast ausschliesslich bei alten Leuten zwischen dem 60—80. Lebensjahre.

Derartig complicirte Cornua cutanea könnten wir am besten mit dem Namen Keratoepithelioma bezeichnen.

Entwickelung und Verlauf der Hauthörner.

Das Wachsthum der Hauthörner pflegt gewöhnlich ein ungemein langsames zu sein, was namentlich bei der cylindrischen u. der prismatischen Form derselben der Fall ist. Gewöhnlich vergehen viele Jahre, bevor sie eine namhafte Grösse erreichen.

Anfangs pflegen sie ganz schmerzlos zu sein und belästigen den Träger derselben nur wenig; sobald sie sich nur einigermassen vergrössern, fangen sie an unangenehm zu werden, schmerzen bei nur sanfter Berührung und können namentlich, wenn sie sich mit Carcinom compliciren, auch spontan oft sehr heftige Schmerzen verursachen. Diese Unannehmlichkeiten und die Verunstaltung, welche sie oft bedingen, ist von der Grösse und dem Sitze derselben abhängig.

Oft kommt es vor, dass Hauthörner von Zeit zu Zeit, oft einigemal des Jahres, abfallen, oder von den Patienten selbst abgebrochen werden; immer jedoch wachsen sie wieder nach ebenso, wenn sie abgesägt werden. In sehr seltenen Fällen kommt es vor, dass sie abfallen, ohne nachzuwachsen, in Folge von Vereiterung des Untergrundes, so dass Spontanheilung eintritt.

Diagnose, Prognose und Therapie.

Die Diagnose der Hauthörner ist sehr einfach und leicht, es können hiebei nur die sogenannten Pseudocornua in Betracht gezogen werden. Die Unterschiede zwischen beiden haben wir bereits oben angeführt.

Die Prognose ist im allgemeinen gut, wenn keine carcinomatöse Complication vorliegt. Die einzige rationelle Therapie ist die radicale Exstirpation derselben.

Es erübrigt noch zum Schlusse die drei Fälle, welche ich selbst beobachtet und operirt habe, etwas genauer zu schildern:

I. Ein Hauthorn der halbmondförmigen Falte.

Keratoepithelioma plicae semilunaris (Cornu cutaneum plicae semilunaris complicatum cum carcinomate epitheliali).

Barbara H., 82 Jahre alte Witwe nach einem Prager Bürger, consultirte mich zum ersten Male im 20./III. 1881 wegen eines chronischen Conjunctivalkatarrhes. Die Patientin war marastisch, sehr schwach und empfindlich, hatte ein starkes Emphysem und litt an asthmatischen Anfällen. Was die Augen anbelangt, so war sie stets gesund, erst im Laufe der verflossenen 2 oder 3 Jahre beklagt sie sich über Thränenfluss, Verklebtsein der Augen und Druck in denselben. Ich fand an beiden Augen einen chronischen Conjunctivalkatarrh, wie er bei alten Leuten so häufig beobachtet wird, mit bedeutender Wucherung des Papillarkörpers in der Conjunctiva der Oberlieder. Die Thränenwege waren beiderseits etwas verengt.

Am linken Auge fand ich ausserdem auf der halbmondförmigen Falte eine kleine papillomatöse Excrescenz von der Grösse einer kleinen Erbse, welche von der Patientin gar nicht beachtet wurde.

Ich wollte die kleine Geschwulst entfernen, was jedoch die äusserst furchtsame und messerscheue Patientin nicht zugab.

Erst im Mai des Jahres 1882 sah ich sie wieder. Der Katarrh des rechten Auges hatte sich gebessert, jener des linken Auges verschlimmert, die papillomatöse Geschwulst auf der Halbmondfalte hatte sich bedeutend vergrössert und

erschien fast 12 *mm* hoch bei etwa 6 *mm* Durchmesser. Da ich nun energisch auf die Beseitigung der Neubildung drang, blieb die Patientin abermals fort, und erst zu Ende des Jahres 1883 wurde ich zu ihr gerufen. Gleich auf den ersten Blick war ich nicht wenig erstaunt und überrascht in der Gegend des inneren Augenwinkels des linken Auges bei derselben Frau ein mächtiges kegelförmiges Hauthorn zu erblicken von circa 40 *mm* Höhe und 30 *mm* im Durchmesser an der Basis. Die Farbe des Hornes war graubraun, die Consistenz sehr fest, hornartig an der Spitze, weich und höckerig an der Basis. Das Horn sass mit seiner Basis theils im innersten Theil der Liedspalte, theils auf dem inneren Theile beider Lieder, theils gegen die Nase zu die Gegend des Ligamentum Canthi interni bedeckend. Das Horn war bei Berührung schmerzhaft und Patientin klagte über heftige spontane Schmerzen, namentlich des Nachts. Die Diagnose war sehr leicht. Es handelte sich um eine äusserst seltene Form des Hauthornes, um ein Unicum von der Halbmondfalte ausgehend, da es wohl nicht dem geringsten Zweifel unterliegen konnte, dass sich das betreffende Horn aus der in den früheren Jahren an dieser Stelle beobachteten papillomatösen Excrescenz entwickelt hat.

Das Horn war ungemein rasch gewachsen, und wenn man die höckerige von Blutgefässen stark durchsetzte Basis, und die grossen spontanen Schmerzen in Betracht zog, konnte man nicht in Zweifel sein, dass es mit epithelialem Carcinom complicirt war; es handelte sich somit um ein Keratoepithelioma plicae semilunaris.

Die nun 84jährige Frau war noch viel marastischer, schwächer und furchtsamer als zuvor und wollte von einer ihr nun dringend empfohlenen radicalen Operation nichts wissen. Seit dieser Zeit behielt ich die Patientin in steter Evidenz, da ich wegen der stets sich steigenden Schmerzen wiederholt zu ihr gerufen wurde. Diese unerträglichen Schmerzen waren es auch, welche sie endlich zu Ende Februar des Jahres 1884 bewogen, sich der Operation zu unterziehen. Doch war eine Operation unter den obwaltenden Verhältnissen ein äusserst gewagtes und gefährliches Unternehmen. Ohne Narkose war die Operation absolut nicht durchzuführen, da der Exstirpation des Hornes eine plastische Operation folgen musste, um die inneren Drittheile beider Lieder zu ersetzen, falls man das intacte Auge erhalten wollte, und eine so schwere und complicirte Operation ohne Narkose hätte die äusserst schwache, furchtsame, messerscheue und nervöse Greisin gewiss nicht ausgehalten; die Narkose aber war bei der bereits oben geschilderten Körperbeschaffenheit der Patientin nicht minder gefährlich. Ich liess die Patientin auf meine Klinik überführen und sie daselbst photographiren. Nach dieser Photographie ist sie auf Figur. 1. dargestellt.

Die Operation selbst habe ich vor meinem klinischen Auditorium am 28. Februar 1884 unter der tüchtigen Assistenz meines damaligen Assistenten Dr. Deyl, welchem die Leitung der äusserst gefährlichen Narkose zufiel, vorgenommen. Nach beendetem Circularschnitt wurde das Horn sammt den inneren Drittheilen beider Lieder exstirpirt und alles Krankhafte theilweise bis auf das

Periost entfernt; die Blutung war eine überaus grosse und zahlreiche Blutgefässe mussten unterbunden werden.

Nach gestillter Blutung schritt ich zur Plastik und nahm den V-förmigen Ersatzlappen aus der Glabella frontis, um damit die fehlenden Theile beider Lieder zu ersetzen nach Art der sogenannten Hasner'schen Plastik.

Die Patientin hatte sowohl die Operation als die Narkose glücklich überstanden und es heilte Alles per primam, so dass dieselbe am 10. Tage nach der Operation aus meiner Klinik entlassen werden konnte.

Bevor sie meine Klinik verliess, liess ich sie abermals photographiren, wie sie dieser Photographie entsprechend auf Fig. 2 dargestellt ist. Das exstirpirte Horn war 50 *mm* lang und hatte an der Basis einen Durchmesser von 35 *mm*, war kegelförmig von Gestalt, die Spitze etwas nach rückwärts zurückgebogen. Die Injection der Blutgefässe desselben gelang mir nur unvollständig.

Sehr grosse Schwierigkeiten bereitete mir die Anfertigung von Durchschnitten durch dieses harte Gebilde, und gelang mir erst nach manchen empirischen Versuchen dieses Horn so weit zu erweichen, ohne dessen Gewebselemente zu alteriren, um daraus zu mikroskopischer Untersuchung brauchbare Durchschnitte anfertigen zu können.

Einen derartigen Durchschnitt habe ich bei mässiger Vergrösserung auf Figur 3 dargestellt. Da ich bereits oben die histologische Structur diverser Hauthörner genau geschildert habe, kann ich mich hier nur kurz fassen, und will nur die Abweichungen gegen andere bekannte Befunde angeben. Vor allem ist in diesem Falle die grosse Schlankheit und Länge der Papillen auffällig; sie messen gut 20 *mm*. Weiter ist auffällig, dass dieses Horn nicht aus lauter cylindrischen oder prismatischen Säulen zusammengesetzt ist, diese vielmehr nur gegen die Spitze zu angedeutet erscheinen; desgleichen der grosse Reichthum von Stachelzellen über und zwischen den Papillen, sowie das verhältnissmässig geringe Eindringen von Zellenzapfen in die Tiefe zwischen die Papillen; und ebenso das fast vollständige Fehlen von Markräumen und Producten regressiver Metamorphose. Alle diese Eigenthümlichkeiten erkläre ich mir durch das ungemein rasche und üppige Wachsthum des Hornes, welches sich im Verlaufe von kaum 3 Jahren aus einer winzigen papillomartigen Excrescenz zu einem mächtigen Hauthorn von 50 *mm* Länge entwickelt sah.

An der Basis sehen wir den charakteristischen Befund eines epithelialen Carcinoms.

II. Ein Hauthorn des Oberliedes, Keratoma palpebrae superioris (Cornu cutaneum p. s.).

K. Anton, 72 Jahre alter Tagarbeiter, wurde im Mai des Jahres 1872 wegen beiderseitiger Cataracta in die unter meiner Leitung stehende königl. böhmische Landesaugenoperationsanstalt aufgenommen.

Es war ein marastischer, sonst gesunder Greis, bei dem ich ausser beiderseitiger Cataracta senilis am Oberliede des linken Auges etwa in der Mitte unter den Augenbrauenbogen ein Hauthorn von etwa 20 *mm* Länge und 6 *mm* Durchmesser vorfand. Das Horn war prismatisch cylindrisch von Gestalt, überall gleich dick, an der Spitze stumpf wie abgehackt, und etwas nach rück-

wärts gekrümmt; braun von Farbe, mit geriefter Oberfläche, und wie zerfranzt. Auf Fig. 4 habe ich dieses Horn in natürlicher Grösse und Stellung abgebildet.

Patient, den das Horn nicht schmerzte und nicht belästigte, suchte deshalb keine Hilfe, ja verweigerte sogar anfangs die Entfernung desselben. Was die Anamnese anbelangt, so gab er mit voller Bestimmtheit an, dass sich an derselben Stelle vor vielen Jahren eine kleine Warze gebildet hat, welche er oft abgekratzt habe und welche mitunter stark blutete und aus der sich dann allmälig das Horn entwickelt habe. Die ganze Dauer der Entwickelung gab er auf ungefähr 10 Jahre an.

Erst nach glücklich überstandener Cataractoperation, nachdem er die jahrelang vermisste Sehkraft wieder erlangt hatte, liess er sich überreden, sich auch das Hauthorn exstirpiren zu lassen. Die Operation war sehr einfach. Das Horn wurde ein wenig in die Höhe gezogen und sammt einer kleinen Hautpartie, auf der es sass, mit einem Scherenschlag abgetragen. Die ziemlich reichliche Blutung stand nach Anlegung von Nähten still und die Heilung erfolgte rasch per primam.

Ob eine Recidive folgte oder nicht, weiss ich nicht, weil ich von dem Patienten nie wieder etwas gehört habe.

Fig. 5 zeigt einen nach Überwindung mancher Schwierigkeiten von diesem Horne angefertigten Durchschnitt bei mässiger Vergrösserung. An der Basis sehen wir ziemlich entwickelte Papillen, zwischen denen Epidermiszellenzapfen in die Tiefe eindringen. Das ganze Horn besteht aus lauter cylindrischen Säulen von gleich bleibenden Durchmesser, zwischen denen zahlreiche Markraumbildungen vorkommen, welche von Producten regressiver Metamorphose angefüllt sind. Die Rinde des Hornes zeigt etwas längere verhornte Epidermisplättchen, welche der Oberfläche selbst ein zerfranztes Aussehen geben.

III. Ein Hornpapillom des Liedes, Keratopapilloma palpebrae.

Dieses kleine Neugebilde habe ich im Jahre 1869 aus dem Unterliede eines älteren Collegen exstirpirt, der weiter nichts anzugeben wusste, als dass es sich anfangs wie eine kleine Warze ausnahm und bereits viele Jahre bestehe.

Die ganze Neubildung war etwa 6 *mm* hoch und ebenso breit; morgensternförmig von Gestalt. Die einzelnen Ästchen waren sehr spitzig und hart und dunkelbraun von Farbe.

Die Exstirpation geschah mit der Schere und die stark blutende Wunde wurde etwas cauterisirt, weil sich der Herr College eine Naht nicht anlegen lassen wollte. Die Heilung erfolgte rasch, und es folgte keine Recidive. Es gelang nun die kleine Neubildung vollständig zu injiciren, und ich habe einen gelungenen Durchschnitt durch dieselbe auf Fig. 6 abgebildet. Im Jahre 1886 habe ich einen identischen Fall bei einem Ambulanten auf meiner Klinik operirt.

Die Structur dieses Gebildes ist sehr einfach; wir sehen von einem spärlichen bindegewebigen Stroma getragen eine Menge mächtiger, sehr complicirt verästelter Papillen, welche zuerst von cylindrischen Zellen umgeben sind. Dann folgt eine wenig mächtige Schicht von Stachelzellen, welche gegen die Peri-

pherie zu spindelförmig werden; dann ihr Protoplasma und ihre Kerne verlieren und endlich eine mächtige verhornte Rinde bilden, welche alle Äste und Ästchen des Gebildes mehr, weniger gleichmässig bekleidet. Dieses Gebilde bildet unbedingt ein Mittelglied zwischen Hauthörnern und Papillomen. Wären die Papillen vereint geblieben und hätten sie sich nicht sparrig verzweigt und von einander getrennt, so hätten wir ein ganz typisches Hauthorn vor uns. Wir können also dieses Gebilde als ein morgensternförmig verästeltes Hauthorn betrachten. Wir finden in demselben dieselben histologischen Elemente und dieselbe Histogenese, wie bei den Hauthörnern, dieselbe Wucherung von Papillen, dieselbe Wucherung von Epidermoidalzelle und dieselbe mächtige Verhornung derselben. Das dreizinkige Hauthorn, welches wir oben erwähnt haben, sowie die kleinen, von Unna beschriebenen und abgebildeten Fibrokeratome bilden Übergänge dazu. Ich möchte für diese Neubildungen den Namen Keratopapilloma vorschlagen.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1 zeigt uns die Patientin mit dem Hauthorne der halbmondförmigen Falte (Keratoepithelioma plicae semilunaris) vor der Operation nach einer Photographie.

Fig. 2 zeigt dieselbe Patientin nach der Operation.

Fig. 3 zeigt einen Längsschnitt durch dieses Horn bei mässiger Vergrösserung, wobei die histologischen Elemente der Deutlichkeit und Übersichtlichkeit halber im Verhältnisse zur geringen Vergrösserung absichtlich etwas zu gross gehalten sind.

Fig. 4 zeigt das Liedhorn meines 2. Falles Keratoma palpebrae in natürlicher Gröse und Stellung

Fig. 5 zeigt einen Längsschnitt durch dieses Horn bei mässiger Vergrösserung.

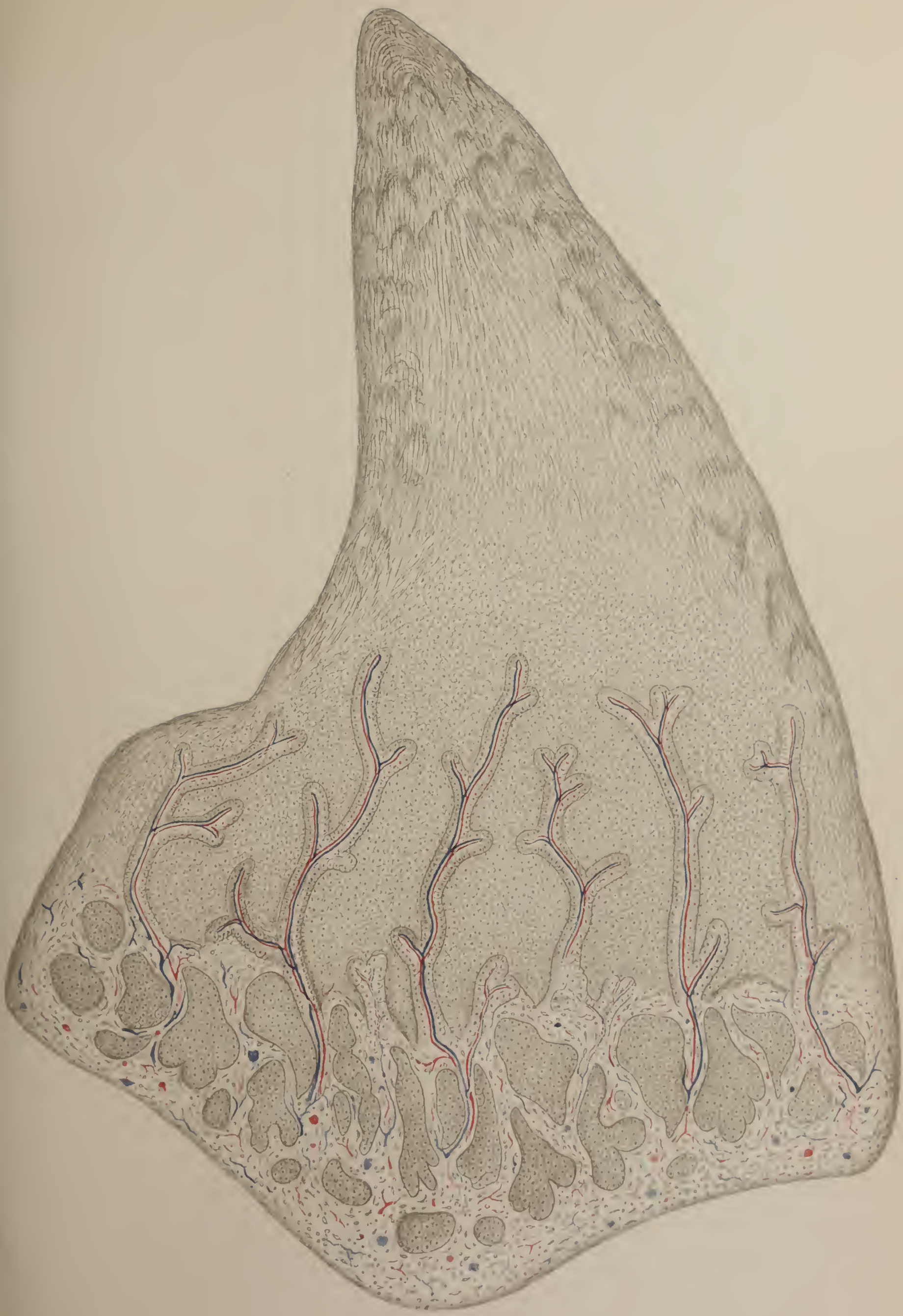
Fig. 6 zeigt ein Längsschnitt durch einen Hornpapillom Fall III. Keratopapilloma palpebrae genau nach der Natur gezeichnet bei 60maliger Vergrösserung.

Dle fotografie před operací.

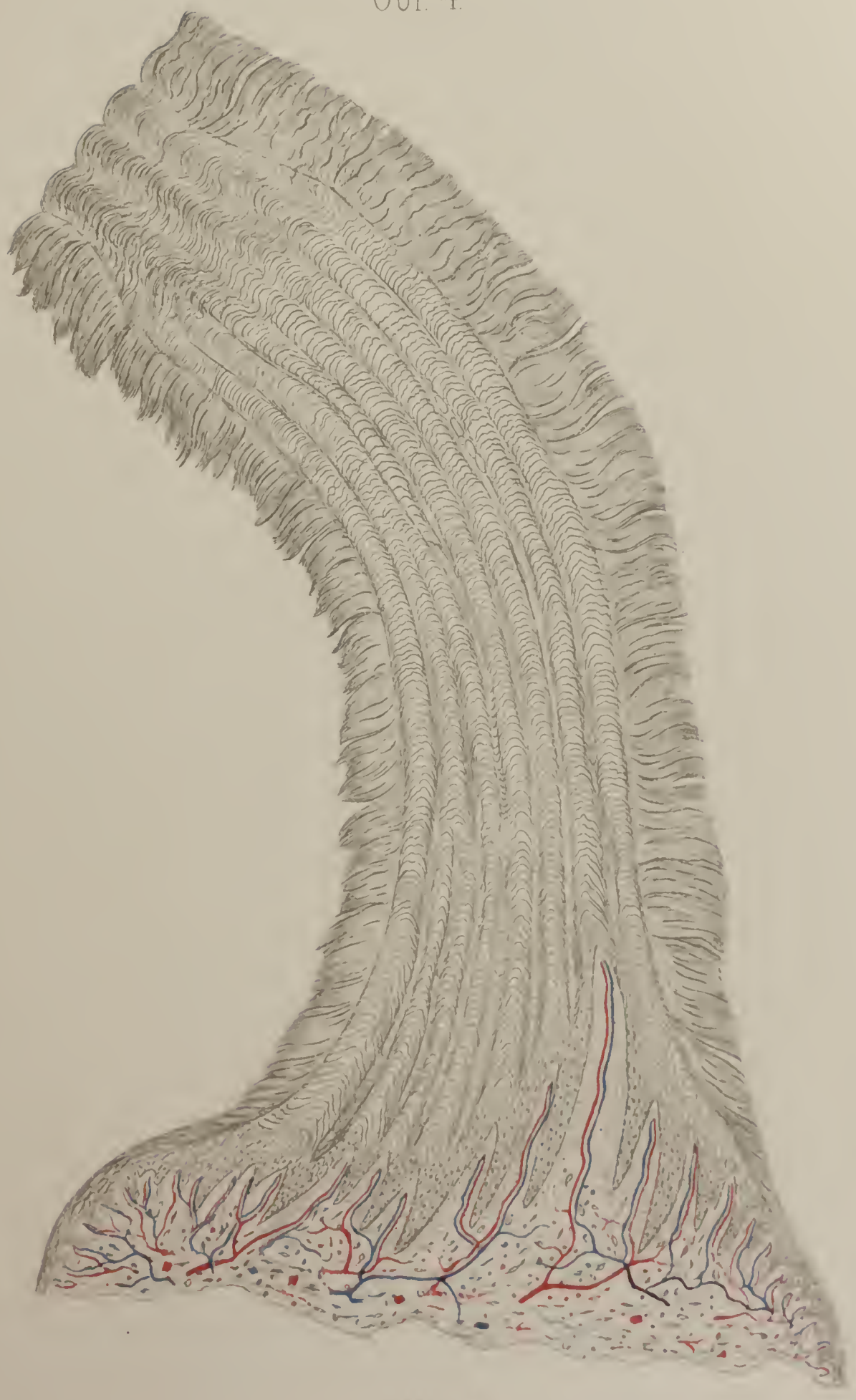
Obr. 1.

Dle fotografie po operaci.

Obr. 2.

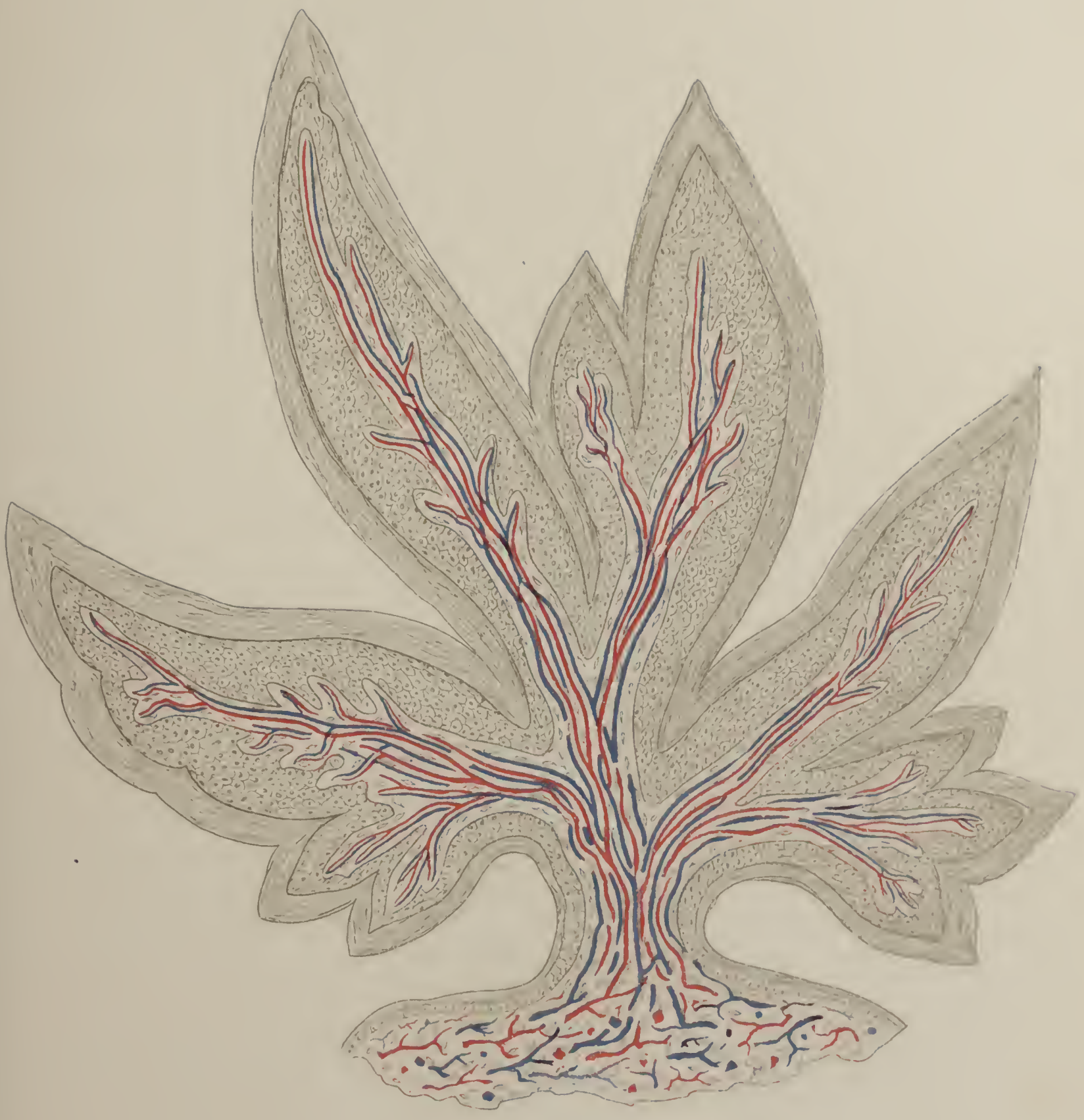


Obr. 4.



Obr. 5.

Sec. nat. ped. Pf. Scholl



Obr. 6

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 27.

ZÁKLADOVÉ THEORIE MALMSTÉNOVSKÝCH ŘAD.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 24. PROSINCE 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Předmětem úvah našich bude hlavně zvláštní druh řad, z něhož se vyskytly v literatuře jen jednotlivé případy neb typy, namnoze toliko ojediněle. Ačkoli prvé počátky sahají až k *Eulerovi*, mám za to, že *Malmstén* byl prvním, jemuž v tom oboru bylo učiniti první důležité kroky. Po něm následují jména *Schlömilch*, *Lipschitz*, *Riemann*, jímž se inspirovali pp. *Hurwitz* a *Sticltjes*. Nejobecnější z těchto řad studovali Malmstén a Lipschitz; p. *Appell* zabýval se výrazy na první pohled druhu různého od oněch, ale tyto vedly nás (byliť jsme se dříve zabývali výrazy Riemannovými jiným směrem) k zobecnění, od něhož vede jen malý krok ke konečnému typu, jenž tvoří předmět přítomné práce.

Vědecká cena přítomného spisu vězí — jak za to mám — v methodě velmi elementarné, pomocí které zde vyvinuty základní vlastnosti veličin, jichž důležitosť měřiti bude moci teprve budoucnosť. Velká část obecenstva, která hledí hlavně k elegantním výsledkům, bude však váhu práce spatřovati v applikacích, jež zde připojeny hlavně k vůli zvýšení interessu. Skutečně podařilo se nám pomocí našich vzorců odvoditi s překvapující jednoduchostí některé znamenité výsledky pana *Kroneckera*, jichž význam správně vytčen ve spise p. *H. Webera* (Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, §. 112 a násl.) a kromě toho mohli jsme dospěti k jiným výsledkům analogickým, z nichž uvedli jsme ovšem jen případy jednoduché, poněvadž nejzajímavější. Za důležité považujeme též stanovisko, s něhož jsme Kroneckerovské řady studovali, poněvadž toto se od onoho předchůdců našich podstatně liší, a v něm tkví příčina jednoduchosti našich method.

Začátečníkové uvítají nový důkaz Riemannovy reciprocity při funkci $\zeta(s)$, který jsme vyložili v §. 1, abychom dobře hned spředu naznačili povahu naší práce, důkaz, jenž jest nejelementarnější ze všech dosavadních.

Uvádíme zde seznam prací, jež nám o řadách našich jsou známy. Jsou to:

1. Malmstén, De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis. Journal für die reine und angew. Mathematik, sv. 38, 1849.
2. Schlömilch, Zeitschrift f. Math. u. Phys, 1849.
3. Lipschitz, Journal für die reine und angew. Mathematik, sv. 54.
4. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1859.

5. Hurwitz, Zeitschrift f. Mathematik und Phys., sv. 27; 1882.
6. Stieltjes, Sur quelques intégrales définies. Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 1886.
7. Appell, Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1886.
8. Lerch, O jistém integrálu omezeném. Věstník král. čes. společnosti nauk z r. 1886; hlavně pak
9. Sur certains développements en séries trigonométriques. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, sv. III. Dopis zaslaný p. Appellovi, datovaný ze dne 23. února 1887. Tuto práci pro náš předmět důležitou citovati budu krátce: Lerch, dopis.

Malmsténovým a Lipschitzovým případem zabývá se též poznámka:

10. Lerch, Note sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s)$. Acta mathematica, sv. 11.
11. Lipschitz, Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 105.

Řady Kroneckerovské, do jisté míry již Dirichletem uvažované, které budou předmětem applikací, studovány p. *Kroneckerem* v řadě pojednání:

12. Zur Therie der elliptischen Functionen. Berl. Sitzungsberichte 1883, 1886, 1889.
13. H. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig, 1891 (str. 454 a násl.) aneb
Zur Theorie der complexen Multiplication elliptischer Functionen. Mathematische Annalen, sv. 33.

Abychom naznačili obsah prací citovaných autorů, poznamenejme, že *Malmstén* v pojednání pod 1. uvedeném dokázal pěkný vzorec

$$\int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{u}{x}\right)}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du = \frac{\sin a}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^{s-1} dt}{e^t + 2\cos a + e^{-t}},$$

jenž vyjádřen jsa řadami (které Malmstén ovšem vytkl jen ve zvláštních případech), obdrží tvar:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu w\pi}{(x+\nu)^s}$$

$$= (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\cos\left(2\nu x + 2w x + \frac{s}{2}\right)\pi}{(w+\nu)^{1-s}} - \frac{\cos\left(2\nu x + 2w' x + \frac{s}{2}\right)\pi}{(w'+\nu)^{1-s}} \right],$$

kde jsme k vůli eleganci nahradili literu a výrazem $2w\pi - \pi$ a kladli $w' = 1 - w$, předpokládajíce veličiny w, x v mezích 0 a 1, podobně jako realnou část veličiny s.

Řada *Lipschitzova* byla (v našem označení)

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s},$$

a její pomyslná část splývá (až na označení liter) s levou stranou Malmsténovské relace. Řady Schlömilchova, Riemannova, Hurwitzova, Stieltjesova jsou zvláštní případy výrazu Lipschitzova. Řada studovaná v našem dopisu zní

$$F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}},$$

řady Appellovy pak vzniknou odtud specialisováním hodnot s. Od této řady nevalně se liší následující naše řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}},$$

kterou však dlužno uvažovati vůči krásným applikacím, o nichž učinčna zmínka výše. Mám za to, že bylo správné nazvati tuto řadu na oslavu švédského mathematika, jehož zásluhy o tento druh výrazů dosud zůstaly nepovšimnuty, řadou Malmsténovskou a označiti ji Ml. (v, w, u, s).

§. 1. Riemannova funkce $\zeta(s)$.

Klademeli v samozřejmém vzorci

$$\int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx = a^s \int_0^\infty f(ax)\, x^{s-1}\, dx$$

jednou $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, podruhé $f(x) = e^{-x}$, obdržíme rovnice

$$\frac{1}{a^s} = \frac{\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{1+a^2x^2}}{\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x^2}},$$

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{s-1}\, dx. \tag{1}$$

Integrál ve jmenovateli pravé strany prvé z těchto rovnic má hodnotu

$$\frac{\pi}{2 \sin \frac{s\pi}{2}},$$

a čitatel se substitucí $x = \frac{1}{z}$ přetvoří tak, aby vznikl vzorec

$$\frac{1}{a^s} = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1-s}\, dx}{a^2 + x^2}. \tag{2}$$

Těchto vzorců (1) a (2) užijeme k vyšetření vlastností funkce definované pro Real. $s > 1$ řadou Riemannovou

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

jež za učiněné podmínky Real. $s > 1$ konverguje absolutně.

Jelikož dle (2)

$$\frac{1}{k^s} = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\, dx}{k^2 + x^2},$$

pokud Real. $s < 2$, máme za této supposice

$$\zeta(s) = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\, dx}{k^2 + x^2}.$$

Ukážeme dodatečně, že tu dovoleno provésti sčítání pod znamením integrace, t. j. že

$$(a) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\, dx}{k^2 + x^2} = \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2},$$

načež obdržíme užitím známého vzorce

$$\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$$

hodnotu součtu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} + 1} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{2x},$$

a tedy

$$\zeta(s) = \frac{\sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{-s}\, dx;$$

píšemeli při integraci $\frac{x}{2\pi}$ místo x, máme posléze

$$(3) \qquad \zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s}\, dx,$$

pokud $1 <$ Real. $s < 2$.

Že integrál v pravo existuje pouze při Real. $s > 1$, plyne odtud, že pro nekonečně veliká x integrovaná funkce se redukuje na x^{-s}, a že podmínka Real. $s < 2$ je nutnou, plyne z okolnosti, že pro dosti malá x platí rozvoj

$$\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} = \frac{1}{2} x^{1-s} + \ldots.$$

Jedná se nyní o přesný důkaz rovnice (*a*). Tu můžeme se omeziti na realná *s*, poněvadž obě strany rovnice jsou funkce analytické, jež splynou pro všecka *s*, jakmile splynou pro všecka *s* sebe menšího intervallu realného.

Z nerovnosti patrné

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2} = \left(\pi \frac{e^{2\pi x}+1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{2x}$$

plyne

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\,dx}{k^2+x^2} < \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\pi \frac{e^{2\pi x}+1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{x}\right) x^{-s}\,dx\,;$$

poněvadž pravá strana je veličina konečná nezávislá n, a řada v levo sestává z kladných členů, plyne odtud především konvergence levé strany pro $n = \infty$, a mimo to nerovnosť

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\,dx}{k^2+x^2} \leqq \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2+x^2}\,.$$

Levá strana je však větší než

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{N} \frac{x^{1-s}\,dx}{k^2+x^2} = \int_0^{N} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2+x^2}\,,$$

kde N značí libovolnou kladnou veličinu; máme tedy

$$\int_0^{N} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2+x^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s}\,dx}{k^2+x^2} \leqq \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2+x^2}\,.$$

První a třetí z těchto veličin se liší o tak málo, jak libo, jeli N dosti veliké, a proto se druhá liší od třetí o veličinu libovolně malou; jelikož pak veličiny ty nezávisí na N, musí tu nastati úplná rovnosť, t. j. musí platiti rovnice (*a*).

Jiného výrazu pro funkci $\zeta(s)$ nabudeme, užijemeli vzorce (1), t. j.

$$\frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{s-1}\,dx\,;$$

tu bude

$$\zeta(s) = \lim_{N=\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{s-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{N=\infty} \int_0^{\infty} \frac{1+e^{-Nx}}{e^x-1} x^{s-1}\,dx\,.$$

Pokud je realná část s větší než 1, máme

$$\lim_{N=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-Nx} x^{s-1}\, dx}{e^x - 1} = 0\,,$$

a tedy

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}\,. \tag{4}$$

Integrály (3) a (4) nejsou způsobilé poučiti nás přímo o povaze funkce $\zeta(s)$ pro argumenty, jichž realná část je $\leqq 1$. Abychom toho docílili, rozdělme tyto integrály vždy ve dva dle schematu $\int_0^\omega + \int_\omega^\infty$, kde ω značí kladnou veličinu menší než 2π. Pak máme ze (3) a (4)

$$\zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \sin\frac{s\pi}{2} \left\{ \int_0^\omega \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s}\, dx + \int_\omega^\infty \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s}\, dx \right\},$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^\omega \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1} + \int_\omega^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1} \right\}.$$

Pokud $|x| < 2\pi$, konvergují, jak z elementů známo, rozvoje

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + \ldots + c_n x^{2n-1} + \ldots,$$

$$\frac{2}{e^x - 1} = \frac{2}{x} - 1 + c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + \ldots + c_n x^{2n-1} + \ldots,$$

z nichž plyne

$$\int_0^\omega \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s}\, dx = \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{\omega^{2n-s}}{2n - s},$$

$$\int_0^\omega \frac{2x^{s-1}\, dx}{e^x - 1} = -\frac{2\omega^{s-1}}{1-s} - \frac{\omega^s}{s} + \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{\omega^{s+2n-1}}{s + 2n - 1}\,.$$

Tyto výrazy vložme do hořejších vzorců pro $\zeta(s)$ a mimo to při prvém z nich všimněme si té okolnosti, že vůči supposici Real. $s < 2$ platí

$$\int_\omega^\infty \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s}\, dx = \int_\omega^\infty \frac{2x^{-s}\, dx}{e^x - 1} - \frac{\omega^{1-s}}{1-s} - \frac{2\omega^{-s}}{s};$$

tím obdržíme výsledky následující:

$$(3^*)\quad \zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \sin\frac{s\pi}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\omega^{2n-s}}{2n-s} - \frac{\omega^{1-s}}{1-s} - \frac{2\omega^{-s}}{s} + 2\int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{-s}\,dx}{e^x-1}\right\},$$

$$(4^*)\quad \zeta(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\omega^{s+2n-1}}{s+2n-1} - \frac{2\omega^{s-1}}{1-s} - \frac{\omega^s}{s} + 2\int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}\right\}.$$

Integrály

$$\int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}, \qquad \int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{-s}\,dx}{e^x-1}$$

konvergují pro všecka konečná s a definují celistvé funkce transcendentní této proměnné; nekonečné řady obsažené v závorkách $\{\}$ pak konvergují rovněž pro všecka s a definují funkce jednoznačné, jichž póly jsou $s = 2n,\ 1,\ 0$ resp. $1-2n,\ 1,\ 0$.

Z toho následuje, že výrazy (3*) a (4*) jest $\zeta(s)$ definována pro všecka komplexní s jakožto funkce jednoznačná. Kromě toho poznáváme snadno, že funkce $\zeta(s)$ se na všech místech chová pravidelně, mimo na místě $s = 1$, kde ji lze uvésti na tvar*)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathfrak{P}(s-1).$$

Z rovnic (3*) a (4*) plyne dále přímo *Riemannův* klassický vztah; klademe-li totiž ve (4*) $1-s$ za s, přejde závorka u (4*) v závorku u (3*) a bude

$$(5^a)\qquad \zeta(1-s) = \frac{\zeta(s)}{2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)},$$

rovnice, jež přejde v hledanou relaci Riemannovu

$$(5)\qquad \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\tfrac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}}\zeta(1-s),$$

užijemeli známých vztahů elementarných

$$\Gamma(1-s) = \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\tfrac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{s}{2}\right),$$

$$\sin\frac{s\pi}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{s}{2}\right)}.$$

---

*) Symbolem $\mathfrak{P}(x)$ vždy znamenáme řadu tvaru $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ konvergentní v určitém oboru.

§. 2. Řady Malmsténovské.

Řady, jež Malmstén a po něm uvedení mathematikové studovali, jsou zvláštní případy výrazu

$$(1) \qquad \text{Ml.}\,(v\,,w\,,u\,,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+n)^2+u^2\right]^{\frac{1}{2}s}}\,,$$

jejž na oslavu švédského mathematika nazvu *řadou Malmsténovskou*. Ukážeme především, že ji lze vyjádřiti omezeným integrálem. K tomu účelu nám podá vzorec (2) §. 1 rovnici

$$\frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+u)^2+u^2\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{2\sin\frac{s\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}\,x^{1-s}\,dx}{(w+n)^2+u^2+x^2}\,,$$

v níž musí realná část veličiny s býti obsažena v mezích 1 a 2, a při tom ostatní litery značí veličiny realné. Ukážeme dodatečně, že jest

$$(a) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}\,x^{1-s}\,dx}{(w+n)^2+u^2+x^2} = \int_0^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}\,x^{1-s}}{(w+n)^2+u^2+x^2}\,,$$

a užijemeli známého vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(w+n)^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\,e^{-2vw\pi i}\left(\frac{e^{2\pi(av'+wi)}}{e^{2\pi(a+wi)}-1}+\frac{e^{2\pi av}}{e^{2\pi(a-wi)}-1}\right),$$

kde psáno $v'=1-v$ a předpokládáno $0<v<1$, máme hledaný výraz:

$$(2) \qquad \text{Ml.}\,(v\,,w\,,u\,,s)$$

$$= 2\sin\frac{s\pi}{2}\,e^{-2vw\pi i}\int_0^{\infty}\left\{\frac{e^{2\pi\left(wi+v'\sqrt{u^2+x^2}\right)}}{e^{2\pi\left(wi+\sqrt{u^2+x^2}\right)}-1}+\frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2+x^2}}}{e^{2\pi\left(-wi+\sqrt{u^2+x^2}\right)}-1}\right\}\frac{x^{1-s}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}}\,,$$

platný za supposice

$$1<\text{Real. }s<2\,; \qquad 0<v<1\,; \qquad v'=1-v\,; \qquad u \text{ realné.}$$

Zbývá ještě dokázati identitu (a). Obě strany rovnice té konvergují pro $1<\text{Real. }s<2$; neboť o levé straně je to patrno, pravá pak liší se od integrálu (2) pouze určitým činitelem.

Rovnice (a) bude dokázána, jakmile ukážeme, že rozdíl veličin

$$(b) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_N^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}\,x^{1-s}\,dx}{(w+n)^2+u^2+x^2}\,, \qquad \int_N^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}\,x^{1-s}}{(w+n)^2+u^2+x^2}$$

blíží se nule, rosteli N přes všecky meze. Avšak veličiny tyto jsou absolutně menší než veličiny — omezujeme se na realná s —

$$(b') \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{N}^{\infty} \frac{x^{1-s}\,dx}{(w+n)^2+u^2+x^2}, \qquad \int_{N}^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{(w+n)^2+u^2+x^2}.$$

Poněvadž ale

$$\sum_{n=-v}^{v} \frac{1}{(w+n)^2+u^2+x^2} < \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^2+u^2+x^2},$$

máme též

$$\sum_{n=-v}^{v} \int_{N}^{\infty} \frac{x^{1-s}\,dx}{(w+n)^2+u^2+x^2} < \int_{N}^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{(w+n)^2+u^2+x^2}$$

pro všecka v; z nerovnosti té plyne pak, že prvý z výrazů (b′) nepřevýší druhý z nich, a poněvadž tento je nekonečně malý zároveň s $\frac{1}{N}$, je dokázáno, že rozdíl veličin (b) blíží se nulle pro $\lim N = \infty$, a následkem toho rovnice (a) je správna.

Ze vzorce (2) obdržíme snadno trigonometrický rozvoj funkce Ml. (v, w, u, s) vůči proměnné w. Je tu totiž, ano $v' = 1 - v$,

$$\frac{e^{2\pi\left(wi+v'\sqrt{u^2+x^2}\right)}}{e^{2\pi\left(wi+\sqrt{u^2+x^2}\right)}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nw\pi i-2\pi(n+v)\sqrt{u^2+x^2}},$$

$$\frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2+x^2}}}{e^{2\pi\left(-wi+\sqrt{u^2+x^2}\right)}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nw\pi i-2\pi(n-v)\sqrt{u^2+x^2}}.$$

Následkem toho plyne z (2) rozvoj:

$$(3) \quad e^{2vw\pi i}\,\mathrm{Ml.}\,(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2nw\pi i},$$

kde zavedeno označení

$$(4) \quad A_n = 2\sin\tfrac{s\pi}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi|n-v|\sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}},$$

při čemž $|n-v|$ dle způsobu Weierstrassova značí prostou (absolutní) hodnotu veličiny $n-v$, t. j.

$$|n-v| = \begin{cases} n-v & \text{pro } n \geq 0 \\ v-n & \text{» } n \leqq 0 \end{cases}.$$

Abychom poznali funkční povahu veličiny A_n, musíme studovati výraz

$$y = \int_0^\infty e^{-c\sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}};$$

píšemeli při integraci ux za $\sqrt{u^2+x^2}$, obdržíme

$$y = u^{1-s} \int_1^\infty e^{-cux} (x^2-1)^{-\frac{s}{2}}\,dx\,.$$

Položme pak

$$J = \int_1^\infty e^{-vx}\,(x^2-1)^{\sigma-1}\,dx\,, \tag{5}$$

kde σ je veličina kladná; differencujemeli pod znamením integračním, obdržíme

$$\frac{dJ}{dv} = -\int_1^\infty e^{-vx}\,x\,(x^2-1)^{\sigma-1}\,dx\,,$$

$$\frac{d^2J}{dv^2} = \int_1^\infty e^{-vx}\,x^2\,(x^2-1)^{\sigma-1}\,dx\,.$$

Integrací identity

$$d[e^{-vx}(x^2-1)^\sigma] = \left\{-v\,e^{-vx}(x^2-1)^\sigma + 2\sigma\,e^{-vx}\,x\,(x^2-1)^{\sigma-1}\right\}dx$$

v mezích 1 a ∞ obdržíme však

$$0 = -v\int_1^\infty e^{-vx}(x^2-1)^\sigma\,dx + 2\sigma\int_1^\infty e^{-vx}\,x\,(x^2-1)^{\sigma-1}\,dx\,,$$

a vložímeli sem hodnoty nalezené, posléze

$$-v\left(\frac{d^2J}{dv^2} - J\right) - 2\sigma\frac{dJ}{dv} = 0\,,$$

čili

$$v\frac{d^2J}{dv^2} + 2\sigma\frac{dJ}{dv} - vJ = 0\,. \tag{6}$$

Této differencialné rovnici lze vyhověti řadou mocninovou

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu v^2\,,$$

jejíž součinitelé se ustanoví z identity plynoucí z (6):

$$\sum \nu(\nu-1)\,C_\nu v^{\nu-1} + \sum 2\sigma\nu\,C_\nu v^{\nu-1} - \sum C_\nu v^{\nu+1} = 0\,,$$

která má za následek

$$\nu(\nu-1+2\sigma)\,C_\nu = C_{\nu-2}\,; \qquad (\nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots)\,,$$

kde $C_{-1} = C_{-2} = 0$. Obdržíme tu $C_1 = C_3 = C_5 = \ldots = 0$, a pak

$$C_2 = \frac{C_0}{2\,(2\sigma+1)}\,, \qquad C_4 = \frac{C_0}{2\,.\,4\,(2\sigma+1)\,(2\sigma+3)}\,,\ldots$$

$$C_{2n} = \frac{C_0}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n\,(2\sigma+1)\,(2\sigma+3)\ldots(2\sigma+2n-1)}\,.$$

Zaveďme pro snazší přehled označení

$$(s\,,n) = s\,(s+1)\,(s+2)\ldots(s+n-1)\,,$$

tedy

$$(s\,,0) = 1\,,(s\,,1) = s\,,(s\,,2) = s\,(s+1)\,,\ldots$$

a volme $C_0 = 1$. Tím obdržíme jako první partikularný integrál rovnice (6) řadu

$$J' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n}}{2^{2n}\,n\,!\,(\sigma+\frac{1}{2}\,,n)}\,.$$

Druhé řešení diff. rovnice (6) nám poskytne substituce

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} C'_\nu\, v^{\nu+1-2\sigma}$$

vedoucí k podmínkám

$$(\nu+1-2\sigma)\,\nu\,C'_\nu = C'_{\nu-2}\,; \quad (\nu = 0\,,1\,,2\,,\ldots)\,,$$

$C'_{-1} = C'_{-2} = 0$; nalezneme

$$C'_{2n+1} = 0\,, \qquad C'_{2n} = \frac{C'_0}{2^{2n}\,n\,!\,(\frac{3}{2}-\sigma\,,n)}\,,$$

tak že druhé řešení partikularné differencialné rovnice (6) zní

$$J'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n+1-2\sigma}}{2^{2n}\,n\,!\,(\frac{3}{2}-\sigma\,,n)}\,.$$

Nalezená řešení budou různa, pokud σ není rovno $\frac{1}{2}$ a existují, pokud σ se liší od $\frac{3}{2}\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \frac{7}{2}\,,\ldots$ a od $-\frac{1}{2}\,,\ -\frac{3}{2}\,,\ -\frac{5}{2}\,,\ldots$

Pokud tedy 2σ není celistvé číslo liché, bude obecné řešení differencialné rovnice (6) zníti

$$J = C'\,J' + C''\,J''\,,$$

kde C', C'' značí dvě konstanty, které musíme ustanoviti tak, aby tento výraz přešel v integrál (5).

Jeli především σ obsaženo v mezeře $(0 \ldots \frac{1}{2})$, bude $1 - 2\sigma > 0$, a tedy $J'' = 0$ pro $v = 0$; obdržíme tak

$$C' = J_{v=0} = \int_1^\infty (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx ,$$

a třeba jen vyčísliti poslední integrál. Klademeli zde $x = z^{-\frac{1}{z}}$, obdržíme

$$C' = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1 - z)^{\sigma-1} z^{-\frac{1}{2}-\sigma} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2} - \sigma)}{\sqrt{\pi}} .$$

Abychom ustanovili C'', přetvořme J substitucí $x = \frac{z}{v}$, čímž vznikne

$$J = v^{1-2\sigma} \int_v^\infty e^{-z} (z^2 - v^2)^{\sigma-1} dz ,$$

a předpokládejme $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Pak bude $1 - 2\sigma < 0$ a tedy u výrazu

$$J v^{2\sigma-1} = C' J' v^{2\sigma-1} + C'' J'' v^{2\sigma-1}$$

odpadne pro $v = 0$ prvý člen, tak že zbude

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{2\sigma-2} dz = C'' ,$$

čili

$$C'' = \Gamma(2\sigma - 1) .$$

Dle toho máme pro integrál (5) výraz

(5ª) $$J = \frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2} - \sigma)}{2\sqrt{\pi}} J' + \Gamma(2\sigma - 1)\, J'' .$$

Tato dedukce postrádá přesnosti, ani součinitelé C', C'' ustanoveni byli při různých hodnotách σ; proto zde dodáváme důkaz přesný.

Integrál

$$v^{2\sigma-1} J = \int_v^\infty e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx = \overline{J}$$

rozdělme ve dva

$$K = \int_v^1 e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx , \qquad K_1 = \int_1^\infty e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx ,$$

předpokládajíce $v < 1$. Tu je bezprostředně jasno, že lze K_1 rozvinouti v obyčejnou řadu mocninovou, jejíž stálý člen bude

$$\overset{(v=0)}{K_1} = \int_1^\infty e^{-x} x^{2\sigma-2} dx = Q(2\sigma - 1) ,$$

takže máme*)

$$K_1 = Q(2\sigma - 1) + v\,\mathfrak{P}_1(v)\,.$$

Při tom předpokládejme σ realným a > 1 aneb aspoň Real. $\sigma > 1$; pak bude binomialní rozvoj

$$(x^2 - v^2)^{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\sigma-1}{n} v^{2n} x^{2\sigma-2n-2}$$

absolutně konvergentní (a zároveň stejnoměrně) uvnitř oboru $(v \ldots 1)$, a tedy též součin

$$e^{-x}(x^2 - v^2)^{\sigma-1} = \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} x^{2\sigma+m-2n-2} v^{2n}\,,$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a odtud plyne integrací

$$K = -\sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} v^{2n} \cdot \frac{v^{2\sigma+m-2n-1} - 1}{2\sigma + m - 2n - 1}\,,$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Výraz ten lze přetvořiti následovně

$$K = -\sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^{2\sigma+m-1}}{2\sigma + m - 2n - 1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{2\sigma + m - 1} + v\,\mathfrak{P}_2(v)\,.$$

Máme tudíž

$$\overline{J} = K + K_1 = -\sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^{2\sigma+m-1}}{2\sigma + m - 2n - 1}$$

$$+ \left[Q(2\sigma \quad 1) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(2\sigma + m - 1)} \right] + v\,\mathfrak{P}(v)\,,$$

kde $\mathfrak{P}(v) = \mathfrak{P}_1(v) + \mathfrak{P}_2(v)$. Výraz obsažený uvnitř závorky [ ] splývá však s obecnou definicí funkce $\Gamma(2\sigma - 1)$; máme tak konečně

$$J = -\sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^m}{2\sigma + m - 2n - 1} + v^{1-2\sigma} \left(\Gamma(2\sigma - 1) + v\,\mathfrak{P}(v) \right).$$

---

*) Jak již jednou poznamenáno, znamenáme $\mathfrak{P}(v)$ řady tvaru $a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots$.

Veličina tato musí býti tvaru $C'J' + C''J''$, a poněvadž J' obsahuje vesměs celistvé mocnosti v, J'' pak těchto neobsahuje, musí býti prvý součet tvaru $C'J'$, druhý výraz pak tvaru $C''J''$. Porovnámeli pak v stejných funkcích koefficienty při v^0, resp. $v^{1-2\sigma}$, obdržíme

$$C' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{2\sigma-2n-1}, \qquad C'' = \Gamma(2\sigma-1),$$

a odtud, jak snadno se verifikuje,

$$C' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^{\sigma-1} x^{-\frac{1}{2}-\sigma}\, dx = \frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Abychom dosavadní výsledky vztahující se k integrálu (5) přehledněji vyjádřili, zaveďme celistvou funkci transcendentní dvou proměnných x, s:

$$E(x,s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!\,\Gamma(s+m+1)}. \tag{7}$$

Pak bude patrně

$$J' = \Gamma(\sigma+\tfrac{1}{2})E(\tfrac{v^2}{4}, \sigma-\tfrac{1}{2}), \qquad J'' = v^{1-2\sigma}\Gamma(\tfrac{3}{2}-\sigma)\,E(\tfrac{v^2}{4}, \tfrac{1}{2}-\sigma)$$

a tedy

$$J = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)}{2\sqrt{\pi}} E(\tfrac{v^2}{4}, \sigma-\tfrac{1}{2}) + v^{1-2\sigma}\Gamma(2\sigma-1)\,\Gamma(\tfrac{3}{2}-\sigma)\,E(\tfrac{v^2}{4}, \tfrac{1}{2}-\sigma),$$

aneb:

$$J = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)}{2\sqrt{\pi}} E(\tfrac{v^2}{4}, \sigma-\tfrac{1}{2}) - v^{1-2\sigma}\frac{\Gamma(2\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2} E(\tfrac{v^2}{4}, \tfrac{1}{2}-\sigma).$$

Avšak

$$\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2\sqrt{\pi}} = \Gamma(2\sigma)\,2^{-2\sigma},$$

takže máme posléze

$$(5^b)\quad J = \tfrac{1}{2}\Gamma(2\sigma)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\sigma)\left[2^{1-2\sigma}E(\tfrac{v^2}{4}, \sigma-\tfrac{1}{2}) - v^{1-2\sigma}E(\tfrac{v^2}{4}, \tfrac{1}{2}-\sigma)\right].$$

Náš integrál A_n bude dle toho dán výrazem

$$A_n = \sin\tfrac{s\pi}{2}\,\Gamma(2-s)\,\Gamma(\tfrac{s-1}{2})\,u^{1-s}\left\{2^{s-1}E(k^2, \tfrac{1-s}{2}) - 2^{s-1}k^{s-1}E(k^2, \tfrac{s-1}{2})\right\},$$

kde položeno $k = \pi|n - v|u$.

Užijemeli zde identity

$$2^{s-1}\sin\tfrac{s\pi}{2}\,\Gamma(2-s)\,\Gamma(\tfrac{s-1}{2}) = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\tfrac{s}{2})\cos\tfrac{s\pi}{2}}\,,$$

obdržíme konečně:

$$(4^*)\qquad A_n = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\tfrac{s}{2})\cos\tfrac{s\pi}{2}}\Big[(\pi|v-n|)^{s-1}\,E\{u^2\pi^2(v-n)^2\,,\tfrac{s-1}{2}\}$$
$$-u^{1-s}\,E\{u^2\pi^2(v-n)^2,\tfrac{1-s}{2}\}\Big]\,,$$

vzorec, který ještě jiným způsobem odvodíme.

§. 3. Řada Malmstén-Lipschitzova.

Pokud w jest ryzím zlomkem, bude funkce obsažená v závorce $\{\ \}$ pod znamením integračním vzorce (2) §. 2 konečnou v integračním oboru i tehdy, jeli $u=0$. Poněvadž funkce ta zmizí v prvém stupni při $x=0$, zůstává integrál konečným pro $u=0$, a obdržíme tedy

$$\text{Ml.}\,(v,w,0,s) = 2\sin\tfrac{s\pi}{2}\,e^{-2vw\pi i}\int_0^\infty\left\{\frac{e^{2\pi(wi+v'x)}}{e^{2\pi(wi+x)}-1}+\frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)}-1}\right\}x^{\ s}\,dx\,.$$

Tento integrál konverguje však i tehdy, jeli $0<\text{Real. s}<2$, při čemž řada v levo

$$\text{Ml.}(v,w,0,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+n)^2\right]^{\frac{s}{2}}}$$

konverguje ovšem pouze *podmínečně*, pokud Real. $s<1$; ku konvergenci té je však třeba ještě, aby v nebylo číslem celistvým; neboť jeli v celistvé, řada ta diverguje při Real. $s<1$.

Znamenámeli symbolem $\{w+n\}$ veličinu $w+n$ při $n\geq 0$, ale veličinu $-n-w$ při $n<0$, máme $\left[(w+n)^2\right]^{\frac{s}{2}}=\{w+n\}^s$, a naši rovnici lze psáti

$$(1)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s} = 2\sin\tfrac{s\pi}{2}\,e^{-2vw\pi i}\int_0^\infty\left(\frac{e^{2\pi(wi+v'x)}}{e^{2\pi(wi+x)}-1}+\frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)}-1}\right)x^{-s}\,dx\,,$$

kde splněny býti mají podmínky $0<w<1$, $0<v<1$, $0<\text{Real. }s<2$, $v'=1-v$. V krajním případě $v=0$ však musí býti $1<\text{Real. }s<2$.

Avšak

$$\frac{e^{2\pi(wi+v'x)}}{e^{2\pi(wi+x)}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2nw\pi i-2\pi(n+v)x},$$

$$\frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{2nw\pi i-2\pi(n-v)x},$$

takže nacházíme z (1):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s}=2\sin\tfrac{s\pi}{2}e^{-2vw\pi i}\int_0^{\infty}x^{-s}dx\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-2nw\pi i-2\pi x\{v+n\}}.$$

Provedemeli integraci za supposice $0<\text{Real. }s<1$, máme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s}=2\sin\tfrac{s\pi}{2}\,.\,e^{-2vw\pi i}\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2nw\pi i}}{\{v+n\}^{1-s}}.$$

Klademeli tedy

(2) $$Z(v,w,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s},$$

nacházíme tak zajímavý vztah:

(3) $$e^{2vw\pi i}Z(v,w,s)=(2\pi)^{s-1}\,2\sin\tfrac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)\,Z(1-w,v,1-s),$$

jenž má konkretný význam ovšem jen tak dalece, pokud realná část veličiny s je pravým kladným zlomkem, a pokud $0<v<1$, $0<w<1$. Ze vztahu toho však patrno, že lze funkci $Z(v,w,s)$ definovati též pro komplexní s, jichž realná část jest $\leqq 0$. Transformujme integrál (1) substitucí x místo $2x\pi$, takže

(1*) $$e^{2vw\pi i}Z(v,w,s)=(2\pi)^{s-1}\,.\,2\sin\tfrac{s\pi}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{2w\pi i+v'x}}{e^{2w\pi i+x}-1}+\frac{e^{vx}}{e^{-2w\pi i+x}-1}\right)x^{-s}dx;$$

odtud máme dosazením hodnot vzorec:

$$e^{2v(1-w)\pi i}Z(1-w,v,1-s)$$
$$=(2\pi)^{-s}\,2\cos\tfrac{s\pi}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{2v\pi i+wx}}{e^{2v\pi i+x}-1}+\frac{e^{(1-w)x}}{e^{-2v\pi i+x}-1}\right)x^{s-1}dx,$$

a rovnice (3) obdrží tvar:

(3ª)
$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{2w\pi i+(1-v)x}}{e^{2w\pi i+x}-1}+\frac{e^{vx}}{e^{-2w\pi i+x}-1}\right)x^{-s}dx$$
$$=(2\pi)^{-s}\,2\cos\tfrac{s\pi}{2}\,e^{-2v(1-w)\pi i}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{2v\pi i+wx}}{e^{2v\pi i+x}-1}+\frac{e^{(1-w)x}}{e^{-2v\pi i+x}-1}\right)x^{s-1}dx.$$

Znamenejme k vůli snazšímu přehledu

$$f(z, v) = \frac{e^{vz}}{e^z - 1}, \qquad f'(z, v) = \frac{\partial f}{\partial z},$$

čímž naše relace obdrží tvar:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Gamma(1-s)} \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{2w\pi i + x} - 1} + \frac{e^{vx}}{e^{-2w\pi i + x} - 1} \right) x^{-s}\, dx \\ \\ \quad = (2\pi)^{-s}\, 2\cos\frac{s\pi}{2} \displaystyle\int_0^\infty \{f(x + 2v\pi i, w) + f(x - 2v\pi i, 1 - w)\}\, x^{s-1}\, dx\,. \end{array} \right.$$

Differencováním dle v obdržím odtud

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{vx}}{e^{x - 2w\pi i} - 1} - \frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{x + 2w\pi i} - 1} \right) x^{1-s}\, dx$$

$$= 2\pi i (2\pi)^{-s}\, 2\cos\frac{s\pi}{2} \int_0^\infty [f'(x + 2v\pi i, w) - f'(x - 2v\pi i, 1 - w)]\, x^{s-1}\, dx\,.$$

Obě strany této rovnice mají význam i tehdy, předpokládámeli Real. $s > 1$, a jakožto funkce analytické jsou si rovny i v tomto případě. Za této suppo-sice však možno v pravo provésti integraci částečnou, a obdrží se jakožto hodnota pravé strany výraz

$$(1 - s) \,.\, 2\pi i \,.\, (2\pi)^{-s}\, 2\cos\frac{s\pi}{2} \int_0^\infty [f(x + 2v\pi i, w) - f(x - 2v\pi i, 1 - w)]\, x^{s-2}\, dx\,.$$

Píšemeli zde $s - 1 = \sigma$, máme tak výsledek

$$\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{vx}}{e^{x - 2w\pi i} - 1} - \frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{x + 2w\pi i} - 1} \right) x^{-\sigma}\, dx$$

$$= -(2\pi)^{-\sigma} \,.\, 2i \sin\frac{\sigma\pi}{2} \int_0^\infty [f(x + 2v\pi i, w) - f(x - 2v\pi i, 1 - w)]\, x^{\sigma-1}\, dx\,.$$

V tomto vzorci pišme s místo σ a sečtěme se vzorcem (a); tím vznikne

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{e^{vx} x^{-s}\, dx}{e^{x - 2w\pi i} - 1} = e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty f(v + 2v\pi i, w)\, x^{s-1}\, dx$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty f(x - 2v\pi i, 1 - w)\, x^{s-1}\, dx\,.$$

Avšak

$$\frac{e^{vx}}{e^{x-2w\pi i}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{2nw\pi i-(n-v)x},$$

tedy

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{vx}x^{-s}dx}{e^{x-2w\pi i}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nw\pi i}}{(n-v)^{1-s}}.$$

Zde naskytá se příležitosť zavésti funkci

$$\Re(w,x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s}, \tag{4}$$

při kterémžto označení máme patrně

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{e^{vx}x^{-s}\,dx}{e^{x-2w\pi i}-1}=\Re(1-v,w,1-s)\,e^{2w\pi i};$$

podobně vypočteme

$$\int_0^{\infty}f(x+2v\pi i,w)\,x^{s-1}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{e^{wx+2vw\pi i}\,x^{s-1}\,dx}{e^{x+2v\pi i}-1}$$

$$=\Gamma(s)\,e^{2vw\pi i-2v\pi i}\,\Re(1-w,1-v,s),$$

a dále

$$\int_0^{\infty}f(x-2v\pi i,1-w)\,x^{s-1}\,dx=\Gamma(s)\,e^{2vw\pi i}\,\Re(w,v,s),$$

takže náš výsledek bude

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\Re(1-v,w,1-s)\,e^{2w\pi i}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}s\pi i+vw\pi i-2v\pi i}\,\Re(1-w,1-v,s)+e^{\frac{1}{2}s\pi i+2vw\pi i}\,\Re(w,v,s).$$

Píšemeli zde w, x místo $1-v,w$, máme konečně

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\Re(w,x,1-s)=e^{\pi i(\frac{1}{2}s-2wx)}\,\Re(x,1-w,s)+e^{\pi i(-\frac{1}{2}s+2w(1-x))}\,\Re(1-x,w,s), \tag{5}$$

vzorec *Lipschitzem* poprvé odvozený, po té ve zvláštních případech Riemannem, Hurwitzem a Stieltjesem studovaný a námi znovu jinou cestou nalezený.

Řada (4) konverguje a jest jednoznačnou i pro komplexní x, pokud pomyslná část Im. x této veličiny jest kladnou, takže jest jí definována $\Re(w,x,s)$ v celé kladné polovici roviny (x). Rovněž můžeme rozšířiti pojem funkce $\Re$ i pro komplexní w.

Funkce $(w+n)^s$ je vůči komplexní proměnné w víceznačnou, pokud s je libovolné, t. j. nikoli celistvé; u funkcí víceznačných bývá záhodno ustáliti jednu z nekonečného počtu hodnot, aby úvahy vztahovaly se k veličinám

zcela určitým. Jeli $w+n$ kladné realné, rozuměli jsme výrazem $(w+n)^s$ veličinu $e^{s\log(w+n)}$, kde logarithmus je realný. My budeme nadále znamenati $(w+n)^s$ onu hodnotu napsaného výrazu exponencialného, kde pomyslná část logarithmu jest obsažena v mezích $(-\pi i \ldots \pi i)$, takže bude $(w+n)^s$ veličina zcela určitá, pokud $w+n$ není realnou veličinou zápornou. Předpokládámeli tedy, že w není záporná realná veličina, definuje pak řada (4) veličinu zcela určitou, jež jest analytickou funkcí proměnné w, pravidelnou na všech místech položených mimo zápornou část osy realné. Jeli zároveň Im. $x>0$, konverguje řada (4) pro všecka s a je celistvou funkcí transcendentní proměnné s.

Jak výše uvedeno, jest

$$(6)\qquad \mathfrak{R}(w,x,s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{(1-w)t-2x\pi i}}{e^{t-2x\pi i}-1}\,t^{s-1}\,dt\,;$$

tento vzorec je především odůvodněn pro realná x, w oboru $(0\ldots1)$ a pro Real. $s>0$; lze jej bezprostředně verifikovati též pro Im. $x>0$, a rovněž pro komplexní w hovící podmínce Real. $w>0$, která jest nutna ke konvergenci integrálu.

Výraz na pravé straně existuje pro všecka x mimo ona, pro něž $e^{2x\pi i}$ jest realné a $\geqq 1$, tedy pro něž $2x\pi i$ je tvaru $2\pi y+2k\pi i$, kde k je celistvé a $y\geqq 0$. Dlužno tedy z roviny (x) vyloučiti pomocí *řezů* veškery hodnoty x tvaru $k-iy$, kde y je realné a kladné a k probíhá hodnoty $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; řezy ty vycházejí z bodů $x=\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ a jdou rovnoběžně se záporným směrem osy pomyslné do nekonečna. Rovinu x takto řezy opatřenou znamenejme $[x]$; tato jest plochou souvislou. V rovině $[x]$ je pak $\mathfrak{R}(w,x,s)$ integrálem (6) definováno jako jednoznačná analytická funkce komplexní proměnné x, chovající se na všech místech uvnitř $[x]$ pravidelně.

Dosud jsme musili předpokládati Real. $w>0$; abychom obdrželi pro $\mathfrak{R}$ výraz nezávislý na této podmínce, uvažme, že ze (4) plyne

$$\mathfrak{R}(w,x,s)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{e^{2\nu x\pi i}}{(w+\nu)^s}+e^{2nx\pi i}\,\mathfrak{R}(w+n,x,s)\,.$$

Volímeli n dosti veliké, bude Real. $(w+n)>0$ a pak dle (6) platí rovnice

$$(6^a)\qquad \mathfrak{R}(w,x,s)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{e^{2\nu x\pi i}}{(w+\nu)^s}+\frac{e^{2nx\pi i}}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{(1-w-n)t-2x\pi i}\,t^{s-1}\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1}\,.$$

Tímto vzorcem dána funkce $\mathfrak{R}$ pro všecka realná i komplexní w, x, mimo x položená na řezích, t. j. mimo x tvaru $k-iy$; při tom ale musí býti Real. $s>0$.

Jedná se ještě o uvolnění proměnné s. Za tím účelem rozdělme integrál ve dva

$$\int_0^\omega \frac{e^{(1-w-n)t}\,t^{s-1}\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1}+\int_\omega^\infty \frac{e^{(1-w-n)t-2x\pi i}\,t^{s-1}\,dt}{e^{t-2x\pi i}-1}\,,$$

kde ω značí malou kladnou veličinu; jeli ω menší než nejmenší z veličin $2\pi i(x+k)$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, bude lze užiti rozvoje Maclaurinova

$$\frac{e^{(1-w-n)t-2x\pi i}}{e^{t-2x\pi i}-1} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots,$$

načež plyne integrací:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^{\omega} \frac{e^{(1-w-n)t-2x\pi i} t^{s-1}\, dt}{e^{t-2x\pi i}-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{A_\alpha\, \omega^{s+\alpha}}{s+\alpha} = P_n(w, x, s \mid \omega).$$

Znamenámeli ještě

$$\text{(b)} \qquad \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-w-n)t-2x\pi i} t^{s-1}\, dt}{e^{t-2x\pi i}-1} = Q_n(w, x, s \mid \omega)$$

máme patrně ze (6ª):

$$(6^b) \qquad \mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{2\nu x\pi i}}{(w+\nu)^s} + \frac{e^{2nx\pi i} P_n(w, x, s \mid \omega)}{\Gamma(s)} + \frac{e^{2nx\pi i} Q_n(w, x, s \mid \omega)}{\Gamma(s)}.$$

Z nekonečné řady (a), která definuje funkci P_n pro všecka s, je patrno, že P_n jest jednoznačnou funkcí s nemající jiných singularit mimo póly stupně prvého $s = 0, -1, -2, \ldots$ takže podíl $\frac{P_n}{\Gamma(s)}$ je nutně celistvou funkcí s. Věc ta je dále samozřejma při integrálu (b), takže z (6ᵇ) plyne, že *analytická funkce s daná elementem* (6) *je celistvou trauscendentní.*

Vzorec (6ᵇ) definuje funkci $\mathfrak{R}$ pro všecky hodnoty s, w, x, mimo hodnoty x položené na řezích, a dalo by se dokázati, že třeba se vyhnouti toliko místům $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, v nichž řezy začínají.

Můžeme si lehce zjednati výraz pro $\mathfrak{R}(w, x, s)$ ve tvaru omezeného integrálu platný pro hodnoty s, jichž realná část je v mezích $(0 \ldots 1)$, neb $(-1 \ldots -2)$, $(-2 \ldots 3)$ atd. Jeli totiž integrál

$$\int_0^{\infty} f(t)\, t^{s-1}\, dt = \Phi(s)$$

konvergentní pouze pro Real. $s > 0$, a mámeli pro malá t

$$f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots,$$

pak jest $\Phi(s)$ jednoznačná funkce komplexní proměnné s, která pro hodnoty s, u nichž $-n >$ Real. $s > -n-1$, rovná se integrálu

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \left[f(t) - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu t^\nu \right] t^{s-1}\, dt,$$

jak již byl *Cauchy* ve svých Exercices poznamenal a na novo p. *Saalschütz* v nedávné době nalezl.

§. 4. Pokračování o funkci ℜ. Integrál Malmsténův.

Zabývejme se nyní integrálem

$$(1) \qquad J = \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{u}{x}\right)}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du ,$$

kde a, x jsou realné veličiny kladné. Jelikož funkce pod znamením integračním je sudou, máme

$$2J = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{e^{-is \operatorname{arctg} \frac{u}{x}}}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du$$

čili

$$(2) \qquad 2J = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{du}{(x + ui)^s} .$$

Předpokládámeli $x < 1$, bude funkce $\frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}$ konečná v pásu u mezi realnou osou a rovnoběžkou vedenou bodem $u = ix$; předpokládámeli dále Real. $s < 1$, budeme moci integrační cestu nahraditi novou cestou integrační $u = y + ix$, čímž vznikne

$$2J = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{dy}{(iy)^s} , \qquad u = y + ix ,$$

kde $(iy)^s = \lim (x + ui)^s = \lim_{\alpha = 0} (\alpha + iy)^s$,

což jest $\begin{cases} e^{\frac{1}{2}s\pi i} y^s & \text{pro } y > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}s\pi i} (-y)^s & \text{» } y < 0 . \end{cases}$

Máme tedy

$$(2^a) \qquad \begin{cases} 2J = e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{ay + axi} - e^{-ay - axi}}{e^{\pi y + \pi xi} - e^{-\pi y - \pi xi}} y^{-s} dy \\ \qquad + e^{\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{ay - axi} - e^{-ay + axi}}{e^{\pi y - \pi xi} - e^{-\pi y + \pi xi}} y^{-s} dy ; \end{cases}$$

abychom obdrželi rozvoj tohoto integrálu užijme řady

$$\frac{1}{e^{\pi y \pm x\pi i} - e^{-\pi y \mp x\pi i}} = \sum_\lambda e^{-\lambda xy \mp \lambda x\pi i} , \qquad (\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

načež obdržíme

$$2J = e^{\frac{1}{2}s\pi i}\left\{\sum_{\lambda}\frac{\Gamma(1-s)\,e^{ax i+\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi-a)^{1-s}}-\sum_{\lambda}\frac{\Gamma(1-s)\,e^{ax i+\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi+a)^{1-s}}\right\}$$
$$+e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\left\{\sum_{\lambda}\frac{\Gamma(1-s)\,e^{ax i-\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi-a)^{1-s}}-\sum_{\lambda}\frac{\Gamma(1-s)\,e^{\cdots ax i-\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi+a)^{1-s}}\right\}$$

a odtud

$$(3)\qquad J=\Gamma(1-s)\sum_{\lambda}\left[\frac{\cos(\lambda x\pi-ax+\frac{1}{2}s\pi)}{(\lambda\pi-a)^{1-s}}-\frac{\cos(\lambda x\pi+ax+\frac{1}{2}s\pi)}{(\lambda\pi+a)^{1-s}}\right]$$
$$(\lambda=1,3,5,7,9,\ldots),$$

při čemž se předpokládá, že x náleží intervallu $(0\ldots1)$. Integrál J však je patrně konečný pro všecka s a definuje celistvou funkci transcendentní této veličiny, jakmile $x\gtrless 0$.

Rovněž snadno dá se vyčísliti integrál na pravé straně Malmsténova vzorce, t. j.

$$J'=\int_0^{\infty}\frac{e^{-tx}t^{s-1}\,dt}{e^t+2\cos a+e^{-t}}=\int_0^{\infty}\frac{e^{t(1-x)}t^{s-1}\,dt}{(e^t+e^{ia})(e^t+e^{-ia})}.$$

Poněvadž rozkladem v částečné zlomky obdržíme

$$\frac{e^t}{(e^t+e^{ia})(e^t+e^{-ia})}=\frac{1}{2i\sin a}\left(\frac{e^{ia}}{e^t+e^{ia}}-\frac{e^{-ia}}{e^t+e^{-ia}}\right),$$

bude

$$2i\sin a\,J'=\int_0^{\infty}\frac{e^{-tx}t^{s-1}\,dt}{e^{t-ai}+1}-\int_0^{\infty}\frac{e^{-tx}t^{s-1}\,dt}{e^{t+ai}+1}.$$

Užijemeli tedy opětně geometrické řady

$$\frac{1}{e^{t\mp ai}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-n(t\mp ai)},$$

máme

$$2i\sin a\,J'=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{e^{nai}}{(n+x)^s}-\frac{e^{-nai}}{(n+x)^s}\right],$$

tedy

$$(3^a)\qquad\frac{\sin a\,.\,J'}{\Gamma(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin na}{(n+x)^s}.$$

Výhoda plynoucí z tvaru (1) integrálu J, v němž tento existuje pro všecka s, je patrna. Jedná se o to, abychom si zjednali podobný výraz pro funkci $\mathfrak{R}(w,x,s)$. Uvažujme za tím účelem integrál

$$(4)\qquad K_a=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-w(\zeta-ai)}(z-ai)^{s-1}\,dz}{1-e^{2x\pi i-\zeta+ai}},$$

jehož hodnota je stálou vůči α, pokud změny této veličiny nedosáhnou určitého stupně. Značíli α_0 nejmenší z kladných veličin řady 2π Real $(-x+k)$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, bude K_α míti na mezeře $\alpha=(0 \ldots \alpha_0)$ hodnotu stálou a tedy

$$K_\alpha = \lim_{\alpha=0} K_\alpha .$$

Poněvadž $\lim_{\alpha=0} (z-\alpha i)^{s-1}$ jest z^{s-1} neb $e^{-(s-1)\pi i}(-z)^{s-1}$, jak je z kladné neb záporné, máme

$$K_\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-w\zeta} z^{s-1} dz}{1-e^{2x\pi i-\zeta}} - e^{-s\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{w\zeta} z^{s-1} dz}{1-e^{2x\pi i+\zeta}} ,$$

takže po rozvinutí obou integrálů v nekonečné řady obdržíme

$$K_\alpha = \Gamma(s)\left[\mathfrak{R}(w, x, s) + e^{-(s+2x)\pi i}\,\mathfrak{R}(1-w, 1-x, s)\right] ,$$

což dle vzorce Lipschitzova rovná se veličině

$$(2\pi)^s e^{-\frac{1}{2}s\pi i + 2wx'\pi i}\,\mathfrak{R}(1-x, w, 1-s) , \qquad (w'=1-w) ,$$

a tedy máme vztah:

$$K_\alpha = (2\pi)^s e^{\left(-\frac{1}{2}s+2w(1-x)\right)\pi i}\,\mathfrak{R}(1-x, w, 1-s) . \tag{5}$$

Tento vzorec lze však dokázati přímo z definice (4), čímž se obdrží zároveň nový důkaz vztahu Lipschitzova.

Předpokládejme za tím účelem, že v, x jsou pravé zlomky a že Real. $s<1$; pak uvažujme integrál

$$\overline{K}_{M,N} = \int \frac{e^{-w(\zeta-\alpha i)}(z-\alpha i)^{s-1} dz}{1-e^{2x\pi i-\zeta+\alpha i}}$$

vzatý podél přímých cest $(-M \ldots M)$, $(M \ldots . M-Ni)$, $(M-Ni \ldots . -M-Ni)$, $(-M-Ni \ldots . -M)$, při čemž $N=-2\pi x-\alpha+(2k+1)\pi$, kde k je velké kladné číslo celistvé. Pro lim $M=\infty$, lim $k=\infty$ mizí poslední tři integrály částečné a máme tedy

$$\lim_{M=\infty, N=\infty} \overline{K}_{M,N} = K_\alpha .$$

Avšak dle známé věty Cauchyovy o residuích funkcí jednoznačných bude integrál $\overline{K}_{M,N}$ roven součinu $-2\pi i$ se součtem residuí funkce integrované na všech pólech obsažených uvnitř kontury integrační, která je zde rovnoběžníkem o vrcholech $\pm M, \pm M-Ni$. Póly funkce integrované jsou zde kořeny rovnice

$$1-e^{2x\pi i-\zeta+\alpha i}=0 ,$$

tedy $z=2x\pi i+\alpha i-2n\pi i, (n=1,2,3, \ldots)$

Z těchto leží pouze $n=1,2,3, \ldots k$ uvnitř kontury integrační a příslušná residua jsou

$$e^{-w(2x\pi i-2n\pi i)}(2x\pi i-2n\pi i)^{s-1} ,$$

takže obdržíme

$$\overline{K}_{M,N} = -2\pi i \sum_{n=1}^{k} e^{2nw\pi i - 2wx\pi i} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1}$$

a odtud přechodem k limitě pro $M = \infty$, $k = \infty$:

$$K_a = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nw\pi i - 2wx\pi i} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1}$$

Avšak

$$(2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1} = [-2\pi i (n-x)]^{s-1}$$
$$= (2\pi)^{s-1} (n-x)^{s-1} e^{-\frac{1}{2}(s-1)\pi i},$$

následovně

$$K_a = (2\pi)^s e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nw\pi i - 2wx\pi i}}{(n-x)^{1-s}},$$

což jest právě výraz (5). Tím dokázána věta Lipschitzova podruhé.

Píšemeli ve vzorci (5) $1-w, x, 1-s$ místo x, w, s, obdržíme

$$(5^*) \quad \mathfrak{R}(w,x,s) = e^{-\pi i (\frac{s}{2} + 2wx)} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x(\zeta - \alpha i)} (z - \alpha i)^{-s} dz}{1 - e^{-2w\pi i - \zeta + \alpha i}}.$$

Zcela podobným způsobem dokážeme vzorec

$$(6) \quad \mathfrak{R}(w,x,s) = e^{\pi i \left(\frac{s}{2} + 2(1-x)w\right)} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1-x)(\zeta + \alpha i)} (z + \alpha i)^{-s} dz}{1 - e^{2w\pi i - \zeta - \alpha i}},$$

kde α je kladná veličina, jíž možno uděliti hodnoty jistého intervallu $(0 \ldots . \alpha_o)$, tak aby pro všecka α tohoto intervallu a pro všecka realná z funkce $1 - e^{2w\pi i - \zeta - \alpha i}$ stále byla od nully různa. Na př. možno voliti $\alpha = w\pi$; tím obdržíme

$$(6^a) \quad \mathfrak{R}(w,x,s) = e^{\frac{1}{2}s\pi i + (1-x)w\pi i} (2\pi)^s \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1-x)\zeta} (z + w\pi i)^{-s} dz}{1 - e^{w\pi i - \zeta}}.$$

Volímeli ve vzorci (5*) — kde $0 < \alpha < 2w\pi$ — hodnotu $\alpha = w\pi$, máme vzorec podobný:

$$(6^b) \quad \mathfrak{R}(w,x,s) = e^{-\frac{1}{2}s\pi i - wx\pi i} (2\pi)^s \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\zeta} (z - w\pi i)^{-s} dz}{1 - e^{-w\pi i - \zeta}}.$$

§. 5. Elementarné odvození vztahu Lipschitzova.

Předpokládámeli, že pomyslná část veličiny x je kladná, bude řada

$$f(w) = e^{2wx\pi i} \mathfrak{R}(w,x,1-s) = \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} e^{2x(w+n)\pi i}$$

konvergovati absolutně a vůči w stejnoměrně při všech s. Předpokládejme dále Real. $s > 1$, aby výraz byl funkce konečná a spojitá proměnné w v celém

intervallu $(0 \ldots 1)$. Jakožto funkce analytická hoví tato veličina Dirichletovským podmínkám pro konvergenci rozvoje Fourierova, a bude tedy lze ustanoviti stálé veličiny A_ν tak, aby v mezeře $(0 \ldots 1)$ platil rozvoj

$$f(w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu w\pi i},$$

kde

$$A_\nu = \int_0^1 f(w)\, e^{-2\nu w\pi i}\, dw.$$

Dosadímeli sem za $f(w)$ hořejší řadu, obdržíme

$$A_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (w+n)^{s-1} e^{2x(\nu+n)\pi i - 2\nu w\pi i}\, dw,$$

a transformujemeli tento integrál substitucí $w + n = z$, a uvážíme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} = \int_0^{\infty},$$

máme vzorec

$$A_\nu = \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{2(x-\nu)z\pi i}\, dz;$$

poněvadž dle supposice $-ix$ je kladné ve své části realné, máme

$$A_\nu = \int_0^{\infty} e^{-2\pi(-ix+i\nu)z} z^{s-1}\, dz = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s(-ix+i\nu)^s}.$$

Hledaný rozvoj funkce $f(w)$ zní tedy

$$e^{2wx\pi i}\,\Re(w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu w\pi i}}{(-ix+i\nu)^s}. \tag{1}$$

Podržíli tu w realnou hodnotu z intervallu $(0 \ldots 1)$, můžeme převésti spojitým přechodem proměnnou s (aneb její část realnou) a po té veličinu x v tutéž mezeru $(0 \ldots 1)$, aniž vzorec postrádá platnosti. Poněvadž tu pak

$$(-ix+i\nu)^s = e^{\frac{1}{2}s\pi i}(\nu - x)^s, \qquad \nu > 0,$$
$$(-ix-i\nu)^s = e^{-\frac{1}{2}s\pi i}(\nu + x)^s, \qquad \nu \geqq 0,$$

máme výsledek

$$e^{2wx\pi i}\,\Re(w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left[e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{2\nu w\pi i}}{(\nu-x)^s} + e^{\frac{1}{2}s\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{-2\nu w\pi i}}{(\nu+x)^s}\right],$$

jenž splývá se známou reciprocitou Lipschitzovou.

Podržme supposice, jež vedly ke vzorci (1), toliko veličina s buď v realné části kladnou, jinak libovolnou. Kladme v (1) $x = u + \mu\,\omega\,i$, kde u, ω jsou kladné, násobme obě strany $e^{2\mu v \pi i}$, kde $0 < v < 1$, a sečtěme výsledky pro $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ I obdržíme tak vzorec následující:

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+n)^{s-1}\, e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi\, w+n)-2v\pi i}-1} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(-ui+\mu\omega+iv)^s}.$$

Vzorec ten vede k zajímavým výsledkům, omezímeli se na celistvá $s = m$. Máme tak vzorec

$$(2^a)\qquad (m-1)!\left(\frac{i}{2\pi}\right)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(u+\mu\omega i-v)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+n)^{m-1}\, e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n)-2v\pi i}-1},$$

v němž m značí celistvé kladné číslo, u veličinu realnou aneb komplexní s kladnou částí pomyslnou, a $0 < w < 1$; dále musí Real. $\omega > 0$, Im. $v \geqq 0$

Pomocí vzorce (2^a) můžeme obdržeti součet řady dvojnásobné

$$(3)\qquad \bar{S}(u, v, w, \omega)_m = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(u+\mu\omega i-v)^m},$$

která má význam pro realná v, w, jež obě buďte obsažena v mezích $(0 \ldots 1)$, a pro libovolná komplexní u, různá od »period« $\mu\omega i - v$.

Je totiž

$$\bar{S}(u)_m = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} + \sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} + \sum_{\mu=0;(\nu=-\infty \ldots \infty)},$$

kde pod znamením summačním stojí týž výraz jako v (3). Avšak

$$\sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(u+\mu\omega i-v)^m} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(-\mu v+\nu w)}}{(u-\mu\omega i-v)^m};$$

píšemeli zde $-v$ místo v a vyloučímeli v jmenovateli činitele $(-1)^m$, obdržíme poslední veličinu ve tvaru

$$(-1)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(-\mu v+\nu(1-w))}}{(-u+\mu\omega i-v)^m}.$$

Volímeli u realným, můžeme užiti vzorce (2^a), takže

$$\sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} = \frac{(-1)^m(-2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1-w)^{m-1}\, e^{-2u\pi i(n+1-w)}}{e^{2\omega\pi(n+1-w)+2v\pi i}-1}.$$

Bude tedy

$$(3^*)\quad \begin{cases} \bar{S}(u\,,v\,,w\,,\omega)_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{2\nu w\pi i}}{(u-\nu)^m} \\ + \dfrac{(-2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \dfrac{(w+n)^{m-1} e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n-2v\pi i}-1} - \dfrac{(w-n-1)^{m-1} e^{2u\pi i(w-n-1)}}{e^{2\omega\pi(n+1-w)+2v\pi i}-1} \right\}. \end{cases}$$

Řada v pravo konverguje vlastně, pokud pomyslná část u leží v mezích $-\frac{\omega}{w}$ a $\frac{\omega}{w}$; pro tato komplexní u tedy platí vztah (3*).

Znamenejme nyní $\omega\,,\omega'$ dvě komplexní veličiny, jichž poměr $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ je ve své pomyslné části kladným, $v\,,v'$ buďte dva realné pravé zlomky, a znamenejme při komplexním u

$$(4)\qquad S(u\,;v\,,v'\,;\omega\,,\omega')_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu v')}}{(u+2\mu\omega+2\nu\omega')^m}\,.$$

Pak bude

$$S(u\,;v\,,v'\,;\omega\,,\omega')_m = \frac{1}{(2\omega)^m}\,\bar{S}\left(\frac{u}{2\omega}\,,v'\,,1-v\,,\frac{\tau}{i}\right)_m,$$

tedy dle (3*)

$$(4^*)\qquad S(u\,;v\,,v'\,;\omega\,,\omega')_m = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\mu v\pi i}}{(u+2\mu\omega)^m}$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{-\pi i}{\omega}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n+1-v)^{m-1}\,e^{\frac{(n+1-v)\,u\pi i}{\omega}}}{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\omega v'-\omega' v+(n+1)\omega')}-1}\right.$$

$$\left.+(-1)^m\,\frac{(n+v)^{m-1}\,e^{-\frac{(n+v)\,u\pi i}{\omega}}}{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\omega' v-\omega v'+n\omega')}-1}\right\}.$$

Z řad tohoto typu byla uvažována ona, jež přísluší ku $m=1$, p. Kroneckerem v jeho zajímavých pracích o funkcích elliptických.*)

Slavný mathematik uvažuje na jmenovaném místě řadu

$$\text{Ser.}\,(\xi\,,\eta\,,u\,,v\,,w) = \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\xi+n\eta)\pi i}}{u+mv+nw}\,,$$

kterou bychom po našem způsobu označili $S(u\,;\xi\,,\eta\,;v\,,w)_1$. Naše řady $S(u)_m$ obdrží se odtud $(m-1)$ násobným differencováním vůči u, takže stačí se omeziti na případ Kroneckerův; nicméně zdálo se nám záhodno ukázati na uvedených příkladech, že lze Lipschitzovy funkce $\mathfrak{R}(w\,,n\,,s)$ také v theorii funkcí elliptických s prospěchem užívati, o čemž nám bude na jiném místě dána příležitost jednati.

*) Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wiss. 1889—1890, Článek XX, §. 5.

Naše řady konvergují bezpodmínečně teprve při $m > 2$. Za této suppose bude patrně

$$S(u + 2\omega) = e^{-2v\pi i} S(u) ,$$
$$S(u + 2\omega') = e^{-2v\pi i} S(u) ,$$

takže $S(u)_m$ je dvojperiodickou funkcí druhého způsobu, stupně m, a dá se vyjádřiti pomocí funkcí sigma. Poznamenejme pouze, že pro $2\omega = 1$, $2\omega' = \tau$ bude součin

$$S(u ; v , v' ; \tfrac{1}{2} , \tfrac{\tau}{2})_m \cdot \vartheta_1 (u \mid \tau)^m e^{(2v+m)u\pi i}$$

dán výrazem tvaru

$$\sum_{r=1}^{m} A_r e^{2ru\pi i} \vartheta_3 (mu + v\tau - v' + m\tfrac{\tau+1}{2} + r\tau \mid m\tau) ,$$

kde $A_r \vartheta_1 (v\tau - v' \mid \tau)$ je celistvá funkce transcendentní veličin v , v'.

§. 6. Trigonometrický rozvoj řady Ml. (v, w, u, s).

Po tomto odbočení, k němuž nám zavdala podnět řada $\mathfrak{R}(w, x, s)$, vraťme se k veličině uvažované v §. 2:

$$(1) \qquad \text{Ml.}(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}} ,$$

kterou hodláme rozšířiti i na komplexní w a podati její trigonometrický rozvoj vůči w po způsobu, jenž nám jest znám již od r. 1887.

V naší řadě musí nade vši pochybnosť v býti veličina realná, kterou smíme předpokládati v mezeře $(0 \ldots 1)$; dále musí, máli řada býti absolutně konvergentní, realná část veličiny s býti větší než 1; ke konvergenci vůbec stačí však podmínka Real. $s > 0$, která je zároveň nutnou; při tom ale musí v posledním případě v býti různo od krajních hodnot $0, 1$.

Jelikož analytická funkce z^s je mnohoznačná, musíme ukázati, v jakých mezích dlužno voliti proměnné u, w, aby členové řady byli funkce pravidelné v jistém oboru.

Veličinu w chceme považovati za volně proměnnou uvnitř jistého pásu obsahujícího osu realnou. To by nebylo možným, kdyby u bylo ryze pomyslným, poněvadž by pak na ose realné existovalo nekonečně mnoho hodnot w, na nichž by členové řady $\left[(w+n)^2 - (\frac{u}{i})^2 = 0\right]$ stali se neurčitými aneb nekonečnými. Položme tedy $u = a + bi$ a volme $a \gtrless 0$. Kritické body w našeho výrazu budou pak dány rovnicemi $(w+n)^2 + u^2 = 0$, tedy

$w = -n \pm u\,i$, a budou tudíž rozloženy na dvou rovnoběžkách s osou realnou vedených u vzdálenosti a po obou stranách od této. *Pás obsažený mezi těmato rovnoběžkama* (jichž rovnice jsou $y = a$, $y = -a$) *nazveme hlavním a označíme* (w).

Pro hodnoty w obsažené uvnitř hlavního pásu (w) žádná z veličin $(w+n)^2+u^2$ není zápornou neb nullou. Klademeli totiž $w+n = \xi + i\eta$, $u = a + i\,b$, $a > 0$, máme

$$(w+n)^2+u^2 = \xi^2 - b^2 + (a^2 - \eta^2) + 2\,i\,(\xi\,\eta + a\,b)\,,$$

kterážto veličina stane se realnou pouze pro $\xi = -\frac{a}{\eta}\,b$; pro tuto hodnotu ξ je však $\xi^2 - b^2$ kladným, ano $|\eta| < a$, a taktéž $a^2 - \eta^2$. Jeli tedy v oboru (w) výraz $(w+n)^2+u^2$ realným, jest nutně kladným.

Následkem této okolnosti bude

$$\log\left[(w+n)^2+u^2\right],$$

kde logarithmus je přirozený a jednoznačně dán podmínkou, aby pomyslná část jeho byla v mezích $(-\pi \ldots \pi)$, patrně funkcí pravidelnou, takže definujemeli

$$\left[(w+n)^2+n^2\right]^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2}\log\left[(w+n)^2+u^2\right]},$$

budou členové řady (1) funkce pravidelné v celém oboru (w).

Jedná se pouze o důkaz, že řada (1) konverguje *stejnoměrně* vůči w v okolí každého místa uvnitř oboru (w), jakmile realná část veličiny s je kladnou, a v pravý zlomek.

Za tím účelem uvažujme řadu

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+n)^2+u^2\right]^{\frac{s}{2}}} - \frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+n)^2\right]^{\frac{s}{2}}}\right\},$$

jejíž absolutní konvergence jest patrna. Zároveň konverguje tato řada stejnoměrně vůči w v okolí každého místa uvnitř oboru (w), jež není celistvým. Neboť její vzdálení členové jsou menší než příslušní členové řady $\sum \frac{c}{n^2}$, kde c značí určitou kladnou konstantu.

Dokážemeli tedy, že řada

$$\sum \frac{e^{2nv\pi i}}{\left[(w+n)^2\right]^{\frac{s}{2}}}$$

konverguje stejnoměrně v okolí řečených míst, bude tím též dokázána stejnoměrná konvergence řady (1).

Poslední řada však se skládá ze dvou jiných, jež jsou tvaru

$$\mathfrak{R}(\overline{w}, x, s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{e^{2vx\pi i}}{(\overline{w}+v)^s},$$

kde $x = v$ neb $1 - v$, a $\overline{w} = w + m$ resp. $m - w$, Real. $\overline{w} > 0$; zajisté lze toho docíliti po vyloučení konečného počtu členů z (1).

Jelikož Real. $\overline{w}$ i Real. s jsou kladné, máme

$$\frac{1}{(\overline{w}+n)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-(\overline{w}+n)z} z^{s-1} dz,$$

a tedy

$$S_r = \sum_{v=0}^{r-1} \frac{e^{2vx\pi i}}{(\overline{w}+v)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\overline{w}z} z^{s-1} \cdot \frac{1 - e^{r(2x\pi i - z)}}{1 - e^{2x\pi i - z}} dz.$$

Jelikož x není celistvé, bude jmenovatel funkce integrované vždy od nully různým, takže integrál

$$K = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\overline{w}z} z^{s-1} dz}{1 - e^{2x\pi i - z}}$$

je veličinou zcela určitou; máme pak

$$S_r = \frac{K}{\Gamma(s)} - \frac{e^{2rx\pi i}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\overline{w}z - rz} z^{s-1} dz}{1 - e^{2x\pi i - z}};$$

poslední integrál však blíží se nulle, rosteli z přes všecky meze, a to patrně rychlostí nezávislou na $\overline{w}$; t. j. řada S_r blíží se s rostoucím r stejnoměrně vůči w své hodnotě $\frac{K}{\Gamma(s)}$, čili jinými slovy, řada $\mathfrak{R}(\overline{w}, x, s)$ konverguje stejnoměrně. Tím dokázána též stejnoměrnosť konvergence řady (1).

Bezprostředním následkem toho dle známé věty Weierstrassovy jest, že Ml.(v, w, u, s) *jest funkcí analytickou proměnné* w, *která se chová pravidelně v oboru* (w).

Výraz

$$\Phi(w) = e^{2vw\pi i} \text{Ml.}(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(w+n)v\pi i}}{\left[(w+n)^2 + u^2\right]^{\frac{s}{2}}}$$

hoví pak podmínce $\Phi(w+1) = \Phi(w)$ a dá se dle známé věty Laurentovy vyjádřiti řadou tvaru

$$\Phi(w) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{2vw\pi i},$$

konvergentní v oboru (w). Součinitel A_v dán jest vzorcem

$$A_v = \int_0^1 \Phi(w)\, e^{-2vw\pi i}\, dw\,,$$

a obdrží se tedy po dosazení výrazu za $\Phi(w)$ ve tvaru nekonečné řady*)

$$A_v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{2v(w+n)\pi i - 2vw\pi i}}{\left[(w+n)^2 + u^2\right]^{\frac{s}{2}}}\, dw\,;$$

přetvořímeli obecný člen substitucí $w + n = x$, a sečtemeli řadu dle vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty},$$

máme

$$A_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-v)\pi i}}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}\, dx\,, \tag{2}$$

při kterémžto označení platí rozvoj

$$e^{2vw\pi i}\,\mathrm{Ml.}\,(v, w, u, s) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v\, e^{2vw\pi i}\,. \tag{3}$$

Porovnámeli tento výsledek se vzorci (3) a (4) §. 2, obdržíme

$$A_n = 2\sin\frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi|n-v|\sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s}\, dx}{\sqrt{u^2+x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-n)\pi i}\, dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}\,, \tag{4}$$

kde prvý integrál ovšem existuje pouze za supposice Real. $s < 2$.

§. 7. Transformace veličiny A_n. Funkce Besselovy.

Výraz A_n je tvaru

$$\varphi(z, u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2tzi}\, dt}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2zt\, dt}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}}\,, \tag{1}$$

a sice $A_n = \varphi(v\pi - n\pi, u, s)$ aneb, chcemeli zavésti kladná z,

$$A_n = \varphi(\pi|v-n|, u, s)\,.$$

*) Neb stejnoměrně konvergentní řady lze integrovati po členech.

Předpokládámeli, že realná část veličiny u^2 je kladná, můžeme výraz $\varphi(z,u,s)$ přetvořiti takto: veličinu

$$\frac{1}{(u^2+t^2)^{\frac{s}{2}}}$$

pod znamením integračním nahradíme vzorcem

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty e^{-(u^2+t^2)x}\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\,,$$

čímž vznikne dvojnásobný integrál

$$\varphi(z,u,s)=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2tz i}\,dt\int_0^\infty e^{-(u^2+t^2)x}\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\,,$$

a obrácením pořádku integračního:

$$\varphi(z,u,s)=\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty e^{-u^2x}x^{\frac{s}{2}-1}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2x+2zit}\,dt\,.$$

Vnitřní integraci lze provésti dle vzorce

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+2bit}\,dt=\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{a}}\,, \tag{2}$$

jejž obdržíme buď užitím věty Cauchyovy aneb též jinými cestami; máme pak

$$\varphi(z,u,s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty e^{-u^2x-\frac{z^2}{x}}\,x^{\frac{s-3}{2}}\,dx\,, \tag{3}$$

kterýžto výraz jest jedním z nejzajímavějších tvarů, v nichž lze integrál A_n vyjádřiti. Všimněme si jen té okolnosti, že pokud realné části veličin u^2, z^2 jsou kladné (záporny býti nesmějí), *integrál tento konverguje pro všecka konečná s.*

Píšemeli v integrálu (3) $x=\frac{z}{u}t$, obdržíme tvar jednodušší

$$\varphi(z,u,s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\,(\tfrac{z}{u})^{\frac{s-1}{2}}\int_0^\infty e^{-uz(t+\frac{1}{t})}\,t^{\frac{s-3}{2}}\,dt\,, \tag{3a}$$

při čemž jsme předpokládali, že u, z jsou veličiny realné a kladné. Jiného tvaru docílíme substitucí $t=t'^2$, násobímeli obě strany e^{-2uz}; znamenámeli pro pohodlí hodnotu integrálu literou J, máme tak píšíce $uz=a$:

$$J\,.\,e^{-2a}=2\int_0^\infty e^{-a(t+\frac{1}{t})^2}\,t^{s-2}\,dt\,.$$

Rozložímeli zde v $\int_0^1 + \int_1^\infty$, a klademeli v obou částech $t + \frac{1}{t} = 2r$, tedy $t = r - \sqrt{r^2 - 1}$ v prvé, a $t = r + \sqrt{r^2 - 1}$ v druhé části, obdržíme tak výsledek

$$(4) \quad \varphi(z,u,s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{2uz} \int_1^\infty e^{-4uzr^2} \frac{(r+\sqrt{r^2-1})^{s-1} + (r-\sqrt{r^2-1})^{s-1}}{\sqrt{r^2-1}} dr.$$

Kdybychom však byli integrál J násobili e^{2a}, obdrželi bychom

$$J e^{2a} = 2 \int_0^\infty e^{-a\left(t-\frac{1}{t}\right)^2} t^{s-2}\, dt\,;$$

zde můžeme klásti $t - \frac{1}{t} = 2r$, načež bude r probíhati intervall $(-\infty \ldots \infty)$, a my obdržíme:

$$(5) \quad \varphi(z,u,s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2uz} \int_{-\infty}^\infty e^{-4uzr^2} \frac{(r+\sqrt{r^2+1})^{s-1} dr}{\sqrt{r^2+1}}\,.$$

Píšemeli v integrálu (3) $\frac{1}{x}$ za x, obdržíme

$$(6) \quad \Gamma(\tfrac{s}{2})\, \varphi(z,u,s) = \Gamma(1-\tfrac{s}{2})\, \varphi(u,z,2-s)\,,$$

kterážto relace vyjádřená pomocí integrálu (1) zní:

$$(6^a) \quad \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2vzi}\, dv}{(u^2+v^2)^s} = \Gamma(1-s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2uvi}\, dv}{(z^2+v^2)^{1-s}}\,,$$

při čemž jsme psali s místo $\frac{s}{2}$.

Další vlastnosti těchto transcendent plynou z differencialné rovnice linearné druhého řádu, jíž hoví funkce φ. Za tím účelem zaveďme integrál

$$\Phi(u,v,s) = \int_0^\infty e^{-ut-\frac{v}{t}} t^{s-1}\, dt\,, \qquad \text{Real. } u > 0\,, \quad \text{Real. } v > 0\,.$$

Differencujemeli pod znamením integračním, obdržíme

$$D_u \Phi(u,v,s) = -\Phi(u,v,s+1)\,.$$

Integrací identity

$$d\left(e^{-ut-\frac{v}{t}} t^{s+1}\right) = -u e^{-ut-\frac{v}{t}} t^{s+1}\, dt + v e^{-ut-\frac{v}{t}} t^{s-1}\, dt + (s+1) e^{-ut-\frac{v}{t}} t^s\, dt$$

v mezích 0 a ∞ obdržíme

$$0 = -u\Phi(u,v,s+2) + v\Phi(u,v,s) + (s+1)\Phi(u,v,s+1)\,,$$

a odtud se zřetelem k rovnici posledně vyvozené

$$D_u{}^2 \Phi(u,v,s) + \frac{s+1}{u} D_u \Phi(u,v,s) - \frac{v}{u} \Phi(u,v,s) = 0 ,$$

t. j. výraz $x = \Phi(u,v,s)$ hoví linearné rovnici differencialné druhého řádu

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{s+1}{u} \frac{dx}{du} - \frac{v}{u} x = 0 , \tag{7}$$

které vyhovují obě řady

$$x = E(uv,s) , \qquad x = u^{-s} E(uv,-s) ,$$

kde v souhlasu s §. 2 znamenáno

$$E(z,s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+1)} .$$

Okolnosť tu lze počtem přímo verifikovati. Je totiž v prvém případě

$$x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^\mu v^\mu}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+1)} , \qquad \frac{dx}{du} = \sum_{\mu} \frac{u^\mu v^{\mu+1}}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+2)} ,$$

$$u \frac{d^2x}{du^2} = \sum_{\mu} \frac{\mu u^\mu v^{\mu+1}}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+2)} ,$$

a tedy

$$u \frac{d^2x}{du^2} + (s+1) \frac{dx}{du} - vx = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+s+1)\, u^\mu v^{\mu+1}}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+2)} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^\mu v^{\mu+1}}{\mu!\, \Gamma(s+\mu+1)} = 0 .$$

Nalezená řešení jsou různá, pokud s není číslo celistvé; že výrazy $E(uv,s)$, $u^{-s} E(uv,-s)$ splývají pro $s = 0$, je přímo patrno; zbývá ukázati jich rovnosť pro celistvá s od nully různá, a sice stačí uvažovati toliko kladná s. Tu pak máme

$$E(z,-s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!\, \Gamma(-s+\mu+1)} = \sum_{\mu=s}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!\, (\mu-s)!} ,$$

což lze psáti

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^{\mu+s}}{(\mu+s)!\, \mu!} = z^s E(z,s) .$$

V tomto případě se obě uvedená řešení rovnice (7) liší toliko stálým činitelem a nejsou podstatně různa. Tento případ chceme vyloučiti.

Pokud s není celistvé číslo, bude obecný integrál rovnice (7) dán výrazem

$$x = A E(uv,s) + B u^{-s} E(uv,-s) ,$$

kde A, B nezávisí na u. Tyto konstanty třeba tak ustanoviti, aby

$$\Phi(u,v,s) = A E(uv,s) + B u^{-s} E(uv,-s) .$$

Volme zde $v = 1$, takže máme

$$\text{(a)} \qquad \int_0^\infty e^{-ut-\frac{1}{t}} t^{s-1}\, dt = A\,E(u,s) + B\,u^{-s}\,E(u,-s)\,.$$

Substitucí $\frac{1}{tu}$ za t přejde levá strana v

$$\text{(b)} \qquad u^{-s} \int_0^\infty e^{-ut-\frac{1}{t}} t^{-s-1}\, dt = A'u^{-s}\,E(u,-s) + B'E(u,s)\,,$$

kde A, B, A', B' závisejí toliko na s.

Z rovnice (a) vyvoďme dvě jiné volbou $u = 1,2$; z těchto rovnic se pak obdrží A, B jakožto určité funkce analytické $A(s)$, $B(s)$ veličiny s, načež $A'(s) = A(-s)$, $B'(s) = B(-s)$. Jelikož výrazy (a), (b) znamenají tutéž veličinu, máme porovnáním $A' = B$, $B' = A$, tedy

$$B(s) = A(-s)\,.$$

Následkem toho stačí se omeziti na určení funkce $A(s)$ a poněvadž ta jest analytickou, stačí ji ustanoviti pro $s < 0$. Klademeli v (a) nullu za u, máme

$$\frac{A(s)}{\Gamma(s+1)} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{t}} t^{s-1}\, dt = \Gamma(-s)\,,$$

takže plyne

$$A(s) = -\frac{\pi}{\sin s\pi}\,, \qquad B(s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}\,.$$

Máme tak

$$-\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-ut-\frac{1}{t}} t^{s-1}\, dt = E(u,s) - u^{-s}\,E(u,-s)\,,$$

a píšemeli $\frac{t}{v}$ za t, uv za u, máme konečně

$$\text{(8)} \qquad -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-ut-\frac{v}{t}} t^{s-1}\, dt = v^s\,E(uv,s) - u^{-s}\,E(uv,-s)\,,$$

dle kteréhožto vzorce obdržíme vůči relaci (3)

$$\varphi(z,u,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\, \Phi(u^2, z^2, \tfrac{s-1}{2})$$

$$\text{(8a)} \qquad \varphi(z,u,s) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})\cos\frac{s\pi}{2}} \left[z^{s-1}\,E(u^2z^2, \tfrac{s-1}{2}) - u^{1-s}\,E(u^2z^2, \tfrac{1-s}{2}) \right].$$

Funkci $E(x,s)$ možno vyjádřiti omezeným integrálem, jejž obdržíme přímo z definice

$$E(x,s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!\,\Gamma(s+\mu+1)} = \frac{\sin s\pi}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1}\,\Gamma(-s-\mu)\,\frac{x^\mu}{\mu!}\,,$$

užijeli se známého vzorce:

$$\Gamma(-s-\mu) = -\frac{e^{s\pi i}}{2i\sin s\pi} \int_{(\infty,0,\infty)} e^{-t}\,t^{-s-\mu-1}\,dt\,,$$

kde cesta integrační obkličuje kladnou část osy realné obíhajíc jistý pruh ji obsahující v kladném směru. Na př. lze tu voliti za složky cesty integrační intervall $\infty \ldots \omega$, kružnici $|t| = \omega$, a intervall $\omega \ldots \infty$. Jiná cesta by byla parabola o rovnici v pravoúhlé soustavě ξ, η:

$$\eta^2 = 2p(\xi+\omega)\,, \qquad t = \xi + i\eta\,.$$

Substitucí nalezeného integrálu do hořejší řady obdržíme

$$E(x,s) = \frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \int_{(\infty,0,\infty)} e^{-t}\,t^{-s-1}\left(\tfrac{x}{t}\right)^\mu dt\,,$$

a provedemeli součet pod znamením integračním,

$$E(x,s) = \frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \int_{(\infty,0,\infty)} e^{-t-\frac{x}{t}}\,t^{-s-1}\,dt\,. \tag{9}$$

Připomeňme, že tu mocnosť t^{-s} je dána jednoznačně rovnicí

$$t^{-s} = e^{-s\log t}\,,$$

při čemž logarithmus má na severním břehu kladné osy realné hodnotu realnou a v ostatní rovině je spojitý a jednoznačný, takže na záporním (jižním) břehu kladné osy realné má pomyslnou část rovnu $2\pi i$. Předpokládejme, že složky cesty integrační v (9) jsou $(\infty \ldots \frac{1}{\omega})$, $|t| = \frac{1}{\omega}$, $(\frac{1}{\omega} \ldots \infty)$, a transformujme integrál substitucí $t = \frac{1}{t'}$. Tu proměnná t' probíhá nejprve intervall $(0 \ldots \omega)$, pak kružnici $|t'| = \omega$ ve směru záporném a konečně intervall $(\omega \ldots 0)$. Tu pak $\log\frac{1}{t'}$ má na $(0 \ldots \omega)$ pomyslnou část rovnu nulle, ale na $(\omega \ldots 0)$ rovnu $2\pi i$, takže $\log t'$ má na první složce integrační cesty pomyslnou část rovnu rovněž nulle, ale na poslední složce $(\omega \ldots 0)$ rovnu $-2\pi i$, jak skutečně vyžaduje spojitosť funkce $\log t'$; vzorec (9) pak přejde v rovnici:

$$E(x,s) = -\frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \int e^{-\frac{1}{t}-tx}\,t^{s-1}\,dt\,,$$

kde integrace se děje podél cesty složené z úseku $(0 \ldots \omega)$, z kružnice $|t| = \omega$ ve směru záporném proběhnuté a z úseku $(\omega \ldots 0)$, a logarithmus t má na záporném břehu kladné osy realné hodnotu realnou.

Znamenejme nyní x kladnou veličinu realnou a transformujme integrál pro $E(x^2, s)$ substitucí $\frac{t}{x}$ za t, čímž obdržíme, volíce $\omega = x$:

$$E(x^2, s) = -\frac{e^{s\pi i}}{2\pi i\, x^s} \int e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{s-1}\, dt\,,$$

kde t probíhá intervall $(0 \ldots 1)$, záporný oběh kruhu $|t| = 1$, a konečně intervall $(1 \ldots 0)$. V prostřední složce lze klásti $t = e^{-i\vartheta}$, kde ϑ probíhá intervall $(0 \ldots 2\pi)$. Na první cestě $(0 \ldots 1)$ je logarithmus t realný, na druhé je $\log t = -i\vartheta$, na třetí $\log t = \log|t| - 2\pi i$, takže integrál sestává z částí

$$\int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{s-1}\, dt - i\int_0^{2\pi} e^{-x\left(e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}\right)} e^{-si\vartheta}\, d\vartheta + \int_1^0 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} e^{-(s-1)\,2\pi i}\, t^{s-1}\, dt\,,$$

z čehož následuje

$$x^s E(x^2, s) = -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{s-1}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2x\cos\vartheta + is(\pi-\vartheta)}\, d\vartheta\,;$$

v posledním integrálu pišme ϑ místo $\pi - \vartheta$, a obdržíme

$$(10)\quad x^s E(x^2, s) = -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{s-1}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x\cos\vartheta} \cos s\vartheta\, d\vartheta\,.$$

Jiný výraz funkce E poskytne nám integrál

$$J = \int_{-1}^{1} e^{vz} (1 - z^2)^{s-1}\, dz\,;$$

jeho rozvoj dle mocností v zní patrně

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{v^\nu}{\nu!} \int_{-1}^{1} z^\nu (1 - z^2)^{s-1}\, dz\,;$$

součinitelé při lichých mocnostech v jsou patrně nullami a tedy zbývá

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{v^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_{-1}^{1} z^{2\nu} (1 - z^2)^{s-1}\, dz\,.$$

Avšak integrál

$$\int_{-1}^{1} z^{2\nu} (1 - z^2)^{s-1}\, dz = 2\int_0^1 z^{2\nu} (1 - z^2)^{s-1}\, dz$$

přejde substitucí $\sqrt{z}$ za z ve tvar

$$\int_0^1 z^{\nu-\frac{1}{2}} (1 - z)^{s-1}\, dz = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(s + \nu + \frac{1}{2}\right)}\,,$$

takže bude

$$J = \Gamma(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(2\nu)!\,\Gamma(s + \nu + \frac{1}{2})}\, v^{2\nu} .$$

Avšak

$$\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(2\nu)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^{\nu} \,.\, \nu!} ,$$

a tedy bude

$$J = \Gamma(s)\sqrt{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(s + \frac{1}{2} + \nu)} = \sqrt{\pi}\ \Gamma(s)\, E\left(\tfrac{v^2}{4}, s - \tfrac{1}{2}\right) ,$$

čili

$$E(v^2, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s + \frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} e^{2v\zeta} (1 - z^2)^{s - \frac{1}{2}}\, dz , \tag{11}$$

kde dlužno předpokládati Real. $s > -\frac{1}{2}$.

Další způsob vyjádření funkce $E(x, s)$ obdržíme pomocí integrálu

$$J = \int_{\mathfrak{A}} e^{\alpha x i} (1 - \alpha^2)^{s-1}\, d\alpha ,$$

vzatého v kladném směru po okraji oboru $\mathfrak{A}$, jenž sestává z půlkruhu sestrojeného v severní polovici roviny (α) na průměrem $(-R \ldots R)$, z něhož vyloučeny malé půlkruhy o poloměru ε a středech $\alpha = 1, -1$. Funkce $(1 - \alpha^2)^s$ definována jest výrazem $e^{s \log (1 - \alpha^2)}$, kde logarithmus je realným podél úseku $(-1 \ldots 1)$ a má býti spojitým uvnitř $\mathfrak{A}$. Z toho plyne, že

podél úseku $(-R \ldots -1)$ jest $(1 - \alpha^2)^s = e^{s\pi i} (\alpha^2 - 1)^s$,
» » $(1 \ldots R)$ » $e^{-s\pi i} (\alpha^2 - 1)^s$,

při čemž mocnosť $(\alpha^2 - 1)^s$ dlužno bráti ve smyslu arithmetickém.

Dle věty Cauchyovy o integraci v mezích komplexních bude integrál J nullou, a tedy

$$-e^{s\pi i} \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{\alpha x i} (\alpha^2 - 1)^{s-1}\, d\alpha + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{\alpha x i} (1 - \alpha^2)^{s-1}\, d\alpha$$

$$-e^{-s\pi i} \int_{1+\varepsilon}^{R} e^{\alpha x i} (\alpha^2 - 1)^{s-1}\, d\alpha + \left\{ \int_{(R)} + \int_{(1)} + \int_{(-1)} \right\} = 0 ,$$

kde tři integrály v závorce $\{\}$ vzaty jsou podél půlkruhů o poloměrech R, ε, ε a středech 0, 1, -1.

Jeli pak x realné a kladné, s kladné a menší než 1, mizí tyto tři integrály při přechodu k mezím pro $R = \infty$, $\varepsilon = 0$ a vychází tak vztah

$$\int_{-1}^{1} e^{\alpha x i} (1 - \alpha^2)^{s-1}\, d\alpha = 2 \int_{1}^{\infty} \cos(\alpha x - s\pi) \,.\, (\alpha^2 - 1)^{s-1}\, d\alpha ,$$

od něhož lze přejíti k rovnici

$$(12) \qquad E\left(-\tfrac{v^2}{4}, s\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)} \int_1^\infty \sin\left(v\alpha - s\pi\right) . \left(\alpha^2 - 1\right)^{s-\frac{1}{2}} d\alpha \ .$$

Nepátrali jsme v literatuře, nakolik vyvozené zde vlastnosti funkcí Besselových jsou novy aneb novým způsobem dokázány; jsouť zde tyto vlastnosti jen proto uvedeny, aby mladá naše intelligence mathematická nalezla zde vše, co pro studium Malmsténovských výrazů jest důležito.

§. 8. Funkční povaha řady Ml.

Vzorec (3) §. 6 obdrží po substituci hodnoty

$$A_n = \varphi\left(\pi \,|\, v - n \,|\, , u , s\right) ,$$

tedy na př.

$$A_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-u^2 x - \frac{\pi^2 (v-n)^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{|v-n|}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2\pi u |v-n|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u |v-n| r^2} \frac{\left(r+\sqrt{r^2+1}\right)^{s-1} dr}{\sqrt{r^2+1}}$$

tvar

$$(1^a) \qquad e^{2vw\pi i}\,\mathrm{Ml.}\,(v,w,u,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nw\pi i} \int_0^\infty e^{-u^2 x - \frac{\pi^2 (v-n)^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx$$

aneb též

b)
$$\begin{cases} e^{2vw\pi i}\,\mathrm{Ml.}\,(v,w,u,s) \\ = \dfrac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi i (nw + iu|v-n|)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u |v-n| r^2} \frac{\left(r+\sqrt{r^2+1}\right)^{s-1} dr}{\sqrt{r^2+1}} \end{cases} .$$

Ve vzorcích těchto veličina v předpokládána uvnitř mezery $(0 \ldots 1)$; veličina u má býti kladna ve své části realné při (1^b), kdežto vzorec (1^a) vyžaduje totéž pro u^2.

Lze ukázati, že za těchto okolností řady (1^a), (1^b) konvergují pro všecka konečná s. Konvergence jich dokázána dosud pro Real. $s > 0$ a zbývá tedy jen vyšetřiti případ Real. $s \leq 0$.

Pišme řadu (1^b) ve tvaru

$$\mathrm{Ml.}\,(v,w,u,s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i |n-v| (\varepsilon_n w + ui)} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} J_n ,$$

kde ε_n udává znamení veličiny $n - v$, a kde položeno

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u|v-n|r^2} (r+\sqrt{r^2+1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2+1}};$$

tu jest pak

$$J_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-4\pi u|v-n|r^2} \frac{(r+\sqrt{r^2+1})^{s-1} + (r+\sqrt{r^2+1})^{1-s}}{\sqrt{r^2+1}} dr,$$

tedy

$$J_n(s) = J_n(2-s);$$

jelikož při Real. $s < 0$ máme Real. $(2-s) > 2$, bude řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi i|n-v|(\varepsilon_n w + ui)} J_n(2-s)$$

konvergovati, any její vzdálené členy jsou menší než členové řady absolutně konvergentní

$$\sum |v-n|^{\frac{1-s}{2}} e^{2\pi i|n-v|(\varepsilon_n w + ui)} J_n(2-s).$$

Odtud plyne, že

$$\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) \text{Ml.}(v, w, u, s)$$

je celistvou funkcí transcendentní proměnné s, jakmile realná veličina v není číslem celistvým.

Že zde podmínku Real. $u > 0$ netřeba uváděti, je patrno z toho, že jsme případ ryze pomyslného u z předu vyloučili a že jedna z obou hodnot u, $-u$ má pak vždy realnou část kladnou.

Obraťme se nyní k meznému případu $v = 0$. Tu bude vzorec (1[b]) zníti

$$\text{Ml.}(0, w, u, s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2n\pi i(w+\varepsilon_n ui)} J_n,$$

kde $\varepsilon_n = \text{sgn.} n$ značí znamení čísla n, t. j. $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1, \ldots$ a

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u|n|r^2} (r+\sqrt{r^2+1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2+1}}.$$

Avšak pro $n = 0$ integrál

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (r+\sqrt{r^2+1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2+1}}$$

patrně nikdy neexistuje, takže výraz (1[b]) v tomto případě $v = 0$ stává se illusorním. Proto obraťme se ku vzorci (1[a]), v němž předpokládejme Real. $s > 1$, aby řada Ml. $(0, w, u, s)$ byla konvergentní. Přejděme v (1[a]) k mezím pro $v = 0$, a obdržíme

$$(2) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(w+n)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{2nw\pi i},$$

kde položeno

$$(3) \qquad K_n = \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx .$$

Poněvadž

$$K_0 = \int_0^{\infty} e^{-u^2 x} x^{\frac{s-3}{2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{u^{s-1}},$$

nacházíme *)

$$(4) \qquad \Gamma(\tfrac{s}{2}) \text{ Ml. } (0, w, u, s) = \Gamma(\tfrac{s-1}{2}) \sqrt{\pi}\, u^{1\ \ s} + 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos 2nw\pi .$$

Prvý člen pravé strany není celistvá funkce, za to ale nekonečná řada v druhém členu, okolnosť to, jež pro applikace je velmi důležitou.

§. 9. Řady Kroneckerovy.

Buďtež a, b, c realné veličiny, které definují kladnou formu kvadratickou

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 ;$$

dále buď s komplexní proměnná s kladnou částí realnou a větší než 1, takže dvojnásobná řada

$$(1) \qquad K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^s},$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

konverguje absolutně při realných σ, τ. Čárka při znamení Σ' naznačuje, že se má vynechati člen $m = n = 0$.

Předpokládejme, že σ, τ jsou pravé kladné zlomky od nully různé; jelikož forma $f(x, y)$ je kladnou, musí

$$a > 0, \qquad c > 0, \qquad ac - b^2 = \Delta > 0 .$$

*) Viz Lerch, dopis.

Značíli $\sqrt{\Delta}$ kladnou druhou odmocninu z Δ, položme

$$\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{c},$$

takže pak

$$f(x,y) = c\,[(\alpha x + y)^2 + \beta^2 x^2];$$

provedemeli nejprve sčítání vůči n, takže bude

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m,n)^s} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i . n\tau}}{f(0,n)^s}$$

čili

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{c^s\,[(\alpha m + n)^2 + \beta^2 m^2]^s} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2n\tau\pi i}}{c^s\,(n^2)^s},$$

kde čárky při znamení Σ' vyjadřují vynechání členu $m = 0$, resp. $n = 0$, můžeme k vyčíslení řady užiti vzorce (1ª) §. 8, z něhož plyne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{[(\alpha m + n)^2 + \beta^2 m^2]^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx;$$

a tedy

$$\sum_m{}' \sum_n \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m,n)^s}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{c^s\,\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx,$$

kde dlužno vynechati člen $m = 0$.

Dále jest

$$\text{(a)} \qquad \sum_n{}' \frac{c^{2\pi i . n\tau}}{c^s\,(n^2)^s} = \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = S,$$

takže obdržíme

$$\text{(2ª)} \quad \begin{cases} K(a,b,c;\sigma,\tau;s) = \dfrac{2}{c^s} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} \\ \\ + \dfrac{\sqrt{\pi}}{c^s\,\Gamma(s)} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx. \end{cases}$$

Dvojnásobná řada v pravo konverguje velmi rychle, jak o tom svědčí vzorec (5) §. 7:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$2\pi^{s-\frac{1}{2}} \left|\frac{n-\tau}{\beta m}\right|^{s-\frac{1}{2}} e^{-2\beta\pi|m(n-\tau)|} \int_0^{\infty} e^{-4\beta\pi|m(n-\tau)|r^2} \frac{(r + \sqrt{r^2+1})^{2s-1}\, dr}{\sqrt{r^2+1}};$$

řada ta definuje pak celistvou funkci transcendentní proměnné s.

Zbývá ještě stanoviti analytickou povahu funkce S. Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}}$$

považovati možno při realných s za realnou část funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\tau\pi i}}{n^{2s}} .$$

Dle vzorce

$$\frac{1}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{2s-1}\, dx$$

obdržíme pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\tau\pi i}}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2s-1}\, dx}{e^{x+2\tau\pi i} - 1} ,$$

takže

$$\text{(A)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1}\, dx ,$$

kteryžto vzorec je správným též pro komplexní s. Vyšetření analytické povahy této funkce dalo by se provésti methodou zcela podobnou oné, již jsme vyložili při funkci $\zeta(s)$, ale státi se může též na základě methody Riemannovy, která spočívá v tom, že se od (A) přejde k integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1}\, dx = \frac{1}{e^{4s\pi i} - 1} \int_{(\infty,0,\infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1}\, dx ,$$

kde integrační cesta zahaluje celou kladnou polovici osy realné, omezujíc úzký pruh ji obsahující. Pak obdržíme

$$\text{(A')} \qquad \sum \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = e^{-2s\pi i}\, \Gamma(1-2s)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty,0,\infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1}\, dx .$$

Integrál v pravo je celistvá funkce proměnné s, která zmizí pro $2s = 1,2,3,\ldots$, tedy právě na pólech funkce $\Gamma(1-2s)$, i plyne odtud, že veličina (A') je též celistvou funkcí transcendentní vůči s. Následkem toho platí věta:

Řada $K(a,b,c;\sigma,\tau;s)$ *definuje celistvou funkci transcendentní proměnné* s, kterou lze vyjádřiti při libovolném s řadou:

$$\text{(2)} \quad \left\{ \begin{aligned} & K(a,b,c;\sigma,\tau;s) \\ & = c^{-s} e^{-2s\pi i}\, \Gamma(1-2s)\, \frac{1}{\pi i} \int_{(\infty,0,\infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1}\, dx \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{c^s\, \Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx . \end{aligned} \right.$$

Tuto vlastnosť dlužno spojiti s okolností, že řada (1) konverguje absolutně při Real. $s > 1$. Obdržíme všecky páry celistvých čísel m, n, a každý jen jednou, jestliže v rovnicích

$$m = k\mu + l\nu\,,$$
$$n = k'\mu + l'\nu\,,$$

kde $k\ l\ k'\ l'$ značí celistvá čísla podrobená podmínce

$$k l' - k' l = 1\,, \tag{3}$$

udělíme číslům μ, ν všechny celistvé hodnoty. Tím ale přejdou $f(m,n)$, $m\sigma + n\tau$ v následující výrazy

$$f(m,n) = f'(\mu,\nu) = a'\mu^2 + 2b'\mu\nu + c'\nu^2\,,$$
$$m\sigma + n\tau = \mu\sigma' + \nu\tau'\,,$$

kde

$$\left\{\begin{aligned} a' &= ak^2 + 2bkk' + ck'^2 = f(k,k')\,,\\ b' &= akl + b(kl' + k'l) + ck'l'\,,\\ c' &= al^2 + 2bll' + cl'^2 = f(l,l')\,,\\ \sigma' &= k\sigma + k'\tau\,, \qquad \tau' = l\sigma + l'\tau\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

i obdržíme

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;s) = K(a',b',c';\sigma',\tau';s)\,. \tag{5}$$

Soustavy veličin $(a,b,c;\sigma,\tau)$, $(a',b',c';\sigma',\tau')$ související rovnicemi (4) slují *rovnomocnými* čili *ekvivalentními,* v písmě

$$(a,b,c;\sigma,\tau) \backsim (a',b',c';\sigma',\tau')\,,$$

a funkce K mající pro rovnomocné soustavy stejnou hodnotu nazývá se — jako každý toho druhu výraz — *invariantem ekvivalentních soustav* $(a,b,c;\sigma,\tau)$.

Buď nyní s_0 veličina nezávislá na a,b,c,σ,τ; funkci $K(a,b,c;\sigma,\tau;s)$ bude lze rozvinouti v řadu stále konvergentní

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(a,b,c;\sigma,\tau;s_0)\,(s - s_0)^\nu\,,$$

podobně funkci

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(a',b',c';\sigma',\tau';s_0)\,(s - s_0)^\nu\,.$$

Levé strany jsou si rovny pro všecka s, kde Real. $s > 1$, a tedy splynou pravé strany identicky, t, j. bude

$$K_\nu(a,b,c;\sigma,\tau;s_0) = K_\nu(a',b',c';\sigma',\tau';s_0)\,,$$

t. j. *funkce* $K_\nu(a,b,c;\sigma,\tau;s_0)$ *jsou rovněž invarianty rovnomocných soustav* $(a,b,c;\sigma,\tau)$.

To platí tedy zejména o funkci $K(a,b,c;\sigma,\tau;1)$, již studoval pan *Kronecker*. My ji obdržíme nejkratší a nejpřirozenější cestou přímo z rovnice (2^a). Tu třeba stanoviti hodnoty integrálů

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx ,$$

jež se obdrží pomocí vzorce*)

$$(\alpha) \qquad \int_0^\infty e^{-p^2 x - \frac{q^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-2pq} ,$$

takže mají hodnotu

$$\frac{\sqrt{\pi}}{|\beta m|} e^{-2\pi\beta |m(n-\tau)|} ;$$

dále bude třeba sečísti řadu

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^2} = \int_0^\infty \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x\, dx ,$$

jejíž hodnota zní

$$\pi^2 (\tau^2 - \tau + \tfrac{1}{6}) ,$$

o čemž bychom se differencováním snadno přesvědčili.

Vložením těchto hodnot do vzorce (2^a) se zřetelem k okolnosti, že β je kladné, obdržíme

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;1) = \frac{2\pi^2}{c} (\tau^2 - \tau + \tfrac{1}{6})$$

$$+ \frac{\pi}{c\beta} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{m} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma) - 2\beta m\pi |n-\tau|}$$

$$+ \frac{\pi}{c\beta} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{m} e^{-2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma) - 2\beta m\pi |n-\tau|}$$

---

*) Bylo totiž v §. 7, (5) ukázáno, že ($s=2$)

$$\int_0^\infty e^{-p^2 x - \frac{q^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{q}{p}} e^{-2pq} \int_{-\infty}^\infty e^{-4pqr^2} \frac{r + \sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} dr ;$$

rozložímeli tento integrál ve dva, zmizí jeden z nich a zbude

$$2\sqrt{\frac{q}{p}} e^{-2pq} \int_{-\infty}^\infty e^{-4pqr^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-2pq} .$$

Provedemeli sčítání vůči m, obdržíme;

$$K = \frac{2\pi^2}{c}(\tau^2 - \tau + \tfrac{1}{6}) - \frac{\pi}{c\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\log(1 - e^{2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)-2\beta\pi|n-\tau|}) + \log(1 - e^{-2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)-2\beta\pi|n-\tau|})\Big\}.$$

Jelikož předpokládáme, že τ je pravý kladný zlomek, obdržíme po zavedení označení

$$w_1 = -\alpha + i\beta, \qquad w_2 = \alpha + i\beta,$$

rovnici:

$$K = \frac{2\pi^2}{c}(\tau^2 - \tau + \tfrac{1}{6}) - \frac{\pi}{c\beta}\log\prod_{n=-\infty}^{\infty}(1 - e^{2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)-2\beta\pi|n-\tau|}) \cdot (1 - e^{-2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)-2\beta\pi|n-\tau|})$$

$$= \frac{2\pi^2}{c}(\tau^2 - \tau + \tfrac{1}{6}) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\Big\{(1 - e^{2\pi i(\sigma-\tau\alpha)-2\beta\pi\tau})(1 - e^{-2\pi i(\sigma-\tau\alpha)-2\beta\pi\tau})$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1 - e^{2\pi i(nw_2+\sigma-\tau w_2)})(1 - e^{2\pi i(nw_1+\sigma+\tau w_1)})(1 - e^{2\pi i(nw_1-\sigma-\tau w_1)})(1 - e^{2\pi i(nw_2-\sigma+\tau w_2)})\right]\Big\}.$$

Užijemeli známých vzorců

$$\vartheta_1(u\,|\,w) = 2e^{\frac{1}{4}w\pi i}\sin u\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2u\pi i})(1-q^{2n}e^{-2u\pi i}),$$

kde psáno $q = e^{w\pi i}$, a znamenámeli po příkladu Kroneckerově

$$(6) \qquad \Delta(\sigma,\tau\,|\,w_1,w_2) = e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\frac{\vartheta_1(\sigma+\tau w_1\,|\,w_1)\,\vartheta_1(\sigma-\tau w_2\,|\,w_2)}{H(w_1)\,H(w_2)},$$

kde psáno

$$(7) \qquad H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2nw\pi i}),$$

obdržíme vztah Kroneckerův

$$(8) \qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}K(a,b,c;\sigma,\tau;1) = -\log\Delta(\sigma,\tau\,|\,w_1,w_2);$$

při tom, jak opakujeme, znamená $\Delta = ac - b^2$, a w_1, $-w_2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$a + 2bw + cw^2 = 0,$$

totiž

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{c}, \qquad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{c}.$$

Vzorec (8) byl odvozen pro případ $0<\sigma<1$, $0<\tau<1$; aby se ukázalo, že plati obecně, stačí poznamenati, že dle (6) funkce Δ se nemění, zvětšímeli σ neb τ o celistvé číslo, takže rovnice

$$(8^a) \qquad \Delta(\sigma,\tau\,|\,w_1,w_2) = e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}K(a,b,c;\sigma,\tau;1)}$$

platí pro všecka realná σ, τ, jež nejsou celistvá.

Poznamenejme, že z rovnic (4) plyne, že kořeny w'_1, $-w'_2$ rovnice

$$a' + 2b'w' + c'w'^2 = 0$$

souvisejí s w_1, $-w_2$ rovnicemi

$$(4^a) \qquad w_1 = \frac{k' + l'w'_1}{k + lw'_1}, \quad -w'_2 = \frac{k' - l'w'_2}{k - lw'_2}.$$

Veličiny w_1, w_2 mají společnou část pomyslnou, která je kladná, a opačné části realné. Zvolímeli je tak, aby tyto podmínky byly splněny, a zvolímeli kromě toho $\Delta>0$, budou tím a, b, c úplně dány, takže pak vzorec (8) vyjadřuje logarithmus funkce Δ o daných w nekonečnou řadou dvojnásobnou.

V případě $w_1 = w_2$ bude společná hodnota w těchto veličin ryze pomyslnou a tedy $b=0$, $w = i\sqrt{\frac{a}{c}}$, a my obdržíme z (8) vzorec

$$(8^b) \qquad \frac{\sqrt{ac}}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{am^2+cn^2} = -\log\left(\frac{e^{2\tau^2 w\pi i}\,\vartheta_1(\sigma+\tau w)\,\vartheta_1(\sigma-\tau w)}{H(w)^2}\right),$$

kde transcendenty ϑ tvořeny na základě téhož parametru $w = i\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Z rovnice (8^a) plyne dle výše uvedených vlastností veličiny $K(a,b,c;\sigma,\tau;1)$, že *funkce* $\Delta(\sigma,\tau\,|\,w_1,w_2)$ *nemění se přechodem k soustavě hodnot rovnomocných*

$$\sigma' = k\sigma + k'\tau, \qquad \tau' = l\sigma + l'\tau,$$

$$w'_1 = \frac{kw_1 - k'}{l' - lw_1}, \qquad w'_2 = \frac{kw_2 + k'}{l' + lw_2},$$

kde $klk'l'$ *jsou celistvá čísla podrobená podmínce*

$$kl' - k'l = 1.$$

Jinak lze tuto větu též takto vyjádřiti:

Dvojnásobná řada

$$\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{am^2+2bmn+cn^2}$$

konverguje toliko podmínečně, ale při všech seřaděních členů, která vzniknou, když v rovnicích

$$m = k\mu + l\nu, \qquad n = k'\mu + l'\nu, \qquad (kl' - k'l = 1)$$

probíhá nejprve μ a po té ν všecka čísla celistvá, obdrží součet řady tutéž hodnotu.

Vzorec (2) neb (2^a) obsahuje uvedený výsledek Kroneckerův jako zvláštní případ a kromě toho může vésti k celé řadě specialních invariantů, z nichž zajímavým je též $K_1(a,b,c;\sigma,\tau;0)$, t. j. součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce K. K tomu účelu ustanovíme nejprvé součinitele toho v rozvoji funkce

$$(9) \qquad Z(v,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nv\pi}{n^s},$$

kde řada v pravo konverguje při Real. $s>0$, jakmile $0<v<1$, což předpokládáme. Tu jest patrně

$$2Z(v,s) = e^{2v\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(n+1)^s} + e^{-2v\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2nv\pi i}}{(n+1)^s},$$

čili dle dřívějšího označení

$$(9^a) \qquad 2Z(v,s) = e^{2v\pi i}\,\mathfrak{R}(1,v,s) + e^{-2v\pi i}\mathfrak{R}(1,1-v,s).$$

Dle vzorce (6^a) §. 4 jest $\mathfrak{R}(1,v,s)$ celistvou funkcí transcendentní proměnné s, a totéž tedy platí o funkci $Z(v,s)$.

Jestliže v Lipschitzově reciprocitě (5) §. 3 předpokládáme Real. $s>1$, můžeme na obou stranách přejíti k limitě pro $w=1$, čímž vznikne

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\,\mathfrak{R}(1,v,1-s)\,.\,e^{2v\pi i} = e^{\frac{s\pi i}{2}}\,\mathfrak{R}(v,0,s) + e^{-\frac{s\pi i}{2}}\,\mathfrak{R}(1-v,0,s),$$

a podobně

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\,\mathfrak{R}(1,1-v,1-s)\,e^{-2v\pi i} = e^{\frac{s\pi i}{2}}\,\mathfrak{R}(1-v,0,s) + e^{-\frac{s\pi i}{2}}\,\mathfrak{R}(v,0,s),$$

takže sečtením těchto výsledků obdržíme*)

$$(10) \qquad \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\,Z(v,1-s) = \cos\tfrac{s\pi}{2}\,R(v,s),$$

kde psáno

$$(10^a) \qquad R(v,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{v+n\}^s} = \mathfrak{R}(v,0,s) + \mathfrak{R}(1-v,0,s).$$

Užijemeli dříve odvozených vzorců, máme zde

$$(10^b) \qquad R(v,s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t}\,t^{s-1}\,dt}{e^t-1} + \int_0^{\infty} \frac{e^{vt}\,t^{s-1}\,dt}{e^t-1}\right\}.$$

U vzorci (10) pišme $s=1+\sigma$, čímž vznikne

$$(\alpha) \qquad (2\pi)^{1+\sigma}\,Z(v,-\sigma) = -\sin\tfrac{\sigma\pi}{2}\,.\,\Gamma(1+\sigma)\,R(v,1+\sigma),$$

*) Viz Lerch, dopis, vzorec (12).

kde pak dle (10ᵇ)

$$\Gamma(1+\sigma)\,R(v,1+\sigma)=\int_0^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}+\int_0^\infty \frac{e^{vt}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}\,.$$

Rozložme

$$\int_0^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}=\int_0^\omega \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}+\int_\omega^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}\,,$$

kde ω je malý kladný zlomek; jelikož pro dosti malá t platí rozvoj

$$\frac{e^{(1-v)t}}{e^t-1}=\frac{1}{t}+\sum_{\nu=0}^\infty \gamma_\nu t^\nu\,,$$

obdržíme integrací

$$\int_0^\omega \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}=\frac{\omega^\sigma}{\sigma}+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\gamma_\nu\,\omega^{\sigma+\nu+1}}{\sigma+\nu+1}\,,$$

a tedy

$$J=\int_0^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}=\frac{\omega^\sigma}{\sigma}+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\gamma_\nu\,\omega^{\sigma+\nu+1}}{\sigma+\nu+1}+\int_\omega^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,t^\sigma\,dt}{e^t-1}\,;$$

znamenámeli

$$J=\tfrac{1}{\sigma}+c'_0+c'_1\sigma+c'_2\sigma^2+\ldots$$

mocninový rozvoj levé strany, bude patrně

$$c'_0=\log\omega+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\gamma_\nu\,\omega^{\nu+1}}{\nu+1}+\int_\omega^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,dt}{e^t-1}\,,$$

a poněvadž tato veličina nemůže záviseti na ω, máme přechodem k limitě $\omega=0$:

$$c'_0=\left\{\log\omega+\int_\omega^\infty \frac{e^{(1-v)t}\,dt}{e^t-1}\right\}_{\omega=0}$$

čili

$$c'_0=\int_0^\infty \frac{e^{(1-v)t}-1}{e^t-1}\,dt\,, \tag{11}$$

poněvadž

$$\lim_{\omega=0}\left\{\log\omega+\int_\omega^\infty \frac{dt}{e^t-1}\right\}=0\,.$$

Výraz (11) lze též psáti

$$(11^a) \qquad c'_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+v} - \frac{1}{\nu+1} \right);$$

znamenámeli podobně

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{vt}\, t^{\sigma}\, dt}{e^t - 1} = \tfrac{1}{\sigma} + c''_0 + c''_1 \sigma + c''_2 \sigma^2 + \ldots,$$

máme

$$(11^b) \qquad c''_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+1-v} - \frac{1}{\nu+1} \right),$$

takže koefficient c_0 rozvoje

$$\Gamma(1+\sigma)\, R(v, 1+\sigma) = \tfrac{2}{\sigma} + c_0 + c_1 \sigma + c_2 \sigma^2 + \ldots$$

bude dán vzorcem

$$(11^c) \qquad c_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+v} + \frac{1}{\nu+1-v} - \frac{2}{\nu+1} \right),$$

výsledek správný pouze pro $0 < v < 1$. V ostatních případech $v > 1$ neb $v < 0$ dlužno v řadě psáti zbytek veličiny v místo v.

Ze vzorce (α) plyne

$$2\pi Z(v, -\sigma) = -\sin \tfrac{\sigma\pi}{2} (1 - \sigma \log 2\pi + \ldots) (\tfrac{2}{\sigma} + c_0 + \ldots)$$
$$= -\sin \tfrac{\sigma\pi}{2} (\tfrac{2}{\sigma} - 2\log 2\pi + c_0 + \ldots)$$

a odtud konečně

$$-4 Z(v, -\sigma) = 2 + (c_0 - 2\log 2\pi)\, \sigma + \ldots,$$

což jinak psáno zní:

$$(12) \qquad 4 Z(v, \sigma) = -2 + (c_0 - 2\log 2\pi)\, \sigma + \ldots$$

Budeme nyní potřebovati rozvoj funkce

$$S = \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = \frac{2}{c^s} Z(\tau, 2s)$$

dle mocností s. Tu máme dle (12)

$$(12^a) \qquad S = -1 + [\log c + c_0 - 2\log 2\pi]\, s + \ldots,$$

kde dle (11^c)

$$c_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+\tau_0} + \frac{1}{\nu+1-\tau_0} - \frac{1}{1+\nu} \right),$$

kde τ_0 souvisí s τ podmínkami, aby $\tau - \tau_0$ bylo celistvé a při tom

$$0 < \tau_0 < 1.$$

Dle (12ª) soudíme z (2ª), že součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a,b,c;\sigma,\tau;s)$ bude

$$K_1(a,b,c;\sigma,\tau;0) = \log c + c_0 - 2\log 2\pi$$
$$+\sqrt{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)} \int_0^\infty e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2(n-\tau)^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx\,.$$

Integrály na pravé straně ustanoví se tu dle vzorce

$$\int_0^\infty e^{-u^2 x - \frac{\tau^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{z} e^{-2u\tau}\,,$$

čímž dvojnásobná řada v pravo obdrží tvar

$$\bar{S} = \sum_m{}' \sum_n \frac{1}{|n-\tau|} e^{2m\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma) - 2\beta\pi\, m(n-\tau)|}\,.$$

Provedemeli nejdříve sčítání vůči m, obdržíme

$$\bar{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau-n|\{e^{2\pi\beta|n-\tau|-2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)} - 1\}}$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau-n|\{e^{2\pi\beta|n-\tau|+2\pi i(n\alpha-\tau\alpha+\sigma)} - 1\}}\,.$$

Za účelem přechodného přetvoření této řady zaveďme celistvé číslo $[\tau]$ dané podmínkami

$$[\tau] < \tau < [\tau]+1\,;$$

pak máme při dřívějším významu liter w_1, w_2:

$$\bar{S} = \sum_{n=-[\tau]}^{\infty} \frac{1}{(n+\tau)(e^{-2\pi i(nw_1+\sigma+\tau w_1)} - 1)} + \sum_{n=[\tau]+1}^{\infty} \frac{1}{(n-\tau)(e^{-2\pi i(nw_2+\sigma-\tau w_2)} - 1)}$$
$$+ \sum_{n=-[\tau]}^{\infty} \frac{1}{(n+\tau)(e^{-2\pi i(nw_2-\sigma+\tau w_2)} - 1)} + \sum_{n=[\tau]+1}^{\infty} \frac{1}{(n-\tau)(e^{-2\pi i(nw_1-\sigma-\tau w_1)} - 1)}\,.$$

Tuto řadu lze však přehledněji psáti

$$\bar{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(nw_1+\sigma+\tau w_1)} - 1} + \frac{1-\operatorname{sgn}.(\tau+n)}{2}\right\}$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(nw_2-\sigma+\tau w_2)} - 1} + \frac{1-\operatorname{sgn}.(\tau+n)}{2}\right\}.$$

Znamenámeli pak

$$(13)\quad \bar{\bar{S}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(nw_1+\sigma+\tau w_1)} - 1} + \frac{1-\operatorname{sgn}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\right\}$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(nw_2-\sigma+\tau w_2)} - 1} + \frac{1-\operatorname{sgn}.\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\right\},$$

bude součet

$$S - \bar{S} = 2 \sum_n \frac{1}{\tau + n} \left\{ \frac{1 - \text{sgn.}\,(\tau + n)}{2} - \frac{1 - \text{sgn.}\,(n + \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

obsahovati toliko konečný počet členů od nully různých; poněvadž

$$\bar{S} - \bar{\bar{S}} = \sum \frac{\text{sgn.}\,(n + \frac{1}{2}) - \text{sgn.}\,(n + \tau)}{\tau + n},$$

nalezneme snadno výsledek následující:

$$\text{pro } \tau > 0 \text{ je } \bar{S} - \bar{S} = 2 \sum_{k=0}^{[\tau]} \frac{1}{k - \tau},$$

$$\text{pro } \tau < 0 \text{ je } \bar{S} - \bar{S} = 2 \sum_{k=0}^{[\tau]} \frac{1}{k + \tau},$$

tedy obecně

$$\bar{S} - \bar{\bar{S}} = 2 \sum_{k=0}^{E(|\tau|)} \frac{1}{k - |\tau|}. \tag{14}$$

Poněvadž

$$K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0) = \log c - 2 \log 2\pi + \bar{\bar{S}}$$
$$+ \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu + \tau_0} + \frac{1}{\nu + 1 - \tau_0} - \frac{2}{1 + \nu} \right) + 2 \sum_{k=0}^{E(|\tau|)} \frac{1}{k - |\tau|} \right),$$

musíme dříve vystihnouti povahu výrazu v závorce, jenž vytvořen operacemi arithmetickými. Píšemeli nejprvé $\tau = \tau_0 + m$, kde $m > 0$, bude hodnota závorky patrně

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu + \tau} + \frac{1}{\nu + 1 - \tau} - \frac{2}{1 + \nu} \right);$$

totéž platí pro $\tau = \tau_0 - m$, a tedy nacházíme výsledek následující:

Koefficient při s v Maclaurinovském rozvoji funkce

$$K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i (m\sigma + n\tau)}}{(a m^2 + 2 b m n + c n^2)^s}$$

zní

$$K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0) \tag{15}$$
$$= -2 \log 2\pi + 2\,\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1 - \tau)}{\Gamma(1 - \tau)} + \log c + \Phi(\sigma, \tau, w_1) + \Phi(-\sigma, \tau, w_2),$$

kde položeno

$$\Phi(\sigma, \tau, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i (n + \tau) w - 2\sigma\pi i} - 1} + \frac{1 - \text{sgn.}\,(n + \frac{1}{2})}{2} \right\}. \tag{16}$$

Pravá strana rovnice (15) je patrně jednoznačnou analytickou funkcí proměnných σ, τ; a *tato funkce* má tu velmi zajímavou vlastnosť, že *jest invariantem rovnomocných soustav* $(a, b, c; \sigma, \tau)$.

Klademeli na okamžik

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{-2\pi i(nw+\sigma+\tau w)} - 1} + \frac{1 - \text{sgn.}\,(n+\frac{1}{2})}{2} \right) e^{2nx\pi i},$$

bude

$$\Phi(\sigma, \tau, w) = \frac{2\pi i}{e^{2\tau\pi i} - 1} \int_0^1 f(x)\, e^{2\tau x\pi i}\, dx .$$

Abychom vyjádřili $f(x)$, položme

$$(17) \qquad \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(nw+u)} - 1} + \frac{1 - \text{sgn.}\,(n+\frac{1}{2})}{2} \right\} e^{2nx\pi i};$$

píšemeli $n+1$ za n, vznikne

$$\varphi(u) = \varphi(u+w)\, e^{2x\pi i} + \sum_n \left[\frac{1 - \text{sgn.}\,(n+\frac{3}{2})}{2} - \frac{1 - \text{sgn.}\,(n+\frac{1}{2})}{2} \right] e^{(2n+2)x\pi i},$$

čili

$$\varphi(u) = \varphi(u+w)\, e^{2x\pi i} - 1 .$$

Součin $\varphi(u)\,\vartheta_1(u|w) = \psi(u)$ je celistvá funkce hovící relacím

$$\psi(u) = -\psi(u+1), \qquad \psi(u) = -\psi(u+w)\, e^{\pi i(2u+2x+w)} - \vartheta_1(u) .$$

Tutéž vlastnosť má funkce

$$\psi_1(u) = C'\vartheta_1(u+x) + \frac{\vartheta_1(u)}{e^{2x\pi i} - 1},$$

takže rozdíl

$$\psi(u) - \psi_1(u) = \chi(u)$$

hoví rovnicím

$$\chi(u+1) = -\chi(u), \qquad \chi(u+w) = -e^{-\pi i(2u+2x+w)}\,\chi(u),$$

z nichž plyne

$$\chi(u) = C''\vartheta_1(u+x) .$$

Píšemeli $C' + C'' = C$, máme tedy

$$\psi(u) = C\vartheta_1(u+x) + \frac{\vartheta_1(u)}{e^{2x\pi i} - 1},$$

kde zbývá ještě ustanoviti konstantu C. Odtud pak nalezneme

$$\varphi(u) = C\frac{\vartheta_1(u+x)}{\vartheta_1(u)} + \frac{1}{e^{2x\pi i} - 1},$$

a porovnámeli residua při $u = 0$:

$$\frac{1}{-2\pi i} = \frac{C\,.\,\vartheta_1(x)}{\vartheta'_1},$$

máme

$$C = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\vartheta_1(x)}$$

a tedy

$$(17^*) \qquad \varphi(u) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(u+x)}{\vartheta_1(u)\,\vartheta_1(x)} + \frac{1}{e^{2x\pi i}-1}\,.$$

Dle toho bude

$$f(x) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(x+\sigma+\tau w)}{\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(\sigma+\tau w)} + \frac{1}{e^{2x\pi i}-1}\,,$$

takže

$$(18) \quad \Phi(\sigma,\tau,w) = \frac{1}{1-e^{2\tau\pi i}}\int_0^1 \left\{\frac{\vartheta'_1\,\vartheta_1(x+\sigma+\tau w)}{\vartheta_1(\sigma+\tau w)\,\vartheta_1(x)} + \frac{2\pi i}{1-e^{2x\pi i}}\right\} e^{2\tau x\pi i}\,dx\,.$$

§. 10. Pokračováni o řadách Kroneckerových.

V předchozích úvahách byl vyloučen případ, kdy jedna z obou veličin σ, τ se stane číslem celistvým, případ, jejž dlužno uvažovati již z té příčiny že se může při racionalných σ, τ vyskytnouti po transformaci.

Uvažujme tedy řadu dvojnásobnou

$$K(a,b,c;\sigma,0;s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{f(m,n)^s}\,,$$

kterou převedeme na tvar následující, sčítajíce nejdříve vůči n:

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{c^s\,(n^2)^s} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{c^s\,[(\alpha m+n)^2+\beta^2 m^2]^s}\,.$$

Prvá část jest patrně $2c^{-s}\zeta(2s)$ a druhou lze přetvořiti dle vzorce (4) §. 8, z něhož plyne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\alpha m+n)^2+\beta^2 m^2]^s} = \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\sqrt{\pi}\,(\beta^2 m^2)^{\frac{1-2s}{2}}$$

$$+\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2mn\alpha\pi\int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x-\frac{n^2\pi^2}{x}}\,x^{s-\frac{3}{2}}\,dx\,,$$

a tedy

$$(1)\quad \begin{cases} K(a,b,c;\sigma,0;s) = 2c^{-s}\zeta(2s) + 2\sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,c^{-s}\beta^{1-2s}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s-1}} \\ \quad + \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\,c^{-s}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' e^{2m(n\alpha+\sigma)\pi i}\int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x-\frac{n^2\pi^2}{x}}\,x^{s-\frac{3}{2}}\,dx\,, \end{cases}$$

kde význam liter α, β jest jako výše

$$\alpha = \frac{b}{c}\,, \qquad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{c}\,.$$

Sečítámeli však dvojnásobnou řadu dříve vůči m, musíme zavésti veličiny

$$\alpha' = \frac{b}{a}, \qquad \beta' = \frac{\sqrt{\Delta}}{a},$$

načež řada přejde v následující:

$$(1') \quad \begin{cases} K(a,b,c;\sigma,0;s) = 2\,a^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s}} \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\, a^{-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2n\alpha'\pi i(m-\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta'^2 n^2 x - \frac{\pi^2(\sigma-m)^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx . \end{cases}$$

Obě části pravé strany poslední rovnice jsou celistvé vůči s, a tedy *jest též* $K(a,b,c;\sigma,0;s)$ *celistvá funkce transcendentní proměnné* s.

Ustanovme nyní součinitele při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a,b,c;\sigma,0;s)$.

Dle dřívějšího označení máme

$$Z(\sigma, 2s-1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s-1}};$$

dále

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|n|\pi}\, e^{-2\beta\pi|mn|},$$

a konečně

$$2c^{-s}\zeta(2s) = 2\zeta(0) + 2\left[2\zeta'(0) - \zeta(0)\log c\right] s + \ldots$$

a tedy máme z (1) hledaného součinitele ve tvaru

$$K_1(a,b,c;\sigma,0;0) = -2\zeta(0)\log c + 4\zeta'(0) - \frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{c} Z(\sigma,-1) + \sum_{m,n} \frac{1}{|n|}\, e^{-2\beta\pi|mn| + 2m(n\alpha+\sigma)\pi i},$$

$$(m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Tu pak máme dle vzorce (10) §. 9

$$Z(\sigma,-1) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+n)^2} = -\frac{1}{4\sin^2\sigma\pi},$$

dále máme z Riemannova vzorce

$$\zeta(s) = 2\,(2\pi)^{s-1} \sin\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s);$$

užijemeli okolnosti

$$\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots,$$

již snadno můžeme verifikovati napodobíce výše vyloženou methodu při funkci $R(v, s)$ (§. 9), plyne:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\left[-\frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{s} - c'_1 s^2 + \ldots\right] = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2\pi \,.\, s + \ldots$$

takže

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2}, \qquad \zeta'(0) = -\tfrac{1}{2}\log 2\pi \,.$$

Obdržíme tedy

$$K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) = -2\log 2\pi + \log c + \frac{\pi\sqrt{\Delta}}{c\sin^2\sigma\pi}$$
$$-2\log\prod_{m=1}^{\infty}\left\{(1 - e^{2mw_1\pi i})(1 - e^{2mw_2\pi i})\right\}^{\cos 2m\sigma\pi} .$$

Neboť dvojnásobná řada hořejší

$$\sum_{m,n}\frac{1}{|n|}e^{-2\beta\pi|mn| + 2m(n\alpha+\sigma)\pi i}$$
$$= \sum_{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-2\beta\pi|m|n + 2m(n\alpha+\sigma)\pi i} + \sum_{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\beta\pi|m|n + 2m(-n\alpha+\sigma)\pi i}$$
$$= -\sum_{m}\left\{\log(1 - e^{-2\beta\pi|m| + 2m\alpha\pi i}) + \log(1 - e^{-2\beta\pi|m| - 2m\alpha\pi i})\right\}e^{2m\sigma\pi i}$$

přejde v záporný logarithmus čtverce výše psaného součinu.

Zavedemeli označení

$$(2) \qquad H(w, \sigma) = e^{\frac{w\pi i}{4\sin^2\sigma\pi}}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{2mw\pi i})^{\cos 2m\sigma\pi} ,$$

bude součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a, b, c; \sigma, 0; s)$ dán výrazem

$$(3) \qquad K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) = -2\log 2\pi - 2\log\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}H(w_1, \sigma)\,H(w_2, \sigma)\right\} .$$

Výrazy (2) nazývám *Hermiteovskými*, ponévadž slavný mathematik francouzský prvý uvažoval rozvoje podobné jich logarithmům.*) Na tyto vedou vždy výrazy $\Phi(\sigma, \tau, w)$, v nichž jsou σ, τ racionalná čísla.

Téhož součinitele $K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0)$ obdržíme jiným způsobem a v jiném tvaru na základě řady (1′).

Prvý člen pravé strany má rozvoj

$$2a^{-s}Z(\sigma, 2s) = 2a^{-s}\left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(c_0 - 2\log 2\pi)\,2s + \ldots\right] ,$$

*) Viz o tom referát p. Lipschitzův obsažený v článku »Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale (Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 101). Mimo to poznámku na konci našeho článku uveřejněného v Acta math., sv. 12.

kde

$$c_0 = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma_0)}{\Gamma(\sigma_0)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma_0)}{\Gamma(1-\sigma_0)},$$

a při tom $0 < \sigma_0 < 1$, a $\sigma - \sigma_0$ je číslo celistvé.

Obdržíme tak

$$K_1 = c_0 - 2\log 2\pi + \log a + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\alpha'\pi i(m-\sigma) - 2\beta'\pi|n(\sigma-m)|}}{|m-\sigma|}.$$

Dvojnásobná řada obdrží se podobně jako řada $\bar{S}$ v §. 9 ve tvaru

$$2\sum_{k=0}^{E(|\sigma|)} \frac{1}{k-|\sigma} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma+m}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(m+\sigma)w'_1}-1} + \frac{1-\operatorname{sgn.}(m+\frac{1}{2})}{2}\right\}$$
$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma+m}\left\{\frac{1}{e^{-2\pi i(m+\sigma)w'_2}-1} + \frac{1-\operatorname{sgn.}(m+\frac{1}{2})}{2}\right\},$$

kde

$$w'_1 = -\alpha' + \beta' i = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a} = -\frac{1}{w_2},$$

$$w'_2 = \alpha' + \beta' i = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{a} = -\frac{1}{w_1}.$$

Máme tedy konečně

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} K_1(a,b,c;\sigma,0;0) = -2\log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \dfrac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \dfrac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} \\ \qquad + \log a + \Phi\left(0,\sigma,-\dfrac{1}{w_1}\right) + \Phi\left(0,\sigma,-\dfrac{1}{w_2}\right). \end{array}\right.$$

Klademeli $b = 0$, tedy $w_1 = w_2 = w = i\sqrt{\dfrac{a}{c}}$, máme porovnáním výsledků (3) a (4):

$$(5)\quad -4\log\left(\sqrt{\frac{w}{i}}\, H(w,\sigma)\right) = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} + 2\Phi\left(0,\sigma,-\frac{1}{w}\right).$$

Volme na př. $\sigma = \frac{1}{2}$; pak bude

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{e^{(2n+1)\frac{\pi i}{w}}-1} + \frac{1-\operatorname{sgn.}(n+\frac{1}{2})}{2}\right\}$$
$$= \Gamma'(\tfrac{1}{2}) - \Gamma'(1) - 2\log\left\{\sqrt{\frac{w}{i}}\, e^{\frac{1}{4}w\pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{4mw\pi i}}{1-e^{(4m-2)w\pi i}}\right\}.$$

§. 11. Kroneckerovy invarianty kvadratických forem.

Dvojnásobná řada

$$(1) \qquad K'(a,b,c;s) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(a m^2 + 2 b m n + c n^2)^s}$$

závisí vedle s toliko na koefficientech kladné formy kvadratické

$$f(x,y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2 ,$$

i obdrží tutéž hodnotu pro všecky formy rovnomocné, takže jest *invariantem* forem ekvivalentních s formou (a,b,c).

Jedná se jako vždy dosud o vyšetření analytické povahy funkce K'. Klademeli jako dříve

$$\Delta = a c - b^2 , \quad \alpha = \frac{b}{c} , \quad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{c} , \quad w_1 = -\alpha + \beta i , \quad w_2 = \alpha + \beta i ,$$

bude opět

$$a m^2 + 2 b m n + c n^2 = c\,[(n + \alpha m)^2 + \beta^2 m^2] ,$$

a tedy

$$K'(a,b,c,s) = \sum_{n=-\infty}{}' \frac{1}{(c n^2)^s} + \sum_{m=-\infty}{}' \sum_{n=-\infty} \frac{1}{c^s\,[(n+\alpha m)^2 + \beta^2 m^2]^s} .$$

Prvá část jest $2 c^{-s} \zeta(2s)$, druhá dle §. 8 rovná se řadě

$$\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \frac{\sqrt{\pi}}{c^s} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' (\beta^2 m^2)^{\frac{1}{2}-s}$$

$$+ \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)\,c^s} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2 m n \alpha \pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx ,$$

tedy

$$(2) \quad K'(a,b,c;s) = 2 c^{-s} \zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta(2s-1)\, c^{s-1} \Delta^{\frac{1}{2}-s}$$

$$+ \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} c^{-s} \sum_{m,n} \cos 2 m n \alpha \pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 z - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz ,$$

$$(m,n = 1,2,3,\ldots)$$

Poslední člen v pravo je celistvá funkce vůči s, a poněvadž $2 c^{-s} \zeta(2s)$ má jediný pól $s = \frac{1}{2}$, v němž se chová jako funkce $\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$, $\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)$ je konečno na místech $s = \frac{1}{2} - n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$

a pouze nekonečno na místech $s = \frac{1}{2}$, $s = 1$, kde se chová jako funkce

$$\zeta(0)\frac{1}{s-\frac{1}{2}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{s-1}, \qquad \left(\text{neboť } \zeta(0) = -\tfrac{1}{2}\right),$$

shledáváme, že se pravá strana chová na místě $s = \frac{1}{2}$ pravidelně, takže má jediný pól $s = 1$, kde se chová jako $\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{s-1}$.

Rozdíl

$$K'(a,b,c;s) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{s-1}$$

je celistvá funkce transcendentní, která jest invariantem rovnomocných forem (a,b,c).

Z toho plyne bezprostředně, že též součinitelé rozvojů mocninových této funkce jsou invarianty. Tu zajímavy jsou zejména součinitelé rozvoje této funkce podlé mocností $s-1$, z nichž pan *Kronecker* ustanovil člen stálý.*) Výsledek ten podá nám vzorec (2) opět přímo.

Úkol ten v podstatě splývá s podobným pro funkci

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\cdot K'(a,b,c;s)\,(2\sqrt{\Delta})^s \\ &\quad = \frac{1}{\pi}\zeta(2s)\left(\frac{2\sqrt{\Delta}}{c}\right)^s + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1)\left(\frac{2c}{\sqrt{\Delta}}\right)^{s-1} \\ &\quad + \frac{2^{s+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\beta^s \sum_{m,n}\cos 2mn\alpha\pi \int_0^\infty e^{-\beta^2m^2x-\frac{\pi^2n^2}{x}}\,x^{s-\frac{3}{2}}\,dx\,. \end{aligned}\right.$$

Jedná se o prvé dva členy mocninového rozvoje vůči $s-1$. Dle věty Riemannovy máme

$$\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\,\zeta(2s-1) = \pi^{2s-\frac{3}{2}}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(2-2s),$$

takže druhý člen pravé strany rovnice (a) zní při označení $\sigma = s-1$:

$$2\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\zeta(2-2s)\left(\frac{2\pi^2c}{\sqrt{\Delta}}\right)^{s-1}$$

$$= -\frac{2}{\sigma}\left\{1-2\Gamma'(1)\,\sigma+\ldots\right\}\cdot\left\{\zeta(0)-\zeta'(0)\,.\,2\sigma+\ldots\right\}\left\{1+\sigma\log\frac{2\pi^2c}{\sqrt{\Delta}}+\ldots\right\};$$

avšak $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi$, a tedy začíná rozvoj druhého členu v (a) takto:

$$\frac{1}{s-1}+(-2\Gamma'(1)-\log 2\sqrt{\Delta}+\log c)+\ldots;$$

---

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen, XIII. (Sitzungsberichte der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften 1889; Gesammtsitzung vom 21. Februar).

k tomu dlužno přičísti člen stálý

$$\frac{1}{\pi}\,\zeta(2)\,\frac{2\sqrt{\Delta}}{c}+\frac{4\beta}{\sqrt{\pi}}\sum_{m,n}\cos 2mn\alpha\pi\; e^{-2\beta mn\pi}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\Delta}}{3c}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\,e^{2mn\pi i(\alpha+\beta i)}+\frac{1}{m}\,e^{2mn\pi i(-\alpha+\beta i)}\right)$$

$$=-\frac{\pi i}{6}(w_1+w_2)-2\log\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})$$

$$=-2\log H(w_1)\,H(w_2)\,.$$

Nacházíme takto prvé dva členy rozvoje

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(2\sqrt{\Delta})^s}{2\pi}\,K'(a,b,c;s)\\[2ex] =\dfrac{1}{s-1}-2\Gamma'(1)-\log 2\sqrt{\Delta}-2\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}}\,H(w_1)\,H(w_2)\right)+(s-1)\,\mathfrak{P}(s-1)\,.\end{array}\right.$$

Výsledek odtud plynoucí, že

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,H(w_1)\,H(w_2)$$

jest invariantem rovnomocných forem (a,b,c), dá se ovšem též přímo verifikovati.

Zcela podobně bychom shledali, že *koefficient při s v Maclaurinovském rozvoji funkce* (3) zní

$$-2\log 2\pi-2\log\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}\,H(w_1)\,H(w_2)\right\}.$$

§. 12. Zobecnění řad Kroneckerových.

Invariantem rovnomocných kladných forem kvadratických (a,b,c) je též řada

$$(1)\qquad\sum_{m,n}\left(\frac{2\sqrt{\Delta}}{u+am^2+2bmn+cn^2}\right)^s,$$

$$(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots);\qquad \Delta=ac-b^2\,,$$

v níž u jest buď kladné aneb aspoň větší než záporně vzaté minimum kladné formy $ax^2+2bxy+cy^2$.

Zavedemeli opětně označení

$$\frac{b}{c}=\alpha\,,\qquad\frac{\sqrt{\Delta}}{c}=\beta\,,\qquad-\alpha+\beta i=w_1\,,\qquad\alpha+\beta i=w_2\,,\qquad\frac{u}{c}=v\,,$$

můžeme řadu (1) psáti

$$(1^a)\qquad\sum_{m,n}\left(\frac{2\beta}{(\alpha m+n)^2+\beta^2m^2+v}\right)^s;$$

na základě vzorce (4) §. 8 možno provésti sčítání vůči n, čímž vznikne výraz pro tutéž veličinu

$$(1^b)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \dfrac{(2\beta)^s}{(v+\beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} \\ \quad + \dfrac{2\sqrt{\pi}\,(2\beta)^s}{\Gamma(s)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \cos 2mn\alpha\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-(v+\beta^2 m^2)x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx\,, \end{cases}$$

kde dlužno předpokládati $u > 0$.

Dle téhož vzorce (4) pak bude veličina

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\beta)^s}{(v+\beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+\frac{v}{\beta^2})^{s-\frac{1}{2}}}$$

dána řadou

$$\left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}\left(\frac{v}{\beta^2}\right)^{1-s} + \frac{2\sqrt{\pi}\,\beta}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{\beta}\right)^s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{\beta^2}x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{s-2}\, dx\,,$$

a tedy bude *řada* (1) *rovna veličině*

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{s-1}\left(\dfrac{2\sqrt{\Delta}}{u}\right)^{s-1} + \dfrac{4\pi}{\Gamma(s)}\left(\dfrac{2c}{\sqrt{\Delta}}\right)^{s-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{cu}{\Delta}x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{s-2}\, dx \\ \quad + \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\left(\dfrac{2\sqrt{\Delta}}{c}\right)^s \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \cos 2mn\,\dfrac{b\pi}{c} \int\limits_0^{\infty} e^{-(cu+m^2\Delta)\frac{x}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx\,. \end{cases}$$

Tato veličina jest jednoznačnou funkcí analytickou proměnné s, *nemající v konečnu jiných míst zvláštních kromě pólu* $s = 1$, *na němž chová se jako* $\dfrac{2\pi}{s-1}$.

Začasté bývá výhodnější zůstati při vzorci (1^b). Hledejme na př. prvé dva členy mocninového rozvoje dle $(s-1)$. Tu nám bude především ustanoviti ony členy v rozvoji funkce

$$(2\beta)^s \beta^{1-2s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+\frac{v}{\beta^2})^{s-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta\, \mathrm{Ml.}\left(0,0,\sqrt{\tfrac{v}{\beta^2}},2s-1\right).$$

Avšak dle vzorce (2) §. 2 jest

$$\mathrm{Ml.}\,(0,0,u,\sigma) = 2\sin\frac{\sigma\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi\sqrt{u^2+x^2}}+1}{e^{2\pi\sqrt{u^2+x^2}}-1} \frac{x^{1-\sigma}\,dx}{\sqrt{u^2+x^2}}$$

a tedy

$$(a)\quad \begin{cases} \text{Ml.}\left(0,0,\sqrt{\frac{v}{\beta^2}},2s-1\right) = -2\cos s\pi \int_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}+1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}-1}\,\frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}} \\ \quad = -4\cos s\pi \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}-1}\,\frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}} - 2\cos s\pi \int_0^\infty \frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}. \end{cases}$$

V posledním integrálu kladme $x^2 = \frac{v}{\beta^2}y$, čímž obdržíme jej ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{v}{\beta^2}\right)^{1-s}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-s}\,dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{v}{\beta^2}\right)^{1-s}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)\Gamma(s-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

předpokládámeli $\frac{3}{2} > s > 1$.

Máme tedy

$$(b)\quad \begin{cases} \text{Ml.}\left(0,0,\sqrt{\frac{v}{\beta^2}},2s-1\right) = -\left(\frac{\beta^2}{v}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(s-1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\sqrt{\pi}}\cos s\pi \\ \quad -4\cos s\pi \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}-1}\,\frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}. \end{cases}$$

Funkce, o jejíž začátek rozvoje dle mocností $(s-1)$ se jedná, zní:

$$(c)\quad \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\beta)^s}{(v+\beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{2\pi}{s-1}\left(\frac{2\beta}{v}\right)^{s-1} - \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\cos s\pi}{\Gamma(s)}\,\beta\left(\frac{2}{\beta}\right)^s \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}-1}\,\frac{x^{2-2s}\,dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}, \end{cases}$$

a prvé dva členy uvažovaného rozvoje budou

$$(A)\qquad \frac{2\pi}{s-1} + 2\pi\log\frac{2\beta}{v} + 8\pi\int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2}+x^2}},$$

kde poslední integrál lze též psáti

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^{2\pi x\sqrt{\frac{v}{\beta^2}}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

aneb po substituci $x+\sqrt{x^2-1}=e^z$,

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{\pi\sqrt{\frac{v}{\beta^2}(e^z+e^{-z})}}-1}.$$

Aby se obdrželi hledaní členové rozvoje funkce (2), dlužno k výrazu (A) přičísti výraz

$$4\beta\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos 2mn\alpha\pi\int_0^\infty e^{-(v+\beta^2m^2)x-\frac{n^2\pi^2}{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=4\beta\pi\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2mn\alpha\pi\,.\,e^{-2\pi n\sqrt{v+\beta^2m^2}}}{\sqrt{v+\beta^2m^2}},$$

takže nacházíme větu:

Prvé dva členy mocninového rozvoje dle $(s-1)$ *analytické funkce dané elementem* (1) *znějí:*

$$(3)\quad \left\{\frac{2\pi}{s-1}+\left\{2\pi\log\frac{2\sqrt{\Delta}}{u}+8\pi\int_0^\infty\frac{dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cosh z}-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.+4\pi\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{cu+\Delta m^2}\left(e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{cu+\Delta m^2}+\frac{2mb\pi i}{c}}-1\right)}\right\}\right.$$

a výraz obsažený v závorce $\{\}$ *jest invariantem rovnomocných forem* (a,b,c) *značíli* u *veličinu na* (a,b,c) *nezávislou a kladnou.*

Ustanovíme ještě součinitele při s v Maclaurinovském rozvoji funkce (1) čili (2). Pro tuto veličinu obdržíme výraz [dle (1^b) a (c)]:

$$\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}}\left(1+\log\frac{2\sqrt{\Delta}}{u}\right)+8\pi\frac{\sqrt{\Delta}}{c}\int_0^\infty\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-1}\frac{x^2dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}$$

$$+2\sqrt{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2mnb\pi}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{c^2}(cu+\Delta m^2)x-\frac{n^2\pi^2}{x}}x^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Prostřední člen přejde substitucí $x+\sqrt{x^2+\frac{cu}{\Delta}}=\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}e^z$ u výraz

$$\frac{u}{\sqrt{\Delta}}8\pi\int_0^\infty\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cosh z}-1}\sin^2\mathrm{hyp}\,z\,dz,$$

a uvažovaný součinitel rozvoje Maclaurinova zní

$$\left(1+\log\frac{2\sqrt{\Delta}}{u}\right)\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}}+\frac{8\pi u}{\sqrt{\Delta}}\int_0^\infty \frac{\sin^2\mathrm{hyp}\,z\,dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cosh\mathrm{hyp}\,z}-1}$$

$$+2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{2mnb\pi}{c}\,e^{-\frac{2n\pi}{c}\sqrt{cu+\Delta m^2}}$$

$$=\left(1+\log\frac{2\sqrt{\Delta}}{u}\right)\frac{\pi u}{\sqrt{\Delta}}+8\pi\frac{u}{\sqrt{\Delta}}\int_0^\infty \frac{\sin^2\mathrm{hyp}\,z\,dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cosh\mathrm{hyp}\,z}-1}$$

$$-2\log\prod_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{c}(mb+i\sqrt{cu+\Delta m^2})}\right).$$

Odtud plyne, že *funkce*

$$(4)\qquad e^{-\frac{2\pi u}{\sqrt{\Delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\mathrm{hyp}\,z\,dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cosh\mathrm{hyp}\,z}-1}}\prod_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{c}(mb+i\sqrt{cu+\Delta m^2})}\right)$$

jest invariantem rovnomocných forem kvadratických (a,b,c).

§. 13. Zobecnění vztahu Malmstén-Lipschitzova.

Je patrno, jak lze buď pomocí přímých method elementarných aneb též pomocí transformačních vzorců funkcí theta v tvoření nových invariantů pokračovati a zejména rozšířiti tyto úvahy též na formy ternarné, quaternarné atd. Ačkoliv by nebylo prosto zajímavosti vyložiti zde výsledky, jichž jsme na tomto poli dosáhli již před více než pěti lety, nicméně přestáváme na těchto ukázkách, ponechávajíce sobě na jinou příležitosť vrátiti se k těmto úvahám obírajícím se transcendentami tak málo přístupnými.

Chceme zakončiti tuto práci trigonometrickým rozvojem funkce

$$(1)\quad\begin{cases} S(w_1,w_2,\ldots w_p;v_1,v_2,\ldots v_p;c_1,c_2,\ldots c_p;u,s)\\ =\displaystyle\sum_{n_1 n_2\ldots n_p}\frac{e^{2\pi i(n_1v_1+n_2v_2+\ldots+n_pv_p)}}{[c_1(w_1+n_1)^2+c_2(w_2+n_2)^2+\ldots+c_p(w_p+n_p)^2+u]^s}, \end{cases}$$

kde s je v realné části větší než $\frac{p}{2}$, aby řada konvergovala absolutně; veličiny v jsou ryzí zlomky, $c_1,c_2,\ldots c_p$, u kladné konstanty, $w_1,w_2,\ldots w_p$ komplexní proměnné, vesměs obsažené uvnitř jistého pásu zahalujícího osu realnou; součet vztahuje se ke všem soustavám celistvých hodnot $n_1,n_2,\ldots n_p$ kladných i záporných.

Tuto funkci lze vyjádřiti řadou*)

$$S = e^{-2\pi i \Sigma^* v_\alpha w_\alpha} \sum_{(m)} A_{m_1 m_2 \dots m_p} e^{2\pi i \Sigma^* m_\alpha w_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots p),$$

jejíž součinitelé se obdrží pomocí vzorce

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p} = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 S e^{2\pi i \Sigma^* (v_\alpha - m_\alpha) w_\alpha} \, dw_1 \, dw_2 \dots dw_p ,$$

tedy

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p} = \sum_{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \left[\Sigma^* v_\alpha (n_\alpha + w_\alpha) - \Sigma^* m_\alpha w_\alpha\right]}}{\left[u + \Sigma^* c_\alpha (w_\alpha + n_\alpha)^2\right]^s} \, dw_1 \, dw_2 \dots dw_p .$$

Přetvořímeli obecný člen substitucemi $w_\alpha + n = x_\alpha$, vznikne

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \Sigma^* (v_\alpha - m_\alpha) x_\alpha}}{(u + \Sigma^* c_\alpha x_\alpha^2)^s} \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n .$$

Užijemeli tu vzorce

$$\frac{1}{(u + \Sigma^* c_\alpha x_\alpha^2)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-\left(u + \Sigma^* c_\alpha x_\alpha^2\right) x} \, x^{s-1} \, dx ,$$

obdržíme po změně pořádku integračního výsledek následující:

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-ux} x^{s-1} \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Sigma^* c_\alpha x x_\alpha^2 + 2\pi i \Sigma^* (v_\alpha - m_\alpha) x_\alpha} \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_p .$$

Avšak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_\alpha x x_\alpha^2 + 2\pi i (v_\alpha + m_\alpha) x_\alpha} \, dx_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{c_\alpha x}} \, e^{-\frac{\pi^2 (v_\alpha - m_\alpha)^2}{x c_\alpha}},$$

z čehož vznikne

$$A_{m_1 m_2 \dots m_p} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \int_0^\infty e^{-ux - \frac{1}{x} \Sigma^* \frac{\pi^2 (v_\alpha - m_\alpha)^2}{c_\alpha}} x^{s - \frac{p}{2} - 1} \, dx .$$

---

*) Z důvodů typografických uvádíme při součtu Σ^* hvězdičku, abychom naznačili, že tento vztahuje se k příponě α, a sice pro hodnoty $\alpha = 1, 2, 3, \dots p$.

Dosazením této hodnoty za $A_{m_1 \dots m_p}$ do hořejšího vzorce obdržíme

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} S(w_1 \dots w_p ; v_1 \dots v_p ; c_1 \dots c_p ; u, s) \\ = \dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \dfrac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m_1 \dots m_p} e^{2\pi i \Sigma^* (m_\alpha - v_\alpha) w_\alpha} \int_0^\infty e^{-ux - \frac{\pi^2}{x} \Sigma^* \frac{(v_\alpha - m_\alpha)^2}{c_\alpha}} x^{s - \frac{p}{2} - 1} dx . \end{array} \right.$$

Předpokládámeli, že tato relace zůstane v platnosti i když Real. $s < \frac{p}{2}$, kdy tedy řada v levo konverguje pouze podmínečně, takže tu třeba ustáliti pořádek summační tak, aby udávala propagaci funkce S, zůstane relace (2) stále platnou. Jestliže pak přejdeme k limitě pro $u = 0$, přejde pravá strana u výraz

$$\frac{\pi^{-\frac{p}{2}+2s}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p - s)}{\Gamma(s)} \sum_{m_1 \dots m_p} \frac{c^{2\pi i \Sigma^* (m_\alpha - v_\alpha) w_\alpha}}{[c_1^{-1}(v_1 - m_1)^2 + c_2^{-1}(v_2 - m_2)^2 + \dots + c_p^{-1}(v_p - m_p)^2]^{\frac{1}{2}p - s}}$$

$$= \frac{\pi^{2s - \frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}p - s)}{\Gamma(s)} e^{-2\pi i \Sigma^* v_\alpha w_\alpha}$$

$$S(1 - v_1, 1 - v_2, \dots 1 - v_p ; w_1, w_2, \dots w_p ; c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots c_p^{-1} ; 0, \tfrac{1}{2}p - s) ,$$

takže máme reciprocitu

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(s)\, S(w ; v ; c ; 0, s) \\ = \dfrac{\pi^{2s - \frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} e^{-2\pi i \Sigma^* v_\alpha w_\alpha} \Gamma(\frac{1}{2}p - s)\, S(1 - v ; w ; c^{-1} ; 0, \tfrac{1}{2}p - s) , \end{array} \right.$$

která zobecňuje značnou měrou relaci (3) §. 3, z níž jsme odvodili vztah Malmstén-Lipschitzův.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 28.

STUDIE
O MONOMAGNESIUMFOSFATU

II.

SDĚLUJE

JULIUS STOKLASA.

PŘEDLOŽENO DNE 11. BŘEZNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Působení tepla ve fosfat. Praeparat číslo III. vykazoval složení:

$MgO = 15{\cdot}42\%$
$P_2O_5 = 55{\cdot}61$ »
$H_2O = 28{\cdot}54$ »

2·489 *gr* sušeno bylo při teplotě 100° C. po 2 hodiny. Ztráta obnášela 14·13%. Od 110° C.—170° C. uniklo opět vody . . . . . 14·17 »

Odtud patrno, že působením teploty od 100°—170° ztrácí monomagnesiumfosfat dvě molekuly vody.

Praeparat bez vody krystalové jeví se v bílých, neprůhledných, drobných krystalech následujícího složení:

Nalezeno:		Formula $MgH_4(PO_4)_2$ vyžaduje:	
MgO	$= 18{\cdot}39\%$	MgO	$= 18{\cdot}34$
P_2O_5	$= 65{\cdot}23$ »	P_2O_5	$= 65{\cdot}15$
H_2O	$= 16{\cdot}14$ »	H_2O	$= 16{\cdot}51$

Ve vodě rozpouští se v poměru 1 : 5 bez rozkladu, ale velmi zvolna. Na vzduchu jest stálým. Hygroskopickým se nezjevil ani po 30 dnech.

Pokusy další prováděny s odváženým množstvím monomagnesiumfosfatu v misce platinové. A sice užito vždy 2—3 grammů.

2·5341 grammů sušeno při 175° C. po dvě hodiny. Ztráta vody obnáší 16·20%. Prchlo tedy již 2·03% vody konstituční.

Monofosfat sušený rozpuštěn ve 500 cm^3 vody. Roztok byl úplně čirým.

Analysí nalezeno:

P_2O_5 (methodou molybdenovou)	55·74%
MgO	15·54%

Stanovíme-li kyselinu fosforečnou octanem uranovým, nalezneme vždy méně, nežli methodou molybdenovou. Rozdíl jest vyvolán kyselinou fosforečnou, která nalézá se v roztoku ve způsobě monomagnesiumpyrofosfatu; několika kapkami kyseliny dusičné přechází tento ve monomagnesiumorthofosfat.

Stanovení octanem uranovým nelze považovati za zcela přesné a získaný výsledek jest pouze přibližný, jak jsem již ukázal v pojednání svém v »Zeitschrift für analytische Chemie« 1890. (O působení tepla v monocalciumfosfat.)

V roztoku nalezeno kyseliny fosforečné ve formě monomagnesiumpyrofosfatu *14·54%*.

Dostoupí-li teplota 184° C., za dvě hodiny prchlo celkem 17·93% vody.

Odváženo 2·680 grammů monomagnesiumfosfatu a poznovu sušeno od 175° C. Při teplotě 183—84° C. nastal nový rozklad a nalezeno 17·96% vody. Ztráta vody konstituční tedy obnáší 3·79%.

Roztok v 500 cm^3 vody byl opět úplně čirým.

Po zavaření roztoku s NO_3H nalezeno methodou molybdenovou

P_2O_5 . . .	55·73%
MgO . . .	15·60 »
P_2O_5 ve formě monomagnesiumpyrofosfatu určeno	28·27 »

K dalšímu pozorování odváženo opět 2·237 grammů monomagnesiumfosfatu. Teplota 196° C. zjevila nám rozklad. Uniklo celkem 19·49% vody. Ztráty vody konstituční konstatováno 5·07%. Roztok čirý tajil:

P_2O_5 (za působení NO_3H methodou molybdenovou) . .	55·80%
MgO	15·68 »
P_2O_5 ve formě monomagnesiumpyrofosfatu	42·31 »

Při teplotě až do 205° C. shledán v novém množství další rozklad. Určeno veškeré vody 21·42%. Ztráta vody konstituční jeví se 7·25%. Čirý roztok obsahoval:

P_2O_5 za působení NO_3H methodou molybdenovou . . .	55·63%
MgO	15·62 »
P_2O_5 ve formě monomagnesiumpyrofosfatu	53·02 »

Pozorováním nalezených dát lze nám vystihnouti čtyry fáse procesu.

I. Ztráta krystallové vody. Působením teploty 100—170° C. po 2 hodiny:

$$4MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O = 4MgH_4(PO_4)_2 + 8H_2O.$$

Theorie vyžaduje ztrátu vody krystallové . . .	14·17%
Nalezeno	**14·13—14·17 %**

II. Rozklad monomagnesiumfosfatu ve pyrofosfat vedle monofosfatu. Zde jest nám rozvrhnouti fáse procesu na tři oddíly.

a) Působení teploty při 175—176° C.

$$4MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O = 3MgH_4(PO_4)_2 + MgH_2P_2O_7 + 9H_2O.$$

Theorie vyžaduje:

$MgH_4(PO_4)_2$	= 64·37%	odpovídá P_2O_5	= 41·93%
$MgH_2P_2O_7$	= 19·68 »	» »	= 13·97 »
H_2O	= 15·94 »		*55·90% vešk. P_2O_5*

Nalezeno:

P_2O_5 ve formě $MgH_4(PO_4)_2 = 41{\cdot}20\%$
» » » $MgH_2(PO_4)_2 = 14{\cdot}54$ »
$H_2O = 16{\cdot}20$ »
} $55{\cdot}74\%$ *vešk.* P_2O_5

b) Působení teploty při 184° C.

$$4MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O = 2MgH_4(PO_4)_2 + 2MgH_2P_2O_7 + 10H_2O.$$

Theorie vyžaduje:

$MgH_4(PO_4)_2 = 42{\cdot}90\%$ odpovídá $P_2O_5 = 27{\cdot}94\%$
$MgH_2P_2O_7 = 39{\cdot}34$ » » » $= 27{\cdot}94$ »
$H_2O = 17{\cdot}76$ »
} $55{\cdot}88\%$ *vešk.* P_2O_5

Nalezeno:

P_2O_5 ve formě $MgH_4(PO_4)_2$ . . . $27{\cdot}46\%$
» » » $MgH_2P_2O_7$ . . . $28{\cdot}27$ »
H_2O . . . . . $18{\cdot}00$ »
} $55{\cdot}73\%$ vešk. P_2O_5

c) Působení teploty 196° C.

$$4MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O = MgH_4(PO_4)_2 + 3MgH_2P_2O_7 + 11H_2O.$$

Theorie vyžaduje:

$MgH_4(PO_4)_2 = 21{\cdot}45\%$ odpovídá P_2O_5 . $13{\cdot}97\%$
$MgH_2P_2O_7 = 59{\cdot}05$ » » » . $41{\cdot}93$ »
$H_2O = 19{\cdot}49$ »
} $55{\cdot}90\%$ vešk. P_2O_5

Nalezeno:

P_2O_5 ve formě $MgH_4(PO_4)_2$ . . . $13{\cdot}49\%$
» » » $MgH_2P_2O_7$ . . . $42{\cdot}31$ »
H_2O . . . . . $19{\cdot}24$ »
} $55{\cdot}8\%$ vešk. P_2O_5

III. Rozklad monomagnesiumfosfatu ve monomagnesiumpyrofosfat.

Působení tepla 205° C.

$$4MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O = 4MgH_2P_2O_7 + 12H_2O.$$

Theorie vyžaduje:

$MgH_2P_2O_7 = 78{\cdot}74\%$ odpovídá $P_2O_5 = 55{\cdot}90\%$
$H_2O = 21{\cdot}26\%$.

Nalezeno:

P_2O_5 ve formě $MgH_2P_2O_7$ . . . . $= 55{\cdot}02\%$
H_2O . . . . . $= 21{\cdot}42$ »

Výjevy thermické z uvedených stadií dokazují zjevně, že stabilita sloučeniny porušena jest temperaturou 175° C. (sušením po 2 hodiny) a rozklad monomagnesiumfosfatu dostupuje kritického bodu při teplotě 205° C. Monomagnesium-

pyrofosfat, jak z uvedených fásí zříme, tvoří se zvolna, energie rozkladu jest mnohem menší, nežli u monofosfatů: kalcia, strontia a barya. Ztráta vody krystallové 14·17% působením teploty od 100—170° C., dále vody konstituční, dostupující 7·08% (analysou nalezeno 7·25%), tedy úhrnem 3 molekul vody.

IV. Úplný rozklad monomagnesiumpyrofosfatu.

Postupem temperatury od 205° C. výše počíná se monomagnesiumpyrofosfat rozkládati i vylučuje monometafosfat a vodu:

$$MgH_2P_2O_7 = Mg(PO_3)_2 + H_2O.$$

Působení	teploty	2 hodin	při	210° C.:	Ztráta	vody	vody	veškeré = 22·04%
»	»	»	»	220° C.	»	»	»	» = 22·42 »
»	»	»	»	230° C.	»	»	»	» = 23·07 »
»	»	»	»	240° C.	»	»	»	» = 23·28 »
»	»	»	»	250° C.	»	»	»	» = 23·34 »
»	»	»	»	260° C.	»	»	»	» = 23·64 »
»	»	»	»	270° C.	»	»	»	» = 23·62 »
»	»	»	»	280° C.	»	»	»	» = 23·66 »
»	»	»	»	290° C.	»	»	»	» = *25·80* »
»	»	»	»	295° C.	»	»	»	» = *26·99* »
»	»	»	»	300° C.	»	»	»	» = *28·07* »
»	»	»	»	303° C.	»	»	»	» = 28·50 »

Při teplotě 303° C. byl rozklad ukončen.

Z počátku jevil se rozklad při teplotě 210—230° poněkud intensivním — pak ochabl a při temperatuře 290° C. opět oživl.

Theorie vyžaduje dle rovnice:

$$MgH_4(PO_4)_2 = Mg(PO_3)_2 + 4H_2O$$

Nalezeno: $Mg(PO_3)_2 = 71·65\%$
$H_2O = 28·35$ »

Nalezeno: $Mg(PO_3)_2 = 71·03\%$
$H_2O = 28·50$ »

Monometafosfat byl sklovitý, bílý.

Analysou nalezeno:	P_2O_5 . . .	77·68%
	MgO . . .	21·64 »
Formula $Mg(PO_3)_2$ vyžaduje:	P_2O_5 . . .	78·02 »
	MgO . . .	21·98 »

Pozorujeme-li efekt jednotlivých výjevů tepelných při monofosfatech kalcia, strontia, baria a magnesia, poznáme, že stabilita jejich jest rozdílná a rozklad nestejný. —

Přistupme prve ke konstituci monofosfatů a jejich rozpustnosti ve vodě.

$CaH_4(PO_4)_2 . H_2O$		$SrH_4(PO_4)_2 . H_2O$	
vyžaduje:	nalezeno:	vyžaduje:	nalezeno:
CaO . . 22·22%	CaO . . 22·36%	SrO . . 34·49%	SrO . . 34·29%
P_2O_5 . . 56·35 »	P_2O_5 . . 56·67 »	P_2O_5 . . 47·46 »	P_2O_5 . . 47·40 »
H_2O . . 21·43 »	H_2O . . 21·53 »	H_2O . . 18·05 »	H_2O . . 18·00 »

$BaH_4(PO_4)_2 . H_2O$

vyžaduje:	nalezeno:
BaO . . . 40·69%	BaO . . . 40·72%
P_2O_5 . . . 43·84 »	P_2O_5 . . . 43·60 »
H_2O . . . 15·47 »	H_2O . . . 15·21 »

ve vodě se rozkládají za obyčejné teploty.

$MgH_4P_2O_8 + 2H_2O$

vyžaduje:	nalezeno:
MgO . . . 15·74%	MgO . . . 15·42%
P_2O_5 . . . 55·90 »	P_2O_5 . . . 55·61 »
H_2O . . . 28·35 »	H_2O . . . 28·54 »

ve vodě se vůbec nerozkládá.

Nápadně vystupuje rostoucí poměr či množství kysličníku a úbytek vody, hledíc k atomové váze kovů jednotlivých monofosfatů.

Mg	Ca	Sr	Ba
24	40	87·2	136·8
$MgO = 15·74\%$	$CaO = 22·22\%$	$SrO = 34·49\%$	$BaO = 40·69\%$
$H_2O = 28·35$ »	$H_2O = 21·43$ »	$H_2O = 18·05$ »	$H_2O = 15·47$ »

Srovnávacími pokusy dokumentoval jsem, že u monocalciumfosfatu dostupuje největší tepelný efekt rozkladu v monometafosfat a vodu při 210° C. — u monostrotiumfosfatu při 204° C., a u monobaryumfosfatu při 197° C.

Procesy rozkladu lze znázorniti:

$MgH_4P_2O_8 . 2H_2O = Mg(PO_3)_2 + 4H_2O.$	Rozklad při	303° C.
$CaH_4P_2O_8 . H_2O = Ca(PO_3)_2 + 3H_2O.$	» »	210° C. — 213° C.
$SrH_4P_2O_8 . H_2O = Sr(PO_3)_2 + 3H_2O.$	» »	204° C. — 206° C.
$BaH_4P_2O_8 . H_2O = Ba(PO_3)_2 + 3H_2O.$	» »	197° C. — 198° C.

Interessantním úkazem jest analogický rozklad monostrontium a monobaryumfosfatu s monocalciumfosfatem.

Poukázal jsem* na tvorbu pyrofosfatu a metafosfatu, monocalciumpyrofosfatu a kyseliny orthofosforečné při rozkladu monofosfatu při teplotě 200° C. dle rovnice:

$$8CaH_4P_2O_8 . H_2O =$$
$$4CaH_4P_2O_8 + CaP_2O_6 + Ca_2P_2O_7 + CaH_2P_2O_7 + 2H_3PO_4 + 12H_2O.$$

Další sušení při teplotě 200° C. způsobuje rozklad:

$$4CaH_4P_2O_8 + CaP_2O_6 + Ca_2P_2O_7 + CaH_2P_2O_7 + 2H_3PO_4 =$$
$$2CaP_2O_6 + 4CaH_2P_2O_7 + Ca_2P_2O_7 + 2H_3PO_4 + 5H_2O.$$

$$2Ca_2P_2O_6 + 4CaH_2P_2O_7 + Ca_2P_2O_7 + 2H_3PO_4 =$$
$$6CaP_2O_6 + 2CaH_2P_2O_7 + 5H_2O.$$

Monocalciumpyrofosfat vzniká pak jako u rozkladu monomagnesiumfosfatu, ze kterého se utvoří konečný produkt monometafosfat.

$$6CaP_2O_6 + 2CaH_2P_2O_7 = 8CaP_2O_6 + 2H_2O.$$

Zcela podobný proces, ovšem při menších teplotách, děje se v rozkladu monostrontiumfosfatu a monobaryumfosfatu.

Charakteristická tato vlastnost monofosfatů *kalcia, barya* a *strontia* nezjevuje se u monofosfatu *magnesia*; monomagnesiumpyrofosfat jest jedinou přechodnou sloučeninou k monometafosfatu.

Resumé celého výzkumu zobrazuje analogii v řadě prvků Ca, Sr, Ba, — **nikoli ale Mg**.

*Julius Thomson*** ve výzkumech thermických konstatoval, že povaha i tepelné zabarvení sloučenin kovů Mg, Ca, Sr a Ba se mění s váhou atomovou vytčených prvků. Z porovnání našeho plyne nová souhlasná vlastnost monofosfatů se solmi těchže prvků.

Vzrůstající atomovou váhou:

1) Ubývá rozpustnosti monofosfatu ve vodě (intramolekularná přitažlivost jest odvislá od massy prvků).
2) Ubývá stability za působení tepla.
3) Ubývá afinity k vodě.***

---

* Zeitschrift für analytische Chemie XXIX. Sešit IV.

** J. Thomson, Thermochemische Untersuchungen. Dritter Band. Leipzig. 1883, strana 555—563. Dále: Chemie theoretická od Bohuslava Raýmana, strana 140.

*** Studie o monofosfatech barya, strontia, kadmia a zinku s kritickým přehledem vlastností monofosfatů Ca a Mg, dále resultaty kalorimetrických pozorování budu publikovati co nejdříve.

Působení tepla v roztok monomagnesiumfosfatu.

2·524 grammů $MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O$ rozpuštěno bylo ve 500 cm^3 vody. Roztok udržován ve stejné koncentraci po 60 hodin na vodní lázni. Roztok zůstal vždy čirým. Volná kyselina fosforečná nezjevila se ani ve stopách.

Působení alkoholu v roztok monomagnesiumfosfatu.

Alkohol absolutný (destilovaný se žíhaným kysličníkem vápenatým) i vodnatý rozkládá monomagnesiumfosfat ve stavu pevném i v roztoku.

Proces děje se následující:

$$MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O + H_2O = MgHPO_4 . 3H_2O + H_3PO_4.$$

Vyloučený difosfat *nalezen byl v konstituci dosud neznámé.*

Za působení alkoholu ve značném nadbytku při teplotě 100° C. jest rozklad úplný.

2·008 grammů $MgH_4(PO_4)_2 . 2H_2O$ rozpuštěno bylo ve 200 cm^3 vody. Roztok zahříván byl při 100° C. na vodní lázni a přidáván absolutný alkohol tak dlouho, až se krystalky difosfatu více nevylučovaly. Ssedlina sfiltrována a promývána s étherem na váženém filtru; — filtrat analysován po úplném odpaření étheru i alkoholu; ssedlina sušena k váze konstantní nad kyselinou sírovou. —

Theorie vyžaduje při úplném rozkladu:

$MgHPO_4 . 3H_2O = 63·96\%$
$H_3PO_4 = 36·03$ »

Nalezeno:

$MgHPO_4 . 3H_2O = 63·27\%$
$H_3PO_4 = 35·69$ »

Působí-li alkohol ve větší množství rozpuštěného monomagnesiumfosfatu, získáme poněkud vyvinuté krystalky difosfatu perlového lesku.

Formula $MgH . PO_4 . 3H_2O$ vyžaduje:		Nalezeno:	
MgO	22·98%	MgO	22·56%
P_2O_5	40·81 »	P_2O_5	41·02 »
H_2O	36·21 »	H_2O	36·40 »

Difosfat jest těžko rozpustným ve vodě, v kyselinách slabých zjevuje úplnou rozpustnost.

A. de Schulten nalezl* nový (!) difosfat složení $MgHPO_4 . H_2O$ působením kyseliny orthofosforečné v uhličitan horečnatý za tepla 225° C.

Difosfat uvedené konstituce získáme z našeho $MgHPO_4 . 3H_2O$, sušíme-li jej při 205°—208° C.

---

* Comptes rendus 100. 263.

Celá řada difosfatů, které popsali Debray,* Bergmann,** Rammelsberg,** Fourcroy,** jsou smíšeniny a zplodiny rozkladu $MgH . PO_4 . 3H_2O$.

Dle četných mých výzkumů tvoří se pravidelně působením kyseliny orthofosforečné (bez nadbytku) v uhličitan hořečnatý $MgH . PO_4 . 3H_2O$, jest se jen diviti, jak mohl zůstati do dnes opominutým ve skutečné své konstituci.

---

* Journal pr. Chem. 97. S. 116.

** Gmelin-Kraut's Handb. 2. S. 446.

600

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 29.

O ERUPTIVNÍCH HORNINÁCH TEŠENITOVÝCH A PIKRITOVÝCH NA SEVEROVÝCHODNÍ MORAVĚ.

PŘEDBĚŽNÁ ZPRÁVA.

PODÁVÁ

PROF. JOSEF KLVAŇA.

PŘEDLOŽENO DNE 29. DUBNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Zabývaje se již delší dobu a systematicky petrografickým zkoumáním na vyvřelých horninách milé své vlasti, strávil jsem prázdniny r. 1890 a 1891 na Moravě severovýchodní, abych *vlastnoručně* nasbíral potřebný materiál zdejších hornin tešenitových a pikritových, eventuelně i čedičových a zároveň abych, pokud možno i potřebno, *podrobným* i *bedlivým* prohlížením vyvřelých lokalit, získal dostatečně jasných dát o tektonické, po případě i geologické povaze zmíněných hornin.

Cílem zkoumání vlastního hornin uvedených vytkl jsem si ovšem především materiál nasbíraný ze *všech* skorem míst vyvřelých v *severovýchodním cípu Moravy* **petrograficky** *prohlédnouti a na základě tohoto prohlížení podati nejen popis petrografický leč i zprávy o vzájemném a nepopíratelném vztahu obou hlavních hornin zdejších, pikritu totiž a tešenitu.*

O obou horninách těch vykazuje literatura petrografická sice již četně spisů i pojednání od vynikajících petrografů (Rosenbusch, Tschermak, Möhl atd.), ale jediný pohled na všechny takměř, do té chvíle vyšlé práce, ukáže odborníkovi, že pozorování popsaná ze dvaceti, třiceti míst eruptivních na Moravě a ve Slezsku, a to z míst často velice vzdálených, nikterak nedostačují při těch stech nalezišť, jež na Moravě a ve Slezsku konstatovati možno. Tím méně mohou přispěti k objasnění záhadné anebo alespoň spletité otázky vzájemného vztahu a stáří tešenitů a pikritů pozorování, konaná *jen* petrograficky na vzorcích hornin, *vypůjčených z různých sbírek geologických!** Rozptylené a nahodilé popisování takové ukáže se býti tím pochybenějším, čím snáze ukázati se dá na mnohých místech i na Moravě, ku př. v okolí *Bludovic* u *Nov. Jičína,* v okolí *Veřovic* u *Frenštátu*, kolem *Jičína Starého* a j. v., kterak obě horniny takměř vedle sebe vystupují, ba místy i jakoby do sebe přecházejí. Také když objasněna jest věc na jednom místě, nesmí se ihned generalisovati, nýbrž nutno vyhledati podobná nebo alespoň analogická místa a teprv potom lze o povaze a vztahu hornin zdejších vážně a všeobecně se pronášeti.

Povaha obou hornin z krajiny zdejší uváděných není ostatně tak jednotná, jak prosté ty dva názvy *tešenit* a *pikrit* vyznačují. Podrobné studium petrografické ukazuje nám celou řadu typů, z nichž některé ovšem jsou rázovitý

---

* Srovn. Rohrbach: Über die Eruptivgest. im Gebiete der schles.-mährischen Kreideform. Str. 11.

tešenit nebo pikrit, jiné však zase na *diabas* ba i na zvětralý *diorit*, některé pak *andesity* nebo i *čediče* připomínají.

Na konec není také do této chvíle přesně u všech nalezišť hornin vyvřelých rozhodnuto, jakého jsou stáří, či *křídového* či třetihorního. Jednoduchá ku př. poznámka, že ten či onen badatel má za to, že eruptivní horniny jižně od Stramberka až po železnici Hodslavsko-Frenštatskou jsou třetihorní,* nemůže býti rozhodující, pokud tvrzení to není opřeno důvody naprosté bezpečnosti.

K vůli všem těmto třem věcem nutno *velice mnoho* materiálu prohlednouti, zapotřebí *všechna* poněkud jen přístupná místa a to *krok za krokem*, *místo vedle místa* prozkoumati, *na všechny maličkosti* míti zřetel: a pak teprv lze *bezpečný* výrok o povaze, vztahu a stáří našich hornin tešenitických a pikritických pronésti. Nechci tím snad něco na porok říci všem těm badatelům, kteří buď krajiny uvedené přede mnou, ovšem hlavně za účelem geologickým prohlíželi anebo alespoň materiál z nich pocházející popsali, než chci již předem zabezpečiti si onu volnost svých enunciací, která opírá se o vytrvalé a podrobné, měsíce trvající zkoumání všech míst vyvřelých, jichž na Moravě jen počítá se k *osmdesáti*, a to místy tak rozsáhlých, že v jediném komplexu, hodiny cesty dlouhém (Hodslavice, Bludovice, Petřkovice, Žilina, Pekla u Veřovic a p.), všechny možné typy zdejších hornin eruptivních nalézti možno.

Místa eruptivní do té chvíle mnou prohlédnutá a co do poměrů tektonických, pokud jen bylo možno, prozkoumaná, v okrsku uvedeném jsou následující:

1. Mezi *Val. Meziříčím a Nov. Jičínem:* Při Příluku, Vysoké, Mčenovicích; komplex přes 7 km. dlouhý kolem Pohořilce, Petřkovské hory a Stránského kopce od Jasenic až po Čertův mlýn; vrch Kojatínský, návrší mezi Palačovem a Janovicemi, lom u dvora Palačky při St. Jičíně, návrší u Vlčnova, Kriegshübl u Šanova, místo již zaházené u t. zv. Španělské kaple při N. Jičíně, Kamenná hora tamže, komplex »Holečky« záp. od Bludovic, komplex kolem Zerzávky v Hodslavicích, »zadní a prostřední kopec« záp. od Hodslavic.

2. Mezi *Nov. Jičínem a Frenštátem* (na východ od míst uvedených): Návrší Holivák, vrchy Tannenberg a Waschberg s četnými proudy k Žilině, Životicím a Rybímu, hora Mořkovská severozápadně a chlumec Mořkovský východně od Mořkova, četná místa kolem Veřovic, zejména Stramberčík, t. zv. »Höllenried« u Žinklavy, velký komplex »Pekla« u Bordovic a Veřovic, návrší vých. od Lichnova, vyvřelá místa kolem kaple sv. Marka u Frenštátu.

3. *Různá místa rozházená,* a sice u Tiché sev. od Frenštátu, zajímavá místa mezi Tichou a Kozlovicemi, mezi Kozlovicemi a Lhotkou, v Libhošti a Dědičných Sedlnicích u Příbora a v dolech kamenouhelných Mor.-Ostravských.

Zbývá na Moravě prohlédnouti ještě několik míst mezi *Příborem, Paskovem* a *Mor. Ostravou* se rozkládajících, a sice na »Hončově hoře« u Příbora, na Svinci záp. od Fryčovic, záp. od Chlebovic, kolem Staříče, u Brušperku a

---

* Srovn. Hirth: Übersicht der geol. Verh. des Neutitscheiner Bez. Jahresber. der mähr. Landes-Oberrealsch. Neutitschein 1889. Str. 39.

u Krmelína, a pak k vůli porovnání alespoň několik z nalezišť přečetných a snad více než Moravská známých ve Slezsku.

Prohlížení míst uvedených bylo v posledních dvou letech nadobyčejně příznivé. Pohoda prázdninová r. 1890 zvláště dovolovala prohlédnouti na 70 otevřených aneb jen z části zasypaných lomů v horninách eruptivních mezi Hodslavicemi, Jičínem, Štramberkem a Veřovicemi, a již podle načervenalých* oranic podzimních nejen nalézati neotevřená místa vyvřelého původu, nýbrž i určovati jich rozsah. Vedle toho některé ze zářezů dráhy Hodslavsko-Jičínské a Meziříčsko-Frenštatské, zvláště ale onen mezi Bludovicemi a Hodslavicemi, byly ještě zcela čerstvé a zajímavé poměry tektonické vyvřelých hornin zdejších vysvětlily. R. 1891 zase prudké povodně v okolí Hodslavic a Veřovic ku př. u nejjižnějšího domku v Bludovicích, u jezu mlýnského v Hodslavicích v Tyči ve Veřovicích od čís. 14. do čís. 283., kdež nové hlubší prorvy povstaly, odkryly tím na sta metrů hornin vyvřelých i sousedních s nimi sedimentárních a ukázaly jejich vzájemný poměr. V době zajisté nedaleké zářezy ony železniční zarostou travou a prorvy potoků budou zaneseny a nákresy profylů, zřejmých za dob otevřenosti, budou míti svou důležitost pro přesnější určování stáří ano i pro posouzení některých zvláštností tektonických, jakkoliv tyto ovšem celkem alespoň v hrubých obrysech již od mnohých pozorovatelů dřívějších jsou konstatovány.

Vyvřelé horniny vystupují v kraji vyznačeném skorem vesměs jako *krytby* více méně mocné, a možno krytby tyto při pozornějším prohlížení zcela dobře za výlevy lávovité (proudy)** z jícnů nebo boků sopek *starší doby křídové* (až na málo výminek) pokládati. Takovýchto sopečných jícnů možno hlavně v okolí Hodslavic několik rozpoznati. K nejnápadnějším zajisté patří návrší zvané »*zadní a přední kopec*« západně od Hodslavic, z něhož hlavně k severu proudy vyvřelé horniny se táhnou, dále *Pohořilec* na jihozáp. proudy až za Jasenice vysýlající, *Hora Petřkovská* a sousední *kopec Stránský* s proudy k severu a východu, *Söhlerbusch* a především *Tannenberg* severně od Žíliny, kterýžto typické proudy skorem paprskovitě na všechny strany posýlá, *Mořkovská hora*, hřbet východně od Zerzávky mezi Bludovicemi a Hodslavicemi, *Štramberčík* u Veřovic, *Pekla* u Bordovic, návrší nad *Tichou* atd.

Výborně viděti v zářezu jednom mezi Bludovicemi a Hodslavicemi, pak místy v prorvě Tyče ve Veřovicích a neméně ve vydraném řečišti Zerzávky u nejjižnějšího domku v Bludovicích, kterak vyvřelá hornina po pískovci drobnozrnném se valila, jeho prohlubeniny vyplňujíc, jej pak zajímavě seškvařujíc a přeměňujíc.

Často střídají se proudy eruptivní s vrstvami pískovcovými anebo i s břidličnatými dva- i třikráte (Starý lom Palackých při severním konci Hodslavic, zářez železniční mezi Hodslavicemi a Bludovicemi, svah záp. od Životic atd.).

* Zvětraninami železitými augitické neb amfibolové součásti zdejších hornin eruptivních jsou ornice červenavé.

** Jak hluboko proudy tyto jdou, možno pozorovati v korytech Zerzávky, Tyče v Životicích a Veřovicích, Tichávky (v Tiché) a j. v.

Jako žíly nevystupují eruptivní horniny tešenitické a pikritické skorem *nikde* v terénu prohlédnutém, a ta okolnost bude asi jedním z oněch *zevních* znaků, jež horniny pikritické od pravých čedičových v okrsku zdejším odlišují. Čediče pravé, jak rozšířeny jsou v okolí Mor. Ostravy, kamenouhelné vrstvy zajímavě prorážejíce (u Hrušova, Přívozu, na Jaklovci a v báni Terézině), vystupují zase *jen* jako žíly. Čediče Ostravské a zajisté i ostatních několik míst čedičových, jež v severových. cípu Moravy bude snad možno konstatovati, jsou ve spojitosti s čedičovými komplexy kolem *Dvorce* a *Krnova*, od nichž mostem k Ostravským erupt. místům jsou ojedinělá naleziště u *Stemplovce, Otic* a *Budišovic* na Slezsku. Ostatně teprv podrobné studium mikroskopické objasní, zda přece nějaký vztah mezi pikrity, čedičům jinak velice zevně podobnými a těmito naleznouti možno.

Rozpadávání se (oddělování) vyvřelých hornin tešenitických a pikritických jest balvanité, zřídka tlustě sloupovité. Velice zajímavý obraz tlustě sloupovitého oddělování poskytuje levý srázný, asi 80 m. dlouhý břeh Tyče, západně od kostela Životského. Při povrchu, kde horniny větrají, bývají často výtečně koulovité nebo ellipsoidické a na povrchu (především pikrity) obyčejně většími šupinami temné slídy, větráním hlavně ze součásti augitické vzniklými, obaleny. Největší takové koule, až metr v průměru mající, jsou ku př. v t. zv. Gierschově lomu východně nad Žílinou. V lomu za nejvyšším stavením ve Stráníku, v Tiché a j. v. najdeme rovněž velkokoulovité oddělování se horniny vyvřelé, však ne jako následek větrání a rozpadání se útvarů sloupovitých, nýbrž jako výsledek vnitřní jakési kontrakční síly kolem jistých center. Tu jest koulovité oddělování zřejmo i v útesech sloupovitě nerozpukaných a koule nejsou pravidelně ve směru původních sloupů uloženy, nýbrž naskytají se nepravidelně v ostatní měkčí hmotě vyvřelé horniny uloženy. Při styku proudů pikritických s horninou sousední kuličky přečasto jen jako bobky veliké se vyvinuly, patrně náhlejším schlazením hmoty eruptivné.

Konečný výsledek *větrání*, když před tím horniny tešenitické živce své na zeolithy, vápenec atd. přeměnily a v horninách pikritických vedle chloritickoserpentinových zvětranin a zeolithických látek hlavně množství temné slídy se vyvinulo, jest ornice hydráty kysličníků železitých červenožlutě zbarvená, která na zoraných polích již z daleka se liší od bělavé ornice, z pískovců zdejších povstalé nebo od černavé půdy z černých břidlic Veřovských vznik svůj mající a tak, jak již uvedeno, výborným bývá vodítkem k vyhledávání sopečných míst v rolích, kde dále zvětralé úlomky sopečného kamení ostatek potvrdí. Šupinky slídy, v ornici se lesknoucí, poukazují z pravidla k hornině pikritické, jakkoliv tu a tam (Steinberg u Nov. Jičína) i kolem tešenitů je zjistiti lze. Netřeba podotýkati, že ornice z vyvřelých hornin, často velmi značnou součást *apatitu* obsahujících, je značně úrodnější, než ornice z pískovců povstalá.

O *stáří* a *geologických poměrech* míst mnou prozkoumaných nechci se do té chvíle ještě určitě projádřiti, protože prohlížení není ještě skončeno. Jisto jest, že diskusse o obém dosud není uzavřena a také tak brzo nebude. Já prozatím, pokud jen bylo lze najíti nějaké otevřené místo, naznačil jsem bedlivě poměry uložení. Záznamy ty již tím mají svou důležitost, že i mnoho lomů

v kamení zdejším za příčinou dobývání výborného štěrku založených, čas od času bývá opuštěno, zarůstá a tím poměry v uložení horniny se stávají nezřetelnými. Tak dnes stěží jen najdeme ty — ostatně málo určitě* vyznačené — lomy, jež v díle Tschermakově: *Die Porphyrgesteine Oesterreichs aus der mittleren geol. Epoche 1869* jsou nakresleny, a najdeme-li je, bývá tu uložení zavalením a zarostením lomu málo zřejmo. Proto svědomitý výkres lomů může po letech dobře posloužiti.

Pokud se stáří hornin tešenitických a pikritických dotýče, dovoluju si ale přece podotknouti, že nalézají se hlavně v západních částech okresu na přemnohých místech ve styku a nebo v největší alespoň blízkosti černých nebo do černohněda vypálených břidlic a žlutých drobnozrnných pískovců, jež nejlépe možno (hl. břidlice) Veřovským známým vrstvám připočísti. Podobné černé břidlice Těšínské, za něž by snad při povrchním prohlížení západní břidličné útvary pokládati se mohly — ty jsou ale přece poněkud jiné — dle samých Vídeňských geologův až do okolí Hodslavic nezasahují. Za to ovšem typické vrstvy Veřovské, v nichž dolovalo se tu všude druhdy na sfaerosiderit, sahají zcela jistě kolem Tyče k Mořkovu, Bludovicím (u N. Jičína) a východně od Hodslavic v nich rovněž ocelek byl dobýván, jak tomu haldy mezi Hodslavicemi a Mořkovskou stanicí nasvědčují. Břidlice tyto černé nebo černohnědé bývají buď *pod* proudy eruptivnými uložené, nebo tvoří i *nad* nimi plášť jakýsi, pokud ovšem nebyly vodami odnešeny (Životice, Stránský kopec, Petřkovice, Tannenberg, zářez Tyče ve Veřovicích a t. d.). Dříve pokládal jsem je, poněvadž místy mění barvu svoji na světlejší, i já za břidlice Těšínské, ale prohlížení prorvy Tyče v samých Veřovicích přesvědčivě ukázalo, že nutno je k Veřovickým břidlám připočítávati, a tak by eruptivné horniny zdejší z větší alespoň části na horizont Veřovický byly vázány.

Další pozorování podrobná zajisté i v té věci světlo a jasno donesou.

Na konec této předběžné zprávy nutno ještě podati alespoň stručně popis makroskopického habitu hornin a vyvřelých na Moravě severovýchodní a na několika drobnohledných praeparatech k *typickým* formám drobnohledného složení jejich poukázati.

K vůli stručnému vyznačení *zevního* habitu, kterýž při prozkoumání nutně jest prvním vodítkem, rozeznávám v okrsku označeném především horniny **tmavé** a **světlé**, ony pak na *jemnozrnné, drobnozrnné* a *hrubozrnné* (vlastně porfyrické tak velkým množstvím olivinů, že proti nim zákl. hmota se velice tratí a hornina nabývá habitu hrubozrnného), tyto pak na *drobnozrnné* a při tom šedavé nebo modravé a *hrubozrnné* a při tom velkými krystaly amfibolu (i augitu) strakaté. Různé ty typy ovšem často v nepatrných vzdálenostech od sebe vystupují, ano některé z nich i do sebe přecházejí, i bude, jak z předu vyznačeno, účelem podrobného badání při horninách těch vedle konstatování jich mikroskopického složení zjistiti, kdy nastávají přechody takové, co jest jejich příčinou,

---

* Poněvadž, jak uvedeno, v kraji zdejším ve vzdálenosti často jen několika metrů rozmanité vystupují horniny sopečné, nutno zaznamenávání a zanášení míst, z nichž vzorky vzaty, činiti s podrobností co největší, aby kontrola byla možna.

zda větrání či postupně různé okolnosti při chladnutí erupt. proudu a následkem toho i různé vykrystalování z téhož magmata sopečného.

V horniny tmavé zahrnuty jsou typy **olivin** obsahující, totiž typ *čedičovitý* (jemnozrnný), *pikritový* (drobnozrnný) a *porfyricky pikritový* (hrubozrnný); světlé, kteréž olivinu **nemají**, možno rozeznávati na drobnozrnné *diabasovité* (resp. dioritické, neboť ne vždy možno zjistiti, z čeho vznikly chloritické zvětraniny horniny, zda z augitu, či zamfibolu) a *tešenitické* hrubého zrna.

Typus *čedičový* obsahuje buď skutečné čediče anebo ty přechodní horniny s jemnozrnnou základní hmotou, které potud se blíží čedičům, pokud alespoň nepatrné stopy živců ukazují. Často mívají olivin v *řídkých* porfyricky vystupujících krystalech značné někdy velikosti. Čediče pravé, jak již uvedeno, vyskytají se kolem *Ostravy*, a také při jedné z dávnějších obchůzek svých ve zdejším kraji nalezl jsem u *Palačova* pěkný čedič melilithový, úplně podobný českým melilithovým čedičům* od Vartemberka. Kusy v r. 1890 na témže místě sbírané však jsou pikritické a nelze zvláštnost tu pro tu chvíli vysvětliti leda tím, že vzorky r. 1890 sbírané pocházejí více z vnitra. (Tím by arci vztah čedičů k pikritům byl nepopíratelným.)

Typus *pikritický*, v okrsku *nejčastější*, obsahuje tmavé, drobnozrnné horniny zdejší, které stejnoměrně rozšířená *hojná* zrna olivinová obsahují. Olivin ale není většího zrna než ostatní součástky (hlavně augit). Skorem vždy viděti v nich biotit, druhotný ovšem, neboť je ho tím více, čím zvětralejší jest hornina. Místy tvoří velké, nepravidelně uložené šupiny a jimi nabývá kamení i hrubší jakési zrnitosti, jinde zase uložen jest ve vrstvách 2—5 *mm* mocných kolem nezvětralých pecek horniny a způsobuje pěkně miskovité rozpadávání se pecek takových. Při styku se sousedními horninami nabývají pikritické tvary (ku př. *Stránik, Bludovice*), jak již shora uvedeno, povahy bobkovité. Bobky ty na povrchu proudu Stránského bývají přívaly z měkčího okolí vymývány a do nižin splachovány. Drobnohledné prohlížení jejich výbrusů ukázalo, že skládají se kuličky ty skorem ze samých drobných krystalků augitových.

Tvar *porfyricky pikritový* méně jest rozšířen a nelze říci, že by se byl snad v ústředí předešlého typu následkem pozvolnějšího chladnutí vyvinul. Lom Palackých na př. (na sev. konci *Hodslavic*) alespoň ukazuje vrstvy typu tohoto průměrně jen 1 *m* mocné, střídající se s mezivložkami břidličnými, aniž by k okrajům vrstev nějakou změnu zrna bylo pozorovati. Olivin v typu tom vyvinut jest v krystalických zrnech neb v pěkně vyvinutých krystalech v takovém množství, že někdy na 80 % celé horniny tvoří a základní hmota jen jako sporý tmel mezi nimi se vyskytuje. Typus tento byl již dávno nápadný svými oliviny, vlastně jich pseudomorfósami, které z navětralé hmoty základní možno velice snadno vyklepati. Klamotvary ty, často bohaté ploškami a na 1 *cm* velké i větší, popsali již *Carius* a *Madelung* (*Blum:* Dritter Nachtrag zu den Pseudomorphosen, *Madelung:* Die Metamorph. v. Basalt n. Chrysolith v. Hotzendorf in Mähren. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. 1864).

---

* Bořického nefelinovým pikritům.

Navětralé tvary porfyricko-pikritické jsou hlavně v uvedeném lomu Palackých, pak u jižního konce Bludovic, na Hončově hoře u Příbora a j. zřejmy. Nezvětralé druhy, poněkud menší (as 4 *mm*) oliviny mající, černozelené připomínají poněkud habitem diabasy z okolí Pražského. Rozšířeny jsou kolem Žíliny a rozpadají se místy na drobivou hmotu, která se značnou ovšem přísadou vápna výbornou dává maltu cementovitou. Podobně ovšem využitkuje se v okolí Nov. Jičína i rozpadaných druhů tešenitových.

Sem a tam v celém okrsku, zvláště ale v okolí *Hodslavic* a *Životic* vyskytuje se šedozelený až modravý typ *diabasovitý*, který zevnějškem svým velice na zvětralé horniny dioritické v okolí Pražském (proti Roztokům ku př.) připomíná a proto že ne všude, ba jen velmi zřídka zpříma dokázati se dá, že zelenavé zvětraniny v jeho hmotě z augitů vznikly a naopak zase tu a tam přece jen zrnko amfibolové navětralé najdeme, chtěl jsem původně typ ten dioritickým vyznačiti. Později však přesvědčil jsem se při prohlížení takměř sta praeparatů, že přece jen ty dlouhé (!) zelené, klamotvarné sloupce v typu tomto mají většinou původ v augitu a dlužno tedy typ složený ze živců trojklonných a těchto zvětranin augitových vyznačiti jako diabasový. Olivinu typ tento ani následující nemají, biotitu druhotného má diabasový typus z pravidla málo. Typ diabasový přechází místy do pravého typu *tešenitového*, kterýž jakoby v jádru proudu diabasovité horniny vyvřelé byl pozvolnější krystalisací vzniknul.

Typ *tešenitový* jeví v bílé nebo červenavé (z analcimu, natrolithu a calcitu, tedy ze zvětranin složené) hmotě často na 5 i více *cm* dlouhé sloupce amfibolu a menší krystalky augitu, čímž nabývá té strakatosti, kteráž zavinila jeho staré přiřaďování k syenitům.* Tam, kde augitů i amfibolů je více a jsou menší, stává se hornina tmavou a přechází až do černé. Černé takové partie někdy ve strakaté hornině jakoby pruhy tvoří. V méně zvětralých vzorcích jest základní hmota tešenitu šedá až zelenošedá. Biotitu je místy poněkud značnější množství ovšem druhotného. Typ tešenitický jest rozšířen dosti stejnoměrně po celém okrsku. Nejznámější jest od tak zv. Čertova Mlýna (Čertáka) při N. Jičíně, od Bludovic, také u Veřovic se vyskytuje (na Peklách), u Kozlovic, Tiché, u Rybího a j. v.

Jak dalece jednotlivé uvedené typy spolu souvisí, objeví hlavně studium četných praeparatů drobnohledných a srovnání těch především, které z blízkých sobě míst původ mají. Ovšem, že drobnohled ukáže ještě více odrůd než pozorování makroskopické.

Jen k vůli orientačnímu názoru v *drobnohledné* uložení zajímavých zdejších hornin podány buďte zde alespoň stručné popisy několika zástupců z různých typů zdejšího kraje.

I. Typ čedičový.

1. *Čedič leucitový z Mor. Ostravy.* Základní hmota jest změť šedých mikrolithů augitových a zrníček magnetitových, mezi nimiž viděti četné čiré ťupky,

* Zeuschner: Über die Syenite und Diorite der Umgeb. v. Cieszyn. N. Jahrb. für Miner. 1834.

místy dosti pravidelné, *leucitu* patřící. Leucit charakterisují hlavně známé věnečky vrostlých mikrolithů augitových. Porfyricky vystupuje olivin rozpukaný a na trhlinách obyčejným způsobem na hmotu serpentinovou přeměněný. Mnohem vzácnější jest našedivělý augit ve větších krystalech.

2. *Čedič melilithový od Palačova při St. Jičíně.* Má za základní hmotu směs lištiček melilithových, modravě polarisujících, místy proudovitě uložených, četných zrnek magnetitových a jich skupin, málo augitových krystalků, něco skla a zajímavých krystalků perowskitových ve tvarech $\infty 0 \infty$, jichž rohy, jak to na nejmenších, v tloušťce praeparatu se naskytajících krystalcích při pošupování drobnohledu lze viděti, otupeny jsou střídavě trojúhelníčky, $\frac{0}{2}$ patřícími.

Porfyrický olivin jest úplně čirý.

II. Typ pikritový.

Pikrit ze hřbetu mezi Pohořilcem a Jasenicemi u Val. Meziříčí. Hornina ta representuje přechod od čedičů k pikritům, nepřihlížíme-li ke stáří. Základní její hmota jest směs hmoty zkalené, místy sklovité nebo poněkud odesklené a lištiček modravě polarisujících, jež by živcům mohly býti připočítány.

V této základní hmotě vystupují především velké krystaly šedavého, rozpukaného augitu a oliviny zvětralé na zelenou hmotu chloriticko-serpentinickou, uvnitř často i jádro dolomitické mající. Okraj bývá někdy na biotit přeměněn. Biotit, který jako třetí hlavní součást ze zákl. hmoty vystupuje, je vůbec hlavně na hmotu chloriticko-serpentinickou vázán a jest druhotný. V drobnohledu vystupuje jako silně dichroitické lištny nebo červenohnědé šesterce. Magnetit ovšem neschází a jest stejnoměrně rozšířen. Apatitové jehlice a čiré jich šesterečné průseky nejsou příliš hojné.

Pikrit z lomu za posledním stavením ve Stráníku u Hodslavic. Hornina ta, o níž již pověděno, že tvoří původní velké koule a ellipsoidy, má sporou zákl. hmotu sklovitou, místy slabě polarisující, žlutě poprášenou. V té jsou husté, pěkné, skoro bezbarvé, na okraji šedavé, úplně vyvinuté krystalky augitu, magnetit, ve mřížovité a pérkovité skupiny seřaděný, a větší porfyrická místa dolomiticko-calcitická (dle polarisace a šumění v kyselinách), která i tvarem prohlašují se za klamotvary po olivinu. V základní hmotě místy paprskovitě, štětičkovitě ba i ve způsobu ledových květů na oknech rozšířeny jsou tu a tam útvary natrolithové.

Bobkovité útvary z povrchu proudu pikritového nad Stráníkem. Útvary ty jsou shluky *sklovité*, poněkud slabě modře polarisující hmoty, v níž množství šedých průseků augitových, skoro žádný magnetit a tu a tam zvětralý větší krystal olivinový se vyskytají. Měkčí místa, jež na povrchu bobků zbyla, mají zbarvení zelenavé chloritickými zvětraninami. Měkkost jejich zaviňuje snadné odlučování se kuliček na povrchu. Vyvinutí bobků jest, jak řečeno, lokální a na styk proudu s okolní horninou vázáno.

Pikrit z lomu starého při vých. straně železnice proti nejjižnějšímu domku v Bludovicích u Nov. Jičína. Hornina ta místy rovněž bobkovitá tvoří jednak

přechod k čedičům, jednak svými amfiboly zase k tešenitickým tvarům se poněkud kloní. Základní hmotu čirou má složenu z lištniček živcových a ze skla. Někde zkalena jest zelenavou, patrně infiltrovanou hmotou chloritickou. V zákl. hmotě jest změť krystalků amfibolových a augitových, těchto o něco více. Místy augity i uprostřed silně pleochroitických rozpukaných zrn amfibolových se vyskytují. Biotitu je málo v šupinkách. Olivin prozrazuje se jen zvětraninami: někde hmotou serpentinickou, jinde calciticko-dolomitickou, ovšem v průsecích pravidelných. Calcit prozrazují známé jeho trhliny. Zrnka magnetitová nejsou příliš hojná.

Pikrit z Kriegshübla u Šanova. Tento tvoří již přechod k typu následujícímu, olivinem hrubozrnnému. Olivinu je v hornině již na polovici, bývá rozpukaný a na trhlinách často daleko ke středním zrnům zvětralý. Zvětranina jest velice zajímavá, slabounce zelená, pouze při jádru nezvětralém v úzké obrubě serpentinicky polarisující ostatek *beztvará*, v nikolech úplně temna. Je to nejspíše hmota opálovitá, jak níže bude dovoděno. Vedle olivinu vynikají čerstvé, šedavě fialové augity, větší a menší, tyto v pěkně vyvinutých krystalech, šupinky hnědého biotitu a magnetit ne příliš hojný. Apatit v jehlicích tu a tam se naskytá. Celek činí dojem čediče bezživcového. Nejzajímavější jsou ve výbrusu čirá neb slabounce nazelenalá místa úplně shodná s beztvarnou zvětraninou na trhlinách olivinových, která mezi ostatními součástmi místy značné (poměrně) prostory zaujímá. Při tom jest kolem všech nerostů pikritových, do vnitra hmoty té vnikajících, uzounká ona serpentinická obruba jako něžný lem vyvinuta. Obrubu tu viděti někde i bez polarisace vyznačenu. Hmotu beztvárnou nelze mně po dosavadních zkouškách mikrochemických kyselinou křemíkofluorovodíkovou za nic jiného vyznačiti, leda za hmotu opálovitou, ovšem sekundární. Tu a tam v ní nalezeno jádro dolomitické irrisující mezi $\times$ nikoly.

III. Typ porfyricky pikritový.

Hornina v polích západně od severního konce Životic. Černá hornina tato má ve sporé základní hmotě sklovité místy velmi mnoho *trichitů* černých, často štětičkovitě a paprskovitě skupených, někdy i kolem mikrolithů jiných nerostů nahromaděných.

Ze základní této hmoty vystupují četné krystalky augitové s okraji červenofialovými a čirým středem, příčně puklinaté. Řezy jejich kolmé na hl. osu jsou slabě dichroitické. Kolem krystalků augitových tvoří šupiny biotitové obal, přikládajíce se v lištnách rovnoběžně k průsekům jejich. Magnetitu je poměrně málo, někdy i ve šňůrečky krystalické skupeného. Apatit skorem schází. Více než polovici hmoty celé zaujímají olivinová zrna 1—4 *mm* velká, čirá, trhlinatá a na trhlinách na chlorit zelenavý nebo na serpentin přeměněná. Uvnitř jejich průseků bývají uzavřeniny augitové, kteréž i tu druhotným biotitem zajisté obaleny jsou.

Hornina z Darkových lomů v Žilině. Pěkná hornina tato má více než $^3/_4$ z celé hmoty z olivinu, který má asi tyže rozměry, jako u předešlého druhu.

Však ostatní součásti její jsou větší než u předešlé horniny, čímž nabývá směs habitu více stejnozrnného. Vedle augitů vystupuje i *amfibol* a stýká se často se zrny augitovými. Biotitu je za to méně. Olivin jest podél trhlin značně daleko do vnitra zvětralý na zelenou rovnoběžně vláknitou hmotu osinkovou a z části chloritickou. Magnetit tvoří větší zrna a apatit jest zřejmější, přece ale málo vyvinutý. V zelených partiích chloritických jsou černá zrnka, nejspíš chromitu patřící. Tam, kde jsou droboulinká a nacházejí se i v čirých partiích olivinových, dodávají okolí modravého zkalení.

Hornina od Kojetína. U Kojetína jest mnoho druhů hornin. V cestě, jež na východ ke Stráníku se táhne, vystupuje dále za známými mandlovci zdejšími černá hornina, velkými (až $1\frac{1}{2}$ *cm*) čerstvými oliviny porfyrická a čediči podobná. Tu možno také do typu toho vřaditi, jakkoliv základní hmota má převahu, a celek na mnohé čediče připomíná.

Hmoty základní vlastní, sklovité, jest velmi málo. V ní jsou trichity černé, místy mřížovitě skupené a drobné lištny biotitové. Ostatek hmoty mezi oliviny tvoří augitové krystalky. Ty tvoří hustou změť svými fialověčervenými průseky, v níž něco magnetitu v zrnech sporých vystupuje.

Porfyrický olivin jest trhlinatý a na trhlinách na chlorit a serpentin přeměněn. Základní hmota činí do něho se všemi svými součástmi hluboké, nepravidelné choboty, kteréžto součásti někdy uprostřed chobotu druhotnými dolomiticko-calcitickými tvary svými jsou zastoupeny. Ke zvětralosti horniny poukazují také malé, kulaté dutinky v ní, vyplněné touže druhotnou hmotou calciticko-dolomitickou, do vnitra drobnými krystaly vnikající. Ostatek vnitra jest calcitem slabě trhlinatým vyplněn. Průseky špiček oněch krystalů jsou buď trojúhelníkovité nebo šesterečné (patrně průseky R.).

IV. Typ diabasový.

Hornina šedozelenavá ze hřbetu východně od stanice Hodslavsko Stránské. Hornina tato jest zajímavou směsí dosti velkých, trojklonných, místy polysynthetických krystalů živcových, zkalených tu a tam žlutavou, práškovitou hmotou kaolinickou. Na trhlinách a ryhách jejich infiltrována jest zelenošedá hmota, která vedle živců skorem největší část horniny tvoří a útvarům serpentinovým patří, kteréž z augitu větráním vznikly. Augity samy obsaženy v četných zbytcích jako *dlouhé* rozpukané sloupce, známé šedohnědavé barvy, napříč rozpukané, v partiích některých na uvedenou zelenavou serpentinickou horninu změněné a jí obklíčené, v $\times$ nikolech živě polarisující. Místy tvoří i nepravidelná zrnka, místy pěkné menší průseky i dvojčatné. Třetí důležitou součástí této a všech podobných hornin jest magnetovec, *železo titanové* obsahující, v zrnech dosti velikých a typickou zvětraninou nerostů titanových, totiž *leukoxenem* nejen z pravidla obklíčený, nýbrž i v žilkách prostoupený ano i vůbec nahrazený. Leukoxen jest v napadajícím světle bělavý nebo bělavožlutý. Vedle toho bývá vždy při magnetitu biotit v hnědých šupinkách nebo silně pleochroitických lištnách ovšem i samostatně tu a tam vystupující. Apatit ve pěkných ale tenkých jehličkách a šesterečných průsecích neschází.

Hornina tmavošedá z lomu »prostředního Tomana« v Hodslavicích. Ta má více hmoty zelené, ale augitů fialově hnědavých jest ještě dosti mnoho. Ovšem některé zase zúplna na chloritickou, jakoby místy vláknitou hmotu jsou přeměněny. O něco méně než augitů jest amfibolů v hnědavých rozpukaných pleochroitických sloupcích. Živce čiré, modravě polarisující, jsou místy zkalené. Puklinami a polarisací skorem na sanidin připomínají. Shluky hmoty dolomiticko-vápenaté a zrna magnetitová, místy na pokraji leukoxenem vroubená, jinde zajímavě jehlicovitá dosti jsou rozšířena. Jehlicovité útvary mají vedle sebe hnědé druhotné jehlice snad rutilu patřící. Biotitu jest velice málo a apatitu též. Za to více chumáčků nerostu zelenavého na epidot připomínajícího.

Hornina modrá z lomu nad předešlým lomem vých. od Hodslavic. Podobá se předešlé poněkud, nemá však jinorázu ani augitu, místo obou jest pouze zelená jich zvětranina. Živce jsou dosti zkaleny. Zajímavy jsou dlouhé černé jehlice, na některých místech hnědě prosvítající, na povrchu drsné, silně šedokovově lesklé a místy i leukoxenem obalené. Je to rutil, povstalý z magnetitu titan obsahujícího, nebo zpříma ze železa titanového, neboť kyselina křemíkofluorovodíková se jehlic těch z větší části nedotkla. Poblíž nich jest skorem vždy kyz železný v zrníčkách, jichž vznik patrně s nimi souvisí. U magnetitu pravého, v zrnkách vystupujícího, a leukoxenem lemovaného, tedy také titan obsahujícího, pyritu není.

Jelikož drobnohl. analyse kyselinou křemíkofluorovodíkovou vedle Mg, Fe, Ca, udala také značně velké množství **Na**, patří živce horniny té, a budiž to hned nyní podotčeno, mnoha jiných podobných, živcům *sodnato-vápenatým.*

V. Typ tešenitový.

a) se tmavošedou zákl. hmotou.

Hornina z Marjánkovy skály na Štramberčíku u Veřovic. Hornina to, jako skorem všechny ony, jež mají tmavošedou hmotu základní, tvoří dobrý přechod od typu diabasovitého k vlastním tešenitům strakatým. Skládá se z velkých polysynthetických živců, bíle a modravě polarisujících, na příč puklinatých, místy poněkud zkalených, pak z velkých, hnědých amfibolů na trhlinách *rovněž* na zelenavou hmotu zvětralých. Některé průřezy jsou vůbec na tuto hmotu zvětralé a patřily asi augitu. V živcích viděti možno zvláštní čiré průseky, jež sice místy na apatit upomínají. Jinde však nelze za nic je vyznačiti leda za průseky drobných krystalků analcimových. Tu a tam je zrnko pyritu, pak magnetitu, titan obsahujícího, a na leukoxen přeměněného. Jehličky apatitové jsou hojny a biotit vystupuje jen v málo lístcích.

Základní hmota žlutavá, místy paprskovitá druhotným natrolithem, má něco šupinek biotitových, mnoho serpentinické nazelenalé hmoty a irrisující partie dolomiticko-calcitické.

Jiný praeparat z téhož místa a z téže vrstvy má skutečně šedavý augit silně polarisující uprostřed zelené chloritické hmoty, jeho obrysy vyplňující

ovšem ale ještě hojný amfibol. Zároveň prozrazuje, že ona zdánlivě základní hmota v předešlém výbrusu vznikla zvětráním živců.

Hornina ze středu útesu na levém břehu Tyče západně od kostela Životského. Kamení má velké, *dlouhé*, zelené průřezy, chloriticko-serpentinickou hmotou vyplněné, o nichž nelze říci, z čeho povstaly. Analogicky ovšem souditi se dá, že z augitu. Šedožlutá, kalná hmota z živců přeměněna jest na calciticko-dolomitickou hmotu, proráženou jehlicemi apatitovými a štětičkami patrně natrolithových krystalků. Hmota magnetitu titanového jest úplně na leukoxen přeměněna a vyloužená očka v ní (součásti železité?) vyplněna jsou calcitem. Kolem leukoxenu jest biotit. Pyrit druhotný dosti jest rozšířen.

Hornina z cesty z Veřovic k Zinklavě (hřbet vých. od Veřovic). Podobá se předešlé, má ale již velká čirá místa v zákl. hmotě pod $\times$ nikoly při otáčení buď naprosto temná nebo v partiích jen slabě namodrale polarisující a analcimu patřící. Vedle nich bývají štětičkovitě a ledovým květům podobně skupené jehličky natrolithové. Zelené, dlouhé krystalky — v kuse ovšem černé a hornině tvářnost typického strakatého tešenitu dodávající — jsou místy jako uralit rovnoběžně trhlinaty, ale nejsou pleochroitické. Nelze o nich rovněž tvrditi, z čeho povstaly, zda z amfibolu či z augitu. Magnetitu titanového jest méně a ovšem pak i leukoxenu. Pyritu rovněž málo. Šupinky biotitové jsou vzácné.

b) se světlou základní hmotou.

Tešenit ze západního boku hřebene mezi Čertovým mlýnem a Bludovicemi. Hornina ta připojuje se k typům předešlým. Její bílá hmota, jakoby základní hmotu tvořící, vznikla ze živců a jest dílem kalnější, složená z krystalků leckdes paprskovitě seřaděných (natrolith) a jehlicemi apatitovými propíchána anebo čirá, při $\times$ nikolech úplně temna, na jednom místě pěkný, pravidelný, velký průsek ukazující (analcim). Ve hmotě té vystupují magnetity titanové jehlicovité, sítkovitě pod úhly 60° neb mřížkovitě složené, skoro docela na leukoxen přeměněné a místy biotitem obložené. Ze sloupkovitých, šedofialových rozpukaných augitů jest většina již na hmotu chloritickou přeměněna, a jen někde vystupují v této zrna ohnivě polarisující původního nerostu. Kolem nich bývá rovněž věnec biotitový. Zrna amfibolová jsou velice sporá a malá.

Tešenit od Čertova mlýna u Nového Jičína. Z četných zdejších odrůd patří tuto popisovaný praeparat hornině čerstvější, která místy úplně černé pod drobnohledem ze samých proudovitě uložených, drobounkých krystalků augitových a amfibolových složené partie mívá. Velké živce horniny této jsou hojně zkalené. Vedle nich jsou jiná nepravidelná čirá zrna, živou polarisací na křemen skorem připomínající, o nichž té chvíle nelze říci, zda skutečně křemenem, ovšem druhotným, jsou. Augitové krystaly velké jsou krásně fialové se zelenavým okrajem, amfiboly pak, hojněji než v předešlém vystupující, jsou hnědé, místy dvojčatné a často bezprostředně vedle augitu. Vedle menších amfibolových jehlic jsou zase menší fialové krystalky augitu dosti dichroitické (šedozeleně-fialové). Magnetity jsou velké, *bez* leukoxenu a apatit ve *velkých* šesterečných průsecích ne vzácný.

Tešenit z východního úbočí Steinbergu u Nov. Jičína. Tato hornina, kteráž může nám představovati *skoro* úplně čerstvou, tedy původní tvářnost tohoto typu, skládá se ze živců čirých, jen málo kde zkalených, překrásně polysynthetických. Mezi nimi jsou velké krystaly a zrna augitová, kolem něhož nebo poblíže něhož ve stejném skorem množství průseky biotitu a amfibolu se naskytají. Magnetit titanový přeměněn zhusta na leukoxen a v tom bývají partie pyritové a původní magnetit jen jako kostru černou tvoří. Apatit v jehličkách sporých proniká hlavně živce. Někde ovšem i místy calciticko-dolomitickými se jeví zvětralost zajímavé této horniny. —

* * *

Těchto několik ukázek o složení zdejších hornin, z míst každému nejpřístupnějších, jimiž sotva dvacátá část materiálu Moravského probrána, dostačí zajisté jako doprovod této předběžné zprávě. Práce vlastní zajisté ještě mnoho zajímavého a mnoho světla přinese o sopečném horstvu severových. Moravy!

A. E. GYMNASIUM KROMĚŘÍŽENSE
BIBLIOTHECA MAIOR
614

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 30.

O TRANSFORMACI FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH.

(SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.)

NAPSAL

CH. HERMITE.

PŘEDLOŽIL PROF. ED. WEYR DNE 26. ÚNORA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

OPRAVY.

Na str. 10., řádce 7. čti $\dfrac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}}$ místo $\dfrac{e^{2nv\pi i}}{[(w+u)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}}$.

Na str. 11., řádce 5. v pravo čti $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ místo $\sum_{\pi=-\infty}^{\infty}$; tamtéž na řádce 8. čti »nepřevyší« místo »nepřevýší«.

Na str. 15., řádce 4. z dola čti $Q(2\sigma - 1)$ místo $Q(2\sigma \quad 1)$.

Na str. 17., řádce 12. na konci čti $\Big\} x^{--s}\,dx$ místo $\Big\} x^{\ -s}\,dx$.

Na str. 19., v poslední řádce čti $e^{\frac{1}{2}s\pi i}$ místo $e^{-\frac{1}{2}s\pi i}$

Na str. 23. v poslední řádce čti $\sum_{\lambda} e^{-\lambda\pi y \mp \lambda x\pi i}$ místo $\sum_{\lambda} e^{-\lambda xy \mp \lambda x\pi i}$

Na str. 24. v 2. řádce zní prvý člen závorky $\{\}$ takto: $\sum_{\lambda} \dfrac{\Gamma(1-s)\,e^{-ax i+\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi - a)^{1-s}}$

Na str. 28. v 2. řádce čti: »kde μ, ω jsou kladné a u realné« místo »kde u, ω jsou kladné«.

Na str. 29. v 3. řádce čti $\sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \dfrac{(w+n)^{m-1}\,e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n)-2v\pi i} - 1}$ na místě

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{ \frac{(w+n)^{m-1}\,e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n\ -2v\pi i} - 1},$$

tamtéž má začínati řádka 14 takto: $+\dfrac{1}{(m-1)!}\left(\dfrac{-\pi i}{\omega}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}$ místo

$$+\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{-\pi i}{\omega}\right) \sum_{n=0}^{\infty}$$

Na str. 31., řádce 17. čti $[(w+n)^2+u^2]$ místo $[(w+n)^2+n^2]$.

Na str. 40., řádce 13. uprostřed čti »nad průměrem« místo »na průměrem«.

Na str. 44., řádce 17. čti $\sum_n{}' \frac{e^{2\pi i . n\tau}}{c^s (n^2)^s}$ místo $\sum_n{}' \frac{c^{2\pi i . n\tau}}{c^s (n^2)^s}$.

Na str. 46., řádce 6. z dola čti $K(\alpha', b', c'; \sigma', \tau'; s)$ místo $K(\alpha, b, c; \sigma, \tau; s)$.

Na str. 52., řádce 3. z dola čti na konci $-\frac{2}{1+r}\Big)$ místo $-\frac{1}{1+r}\Big)$.

Na str. 54., řádce 7. shora čti $\sum_{k=0}^{[-\tau]}$ místo $\sum_{k=0}^{[\tau]}$.

Sur la transformation des fonctions elliptiques,

par

M. **Ch. Hermite.**

Dans le § 32 des Fundamenta *Jacobi* a fait la remarque que si l'on désigne par λ l'un des modules relatifs à la transformation d'ordre impair n, par λ' son complément, on a entre les fonctions complètes Λ, Λ' analogues à K et K′, et le multiplicateur M, les relations suivantes,

$$\alpha\Lambda + i\beta\Lambda' = \frac{a\mathrm{K} + ib\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

$$\alpha'\Lambda' + i\beta'\Lambda = \frac{a'\mathrm{K} + ib'\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

ou a, a', α, α' sont des nombres impairs, b, b', β, β' des nombres pairs, satisfaisant aux conditions $aa' + bb' = n$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1$. Puis il ajoute en note »*Accuratior numerorum* a, a', b, b', *etc. determinatio pro singulis eiusdem ordinis transformationibus gravibus laborare difficultatibus videtur. Immo haec determinatio, nisi egregie fallimur, maxime a limitibus pendet, inter quos modulus k versatur, ita ut pro limitibus diversis plane alia evadat: quod quam intricatam reddat questionem, expertus cognoscet, etc.*« C'est dans le but d'éviter ces difficultés que j'ai modifié le point de vue du grand géomètre dans la théorie de la transformation; j'ai suivi une marche inverse, je me suis donné a priori les relations entre K, K′, Λ, Λ', pour en conclure les formules analytiques de la transformation, que *Jacobi* au contraire établit en premier lieu, et j'ai posé la question comme il suit.*)

Soit avec une légère modification des notations employées dans les Fundamenta:

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}}, \qquad \mathrm{L}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2\sin^2\varphi}},$$

*) Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 4me Edition, p. 265.

les mêmes quantités que K et K′, relatives à un autre module l, et à son complément $l' = \sqrt{1 - l^2}$. On propose de déterminer ce module ainsi que la constante M, de telle sorte que, $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$, admettent pour périodes $2\,\mathrm{K}$ et $2\,i\,\mathrm{K}'$, et s'expriment par conséquent au moyen des fonctions doublement périodiques de module k.

Nous ferons pour cela,

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} &= a\,\mathrm{L} + i\,b\,\mathrm{L}', \\ \frac{i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} &= c\,\mathrm{L} + i\,d\,\mathrm{L}', \end{aligned}$$

a, b, c, d étant des nombres entiers quelconques, avec la condition que le déterminant $a\,d - b\,c$ soit positif, afin que la partie réelle du quotient $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}$ soit positive. On aura ainsi les égalités,

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{x + 2\,\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^a \operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right), \\ \operatorname{cn}\left(\frac{x + 2\,\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^{a+b} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right), \\ \operatorname{dn}\left(\frac{x + 2\,\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^b \operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{x + 2\,i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^c \operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right), \\ \operatorname{cn}\left(\frac{x + 2\,i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^{c+d} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right), \\ \operatorname{dn}\left(\frac{x + 2\,i\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right) &= (-1)^d \operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right). \end{aligned}$$

Cela étant, la recherche des formules de transformation repose en entier sur les propriétés de la fonction :

$$\varphi(x) = \Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) e^{\frac{i\pi b x^2}{4\,\mathrm{K}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}}},$$

qui consistent dans les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\,\mathrm{K}) &= (-1)^{(a+1)\,b}\,\varphi(x), \\ \varphi(x + 2\,i\,\mathrm{K}') &= (-1)^{(c+1)\,d}\,\varphi(x)\,e^{-\frac{i n \pi (x + i\,\mathrm{K}')}{\mathrm{K}}}. \end{aligned}$$

Ce sont aussi ces égalités dont je ferai usage pour l'objet de cette note, et j'indiquerai d'abord une méthode facile pour y parvenir.

Je remarque à cet effet qu'ayant

$$\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \sum (-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{\mathrm{LM}} - \frac{\pi m^2 \mathrm{L}'}{\mathrm{L}}},$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

nous pouvons écrire

$$\Phi(x) = \sum (-1)^m e^{i\pi\varphi(x,m)},$$

si l'on pose pour abréger

$$\varphi(x,m) = \frac{b x^2}{4\mathrm{K}\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{m x}{\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{i m^2 \mathrm{L}'}{\mathrm{L}}.$$

Remplaçons maintenant dans le dernier terme $i\mathrm{L}'$ par la valeur tirée de la première des équations (A), on obtient ainsi

$$\varphi(x,m) = \frac{b x^2}{4\mathrm{K}\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{m x}{\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{m^2(\mathrm{K} - a\mathrm{L}\mathrm{M})}{b\mathrm{L}\mathrm{M}}$$

ou bien,

$$\varphi(x,m) = \frac{(b x + 2 m \mathrm{K})^2}{4 b \mathrm{K}\mathrm{L}\mathrm{M}} - \frac{m^2 a}{b}.$$

De cette nouvelle expression résulte immédiatement que l'on a

$$\varphi(x + 2\mathrm{K}, m) = \varphi(x, m + b) + (2m + b)a,$$

le changement de x en $x + 2\mathrm{K}$ se trouve donc ramené à celui de m en $m + b$ qui peut toujours se faire dans une série s'étendant à toutes les valeurs de l'entier m. Nous parvenons de cette manière, en ayant égard au facteur $(-1)^m$, à la première des égalités à démontrer.

La seconde découle de l'identité

$$\varphi(x,m) + \frac{n x^2}{4 i \mathrm{K}\mathrm{K}'} = \frac{(d x + 2 i m \mathrm{K}')^2}{4 i d \mathrm{K}'\mathrm{L}\mathrm{M}} - \frac{m^2 c}{d};$$

on l'établit en transformant comme il suit la quantité

$$\varphi(x,m) + \frac{n x^2}{4 i \mathrm{K}\mathrm{K}'} = \frac{i b \mathrm{K}' + n \mathrm{L}\mathrm{M}}{4 i \mathrm{K}\mathrm{K}'\mathrm{L}\mathrm{M}} x^2 + \frac{m x}{\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{i m^2 \mathrm{L}'}{\mathrm{L}}.$$

Je tire d'abord des équations (A) par l'élimination de L' cette expression,

$$i b \mathrm{K}' + n \mathrm{L}\mathrm{M} = d\mathrm{K}$$

au moyen de la quelle le premier terme devient $\frac{d x^2}{4 i \mathrm{K}'\mathrm{L}\mathrm{M}}$; je remplace ensuite dans le dernier terme $i\mathrm{L}'$, par la valeur tirée de la seconde de ces égalités. Nous obtenons ainsi

$$\varphi(x,m) + \frac{n x^2}{4 i \mathrm{K}\mathrm{K}'} = \frac{d x^2}{4 i \mathrm{K}'\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{m x}{\mathrm{L}\mathrm{M}} + \frac{m^2(i\mathrm{K}' - c\mathrm{L}\mathrm{M})}{d\mathrm{L}\mathrm{M}}$$

ce qui démontre le résultat annoncé. On en conclut comme tout-à-l'heure:

$$\Phi(x+2iK')\,e^{\frac{n(x+2iK')^2}{4iKK'}} = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)\,e^{\frac{nx^2}{4iKK'}},$$

et en simplifiant:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)\,e^{-\frac{ni\pi(x+iK')}{K}},$$

c'est la relation qu'il s'agissait de démontrer.

On en déduit immédiatement que si l'on pose

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M},l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M},l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M},l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

les fonctions holomorphes $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ satisfont à des relations analogues, et ilen résulte que les quatre quotients:

$$P(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$Q(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)},$$

vérifient les égalités suivantes, qui sont d'une grande importance:

$$\begin{cases} P(x+2K) = (-1)^{ab+a+b}\,P(x), \\ P(x+2iK') = (-1)^{cd+c+d+n}\,P(x), \end{cases}$$
$$\begin{cases} Q(x+2K) = (-1)^{ab+a}\,Q(x), \\ Q(x+2iK') = (-1)^{cd+c+n}\,Q(x), \end{cases}$$
$$\begin{cases} R(x+2K) = (-1)^{ab}\,R(x), \\ R(x+2iK') = (-1)^{cd+n}\,R(x), \end{cases}$$
$$\begin{cases} S(x+2K) = (-1)^{ab+b}\,S(x), \\ S(x+2iK') = (-1)^{cd+d+n}\,S(x). \end{cases}$$

Ces quantités sont donc des fonctions doublement périodiques, ayant un pôle unique, $x = iK'$ et sauf un facteur constant qui reste indéterminé, elles

s'expriment sous forme entière au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.*) Nous en donnerons une expression différente qui s'obtient, en introduisant les fonctions de M. *Weierstrass,* définies par les relations:

$$\operatorname{Al}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Theta(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\operatorname{Al}(x)_1 = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}'(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\operatorname{Al}(x)_2 = \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\mathrm{H}_1(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\operatorname{Al}(x)_3 = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}.$$

La constante J désigne dans ces formules l'intégrale complète de seconde espèce, et l'on a comme on sait:

$$\mathrm{J} = \int_0^{\mathrm{K}} k^2 sn^2 x\, dx\,.$$

Posons afin de passer au module l:

$$\mathrm{J}_1 = \int_0^{\mathrm{L}} l^2 sn^2(x, l)\, dx\,,$$

nous pourrons écrire

$$\operatorname{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\Theta(o, l)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}_1 x^2}{2\mathrm{L}\mathrm{M}^2}}.$$

Soit enfin

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{L}\mathrm{M}^2} - \frac{n\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \frac{i\pi b}{2\mathrm{K}\mathrm{L}\mathrm{M}},$$

au lieu du quotient $\frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$, on sera amené en déterminant par la condition $\mathrm{S}(o) = 1$, le facteur arbitraire qui entre dans $\mathrm{S}(x)$, à la nouvelle formule:

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\operatorname{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\operatorname{Al}^n(x)}\, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

et les relations

$$\operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{Al}(x)_1}{\operatorname{Al}(x)},$$

$$\operatorname{cn} x = \frac{\operatorname{Al}(x)_2}{\operatorname{Al}(x)},$$

$$\operatorname{dn} x = \frac{\operatorname{Al}(x)_3}{\operatorname{Al}(x)},$$

*) Cours d'Analyse, p. 281.

nous donnerons pareillement:

$$P(x) = \frac{Al\left(\frac{x}{M}, l\right)_1}{Al^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

$$Q(x) = \frac{Al\left(\frac{x}{M}, l\right)_2}{Al^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

$$R(x) = \frac{Al\left(\frac{x}{M}, l\right)_3}{Al^n(x)} e^{\frac{Nx^2}{2}}.$$

La quantité N qui est mise en évidence dans ces expressions me semble appeler l'attention et avoir dans la théorie de la transformation un rôle important. Aux équations algébriques entre k et l, entre le multiplicateur M et le module doivent en effet s'ajouter celles qu'on peut former entre N et k; j'ai essayé d'ouvrir la voie à ces nouvelles recherches par les remarques qui vont suivre.

En premier lieu j'établirai les relations entre les deux fonctions complètes de seconde espèce, qui correspondent aux égalités

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$

$$\frac{iK'}{M} = cL + idL'.$$

Je remarque d'abord que si l'on pose, $ad - bc = n$, on en déduit:

$$nL = \frac{dK - ibK'}{M},$$

$$inL' = \frac{-cK + iaK'}{M},$$

de sorte qu'en tirant de l'équation (B)

$$\frac{J_1}{M} = \frac{nJLM}{K} - \frac{i\pi b}{2K} + LMN$$

nous trouvons:

$$\frac{J_1}{M} = \left(d - \frac{ibK'}{K}\right)J - \frac{i\pi b}{2K} + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

J'introduis maintenant la seconde fonction complète de seconde espèce en employant la relation:

$$J'K - JK' = \frac{\pi}{2},$$

je remplace à cet effet, $\frac{\pi}{2K}$ par $J' - \frac{JK'}{K}$, et il vient après une reduction facile:

$$\frac{J_1}{M} = dJ - ibJ' + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

C'est la première relation que je voulais obtenir, une autre semblable qui concerne $\frac{J'_1}{M}$ se conclut de l'égalité

$$J'_1 L - J_1 L' = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire:

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{J_1 L'}{LM} + \frac{\pi}{2LM},$$

en éliminant J_1 au moyen de l'équation (B). Nous substituerons donc la valeur:

$$\frac{J_1}{LM} = \frac{nJM}{K} + MN - \frac{i\pi b}{2KL},$$

ce qui donne:

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{nL'JM}{K} + L'MN + \frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi bL'}{2KL}.$$

Cela étant, si l'on écrit d'abord:

$$\frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi bL'}{2KL} = \frac{\pi(K - ibL'M)}{2KLM},$$

et qu'ensuite on remplace $K - ibL'M$ par aLM, et $L'M$ par $\frac{-cK + iaK'}{in}$,

cette expression devient

$$\frac{iJ'_1}{M} = \left(-c + \frac{iaK'}{K}\right) J + (-cK + iaK')\frac{N}{n} + \frac{ia\pi}{2K}$$
$$= -cJ + ia\left(\frac{JK'}{K} + \frac{\pi}{2K}\right) + (-cK + iaK')\frac{N}{n},$$

et par conséquent:

$$\frac{iJ'_1}{M} = -cJ + iaJ' + (-cK + iaK')\frac{N}{n}.$$

Il importe d'observer que dans ces résultats la quantité N, comme nous allons l'établir, est une fonction algébrique du module. Considérons pour en donner un exemple, le cas simple de la transformation du second ordre; au théorème II du § 37 des Fundamenta, qu'en remplaçant q par q^2, les quantités k, K et K' deviennent, $\frac{1-k'}{1+k'}$, $\frac{1+k'}{2}K$, $(1+k')K'$, nous ajouterons que J et J' se changent en, $\frac{1}{1+k'}(J - \frac{1}{2}k^2K)$ et $\frac{1}{1+k'}(2J' - k^2K')$.

On remarquera encore que les relations auxquelles nous venons de parvenir peuvent être présentées sous une forme plus simple; en se rappelant qu'on a posé $a\,d - b\,c = n$, on en déduit aisément les égalités:

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{a\,J_1 + i\,b\,J'_1}{M} = n\,J + K\,N\,, \\ \dfrac{c\,J_1 + i\,d\,J'_1}{M} = i\,n\,J' + i\,K'\,N\,; \end{cases}$$

dont nous allons montrer les conséquences.

Multiplions la première par J' la seconde par J, et retranchons membre à membre, on obtiendra d'abord cette nouvelle expression de N à savoir:

$$\frac{\pi}{2}\,N = \frac{1}{M}\left[J'\,(a\,J_1 + i\,b\,J'_1) + i\,J\,(c\,J_1 + i\,d\,J'_1)\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[a\,J'\,J_1 - d\,J\,J'_1 + i\,(b\,J'\,J'_1 - c\,J\,J_1)\right],$$

où n'entrent que les intégrales complètes de seconde espèce.

Soit ensuite

$$U = a\,L + i\,b\,L'\,,$$
$$V = a\,J_1 + i\,b\,J'_1\,,$$

on a ces deux relations:

$$l\,l'^2\,\frac{d\,U}{d\,l} = l^2\,U - V\,,$$

$$l\,l'^2\,\frac{d\,V}{d\,l} = l^2\,(U - V)\,,$$

que je vais employer pour différentier par rapport à k, l'égalité $\dfrac{K}{M} = a\,L + i\,b\,L'$ ou bien, $K = M\,U$.

Nous trouvons ainsi

$$(k^2\,K - J)\,\frac{d\,k}{k\,k'^2} = U\,d\,M + M\,(l^2\,U - V)\,\frac{d\,l}{l\,l'^2}\,;$$

cela étant, j'exprime en J et K le second membre, en remplaçant U et V par les valeurs

$$U = \frac{K}{M}\,,$$
$$V = M\,(n\,J + K\,N)\,.$$

Ce calcul nous donne

$$(k^2\,K - J)\,\frac{d\,k}{k\,k'^2} = \frac{K\,d\,M}{M} + \left[l^2\,K - M^2\,(n\,J + K\,N)\right]\frac{d\,l}{l\,l'^2}\,,$$

ce qui est une relation linéaire homogène entre J et K. On aurait évidemment le même résultat en J' et K', en posant,

$$U = c\,L + i\,d\,L'\,,$$
$$V = c\,J + i\,d\,J'\,,$$

pour differentier l'égalité $iK' = M(cL + idL')$; il faut donc que les coefficients de J et K soient séparément nuls, le déterminant $J'K - JK'$ étant différent de zéro. Nous avons par conséquent:

$$\frac{dk}{kk'^2} = nM^2 \frac{dl}{ll'^2},$$

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{dM}{M} + \frac{l\,dl}{l'^2} - M^2 N \frac{dl}{ll'^2}.$$

La première de ces relations a été découverte par Jacobi et donnée dans le § 32, des Fundamenta; on sait qu'elle est d'une importance capitale dans la théorie de la transformation. Elle permet d'écrire la seconde sous la forme:

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{dM}{M} + \frac{l\,dl}{l'^2} - \frac{N\,dk}{nkk'^2},$$

et nous en tirons l'expression suivante qui est purement algébrique comme nous l'avons annoncé,

$$N = nkk'^2 D_k \log \frac{Mk'}{l'};$$

je vais en faire quelques applications.

Je considère d'abord le cas de la transformation du second ordre où l'on a:

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

$$M = \frac{1}{1+k}.$$

On en conclut aisément:

$$\left(\frac{Mk'}{l'}\right)^2 = \frac{1+k}{1-k},$$

nous avons donc

$$D_k \log \frac{Mk'}{l'} = \frac{1}{k'^2},$$

ce qui donne immédiatement

$$N = 2k.$$

En passant au cas de $n = 3$, j'employerai les expressions des deux modules et du multiplicateur qui ont été données par *Jacobi* dans le § 13 des Fundamenta, à savoir:

$$k^2 = \frac{(2+\alpha)\alpha^3}{1+2\alpha},$$

$$l^2 = \frac{(2+\alpha)^3\alpha}{(1+2\alpha)^3},$$

$$M = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

On en tire d'abord par un calcul facile:

$$k'^2 = \frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha)^2}{1+2\alpha},$$

$$l'^2 = \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha)^2}{(1+2\alpha)^3},$$

d'où

$$\frac{k'}{l'} = \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{1-\alpha},$$

et par conséquent:

$$\frac{\mathrm{M}k'}{l'} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Ayant ainsi la formule:

$$\mathrm{N} = 3kk'^2 \frac{d\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}{dk},$$

nous écrirons d'abord:

$$\mathrm{N} = 6kk'^2 \frac{d\alpha}{dk} \cdot \frac{1}{1-\alpha^2}.$$

En remarquant ensuite que l'on a:

$$3kk'^2 \frac{d\alpha}{dk} = (1-\alpha^2)(2\alpha+\alpha^2),$$

nous parvenons à l'expression suivante:

$$\mathrm{N} = 2(2\alpha+\alpha^2).$$

On en conclut, si l'on résout par rapport à α:

$$\alpha = -1+\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\mathrm{N}},$$

et en substituant dans la valeur de k^2, on trouve l'équation entre N et k^2, à laquelle nous voulions parvenir, à savoir:

$$\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)^4 - 6k^2\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)^2 - (4k^2+4k^4)\frac{\mathrm{N}}{2} - 3k^4 = 0.$$

Nous rapprocherons ce résultat de la formule,

$$\mathrm{sn}\,3x = \frac{3-(4+4k^2)\,\mathrm{sn}^2x+6k^2\,\mathrm{sn}^4x-k^4\,\mathrm{sn}^8x}{1-6k^2\,\mathrm{sn}^4x+(4k^2+4k^4)\,\mathrm{sn}^6x-3k^4\,\mathrm{sn}^8x},$$

en considérant le numérateur elle fait voir sur le champ que l'on a:

$$\mathrm{N} = -2k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'}{3},$$

m et n étant deux entiers quelconques.

O transformaci funkcí elliptických.

Napsal

Ch. Hermite.

Ve Fundamentech § 32. poznamenal *Jacobi,* že, značí-li λ jeden z modulů příslušných transformací lichého stupně n, a λ' jeho komplement, platí mezi úplnými funkcemi Δ, Δ' obdobnými s K a K′ a mezi multiplikatorem M následující vztahy

$$\alpha\Delta + i\beta\Delta' = \frac{a\mathrm{K} + ib\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

$$\alpha'\Delta' + i\beta'\Delta = \frac{a'\mathrm{K} + ib'\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

kde a, a', α, α' značí čísla lichá, b, b', β, β' čísla sudá hovící výminkám $aa' + bb' = n$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1$. Dále k tomu přičiňuje jakožto poznámku »*Accuratior numerorum* a, a', b, b' *etc. determinatio pro singulis eiusdem ordinis transformationibus gravibus laborare difficultatibus videtur. Immo haec determinatio, nisi egregie fallimur, maxime a limitibus pendet, inter quos modulus k versatur, ita ut pro limitibus diversis plane alia evadat: quod quam intricatam reddat questionem, expertus cognoscet, etc.*« Abych se vyhnul těmto obtížím, změnil jsem hlediště velkého mathematika v theorii transformace; volil jsem opačnou cestu, pokládaje relace mezi K, K′, Δ, Δ' za dané a priori, abych z nich odvodil analytické formule transformační *Jacobim* naopak nejprve vyvozené, a formuloval jsem úkol způsobem následujícím.*)

Buďtež, s malou změnou označení užívaných ve Fundamentech,

$$\mathrm{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}}, \qquad \mathrm{L}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2\sin^2\varphi}}$$

tytéž hodnoty jako K a K′ vzhledem k jinému modulu l a k jeho komple-

*) Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 4me Edition, p. 265.

mentu $l' = \sqrt{1 - l^2}$. Nechť se stanoví tento modul a stálá M tak, aby $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ měly periody $2\,K$ a $2\,i\,K'$, a tudíž bylo lze je vyjádřiti pomocí dvojperiodických funkcí o modulu k.

Za tím účelem klademe

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{K}{M} &= a\,L + i\,b\,L' , \\ \frac{i\,K'}{M} &= c\,L + i\,d\,L' , \end{aligned}$$

kde a, b, c, d jsou libovolná celistvá čísla hovící výmince, by determinant $a\,d - b\,c$ byl kladný, čímž realná část podílu $\frac{L'}{L}$ se stává kladnou. Máme pak rovnosti

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x + 2\,K}{M}, l\right) = (-1)^a \operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x + 2\,K}{M}, l\right) = (-1)^{a+b} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x + 2\,K}{M}, l\right) = (-1)^b \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$

dále

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x + 2\,i\,K'}{M}, l\right) = (-1)^c \operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x + 2\,i\,K'}{M}, l\right) = (-1)^{c+d} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x + 2\,i\,K'}{M}, l\right) = (-1)^d \operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right).$$

Nyní spočívá vyšetření transformačních formulí zúplna na vlastnostech funkce:

$$\varphi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) e^{\frac{i\,\pi\,b\,x^2}{4\,K\,L\,M}},$$

vyjádřených následujícími dvěma relacemi:

$$\varphi(x + 2\,K) = (-1)^{(a+1)\,b}\,\varphi(x),$$
$$\varphi(x + 2\,i\,K') = (-1)^{(c+1)\,d}\,\varphi(x)\,e^{-\frac{i\,n\,\pi\,(x + i\,K')}{K}}.$$

Těchto rovnic užiji k dosažení účelu této práci vytknutého; především však naznačím snadnou methodu k nim vedoucí.

K tomu cíli poznamenávám, že vzhledem k

$$\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) = \sum (-1)^m e^{-\frac{\pi\,m^2\,L'}{L} + \frac{i\,\pi\,m\,x}{L\,M}}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

můžeme psáti

$$\vartheta(x) = \sum (-1)^m e^{i\pi\varphi(x,m)} ,$$

klademe-li za příčinou stručnosti

$$\varphi(x,m) = \frac{bx^2}{4\,\mathrm{K\,L\,M}} + \frac{mx}{\mathrm{L\,M}} + \frac{im^2\mathrm{L}'}{\mathrm{L}} .$$

Nahraďme nyní na pravé straně $i\mathrm{L}'$ hodnotou plynoucí z první rovnice (A), i obdržíme

$$\varphi(x,m) = \frac{bx^2}{4\,\mathrm{K\,L\,M}} + \frac{mx}{\mathrm{L\,M}} + \frac{m^2(\mathrm{K} - a\,\mathrm{L\,M})}{b\,\mathrm{L\,M}}$$

aneb

$$\varphi(x,m) = \frac{(bx + 2m\mathrm{K})^2}{4b\,\mathrm{K\,L\,M}} - \frac{m^2 a}{b} .$$

Z tohoto nového výrazu vychází ihned, že platí

$$\varphi(x + 2\mathrm{K}, m) = \varphi(x, m+b) + (2m+b)\,a ,$$

čímž změna x na $x + 2\mathrm{K}$ jest převedena na změnu hodnoty m na $m+b$, kterouž změnu lze vždy provésti v řadě, v níž summační index m probíhá všecka celistvá čísla. Tím dospíváme, přihlížejíce k faktoru $(-1)^m$, k první z obou rovnic, jež jsme chtěli dokázati.

Druhá vyplývá z totožnosti

$$\varphi(x,m) + \frac{nx^2}{4i\,\mathrm{K\,K}'} = \frac{(dx + 2im\mathrm{K}')^2}{4id\,\mathrm{K}'\,\mathrm{L\,M}} - \frac{m^2 c}{d} ;$$

doděláme se jí, transformujeme-li následujícím způsobem hodnotu

$$\varphi(x,m) + \frac{nx^2}{4i\,\mathrm{K\,K}'} = \frac{ib\mathrm{K}' + n\,\mathrm{L\,M}}{4i\,\mathrm{K\,K}'\,\mathrm{L\,M}}\,x^2 + \frac{mx}{\mathrm{L\,M}} + \frac{im^2\mathrm{L}'}{\mathrm{L}} .$$

Nejprvé odvodím z rovnic (A) eliminací hodnoty L' tento výraz

$$ib\mathrm{K}' + n\,\mathrm{L\,M} = d\,\mathrm{K} ,$$

jehož pomocí první člen přejde do $\dfrac{dx^2}{4i\,\mathrm{K}'\,\mathrm{L\,M}}$; napotom nahradím v posledním členu $i\mathrm{L}'$ hodnotou plynoucí z druhé z oněch rovnic. Tím nabýváme

$$\varphi(x,m) + \frac{nx^2}{4i\,\mathrm{K\,K}'} = \frac{dx^2}{4i\,\mathrm{K}'\,\mathrm{L\,M}} + \frac{mx}{\mathrm{L\,M}} + \frac{m^2(i\mathrm{K}' - c\,\mathrm{L\,M})}{d\,\mathrm{L\,M}} ,$$

čímž dokázána vytknutá formule. Z ní soudíme, právě tak jako nahoře, že

$$\vartheta(x + 2i\mathrm{K}')\, e^{\frac{n(x+2i\mathrm{K}')^2}{4i\,\mathrm{K\,K}'}} = (-1)^{(c+1)d}\,\vartheta(x)\, e^{\frac{nx^2}{4i\,\mathrm{K\,K}'}} ,$$

aneb, zjednodušíme-li,

$$\vartheta(x + 2i\mathrm{K}') = (-1)^{(c+1)d}\,\vartheta(x)\, e^{-\frac{ni\pi(x+i\mathrm{K}')}{\mathrm{K}}} ,$$

což jest relací, jejíž správnost jsem chtěl dokázati.

Z toho soudíme ihned, že, klademe-li

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

funkce celistvé $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ hoví obdobným relacím, z čehož vychází, že čtyři podíly:

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)},$$

hoví následujícím velmi důležitým rovnostem:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(x+2\mathrm{K}) = (-1)^{ab+a+b}\,\mathrm{P}(x), \\ \mathrm{P}(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{cd+c+d+n}\,\mathrm{P}(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Q}(x+2\mathrm{K}) = (-1)^{ab+a}\,\mathrm{Q}(x), \\ \mathrm{Q}(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{cd+c+n}\,\mathrm{Q}(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{R}(x+2\mathrm{K}) = (-1)^{ab}\,\mathrm{R}(x), \\ \mathrm{R}(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{cd+n}\,\mathrm{R}(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{S}(x+2\mathrm{K}) = (-1)^{ab+b}\,\mathrm{S}(x), \\ \mathrm{S}(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{cd+d+n}\,\mathrm{S}(x). \end{cases}$$

Tyto hodnoty jsou tedy funkcemi dvojperiodickými o jediném polu $x = i\mathrm{K}'$ a lze je až na stálého činitele, jenž zůstává neurčeným, vyjádřiti jakožto výrazy celistvé pomocí $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.*) Vytkněme je však v jiném tvaru, jehož nabývají, zavedeme-li funkce *Weierstrass*-ovy, definované rovnostmi:

$$\mathrm{Al}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Theta(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_1 = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}'(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_2 = \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\mathrm{H}_1(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}},$$

$$\mathrm{Al}(x)_3 = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(o)}\, e^{-\frac{\mathrm{J}x^2}{2\mathrm{K}}}.$$

---

*) Cours d'Analyse, p. 281.

Stálá J značí v těchto formulích kompletní integrál druhého druhu, a platí jakož známo,

$$\mathrm{J} = \int_0^{\mathrm{K}} k^2 \, sn^2 x \, dx \, .$$

Položme, chtějíce přejíti k modulu l,

$$\mathrm{J}_1 = \int_0^{\mathrm{L}} l^2 \, sn^2 (x, l) \, dx \, ,$$

i lze pak psáti

$$\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\Theta(o, l)} \, e^{-\frac{\mathrm{J}_1 x^2}{2\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}^2}} \, .$$

Budiž konečně

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{L}\,\mathrm{M}^2} - \frac{n\,\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \frac{i\,\pi\,b}{2\,\mathrm{K}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}} \, , \tag{B}$$

i přicházíme pak, vytknuvše výminkou $\mathrm{S}(o) = 1$ libovolného do $\mathrm{S}(x)$ vcházejícího činitele, na místě k podílu $\frac{\Theta(x)}{\Theta^n(x)}$ k nové formuli

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)} \, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}} \, ,$$

a relace

$$\mathrm{sn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)} \, ,$$

$$\mathrm{cn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)} \, ,$$

$$\mathrm{dn}\, x = \frac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}$$

podobně podávají:

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)} \, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}} \, ,$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)} \, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}} \, ,$$

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)} \, e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}} \, .$$

Hodnota N, vytknutá těmito výrazy, zdá se mi, že zasluhuje pozornost a že jí přísluší důležitý úkol v theorii transformace. K algebraickým rovnicím mezi k a l, a mezi multiplikatorem M a modulem nutno zajisté připojiti ony, jež lze utvořiti mezi N a k; pokusil jsem se zahájiti dráhu k těmto novým výzkumům následujícími úvahami.

Nejprvé odvodím relace mezi oběma kompletními integrály druhého druhu obdobné k rovnicím

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} = a\,\mathrm{L} + ib\,\mathrm{L}' ,$$

$$\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} = c\,\mathrm{L} + id\,\mathrm{L}' .$$

Podotkněme především, že učinivše $ad - bc = n$, máme

$$n\mathrm{L} = \frac{d\,\mathrm{K} - ib\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} ,$$

$$in\mathrm{L}' = \frac{-c\,\mathrm{K} + ia\,\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} ,$$

čímž, vzhledem k relaci z rovnice (B) plynoucí

$$\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{M}} = \frac{n\,\mathrm{J\,L\,M}}{\mathrm{K}} - \frac{i\pi b}{2\,\mathrm{K}} + \mathrm{L\,M\,N} ,$$

nalézáme

$$\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{M}} = \left(d - \frac{ib\,\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right)\mathrm{J} - \frac{i\pi b}{2\,\mathrm{K}} + (d\,\mathrm{K} - ib\,\mathrm{K}')\,\frac{\mathrm{N}}{n} .$$

Nyní zavedu druhou kompletní funkci druhého druhu užívaje relace

$$\mathrm{J}'\mathrm{K} - \mathrm{J}\mathrm{K}' = \frac{\pi}{2} ;$$

nahradím totiž $\frac{\pi}{2\mathrm{K}}$ hodnotou $\mathrm{J}' - \frac{\mathrm{J}\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$, a obdržím po snadné redukci:

$$\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{M}} = d\,\mathrm{J} - ib\,\mathrm{J}' + (d\,\mathrm{K} - ib\,\mathrm{K}')\,\frac{\mathrm{N}}{n} .$$

Toť první relace, již jsem chtěl odvoditi, jiná obdobná vztahující se ku $\frac{\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}}$ plyne z rovnice

$$\mathrm{J}'_1\,\mathrm{L} - \mathrm{J}_1\,\mathrm{L}' = \frac{\pi}{2} ,$$

podávající

$$\frac{\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{J}_1\,\mathrm{L}'}{\mathrm{L\,M}} + \frac{\pi}{2\,\mathrm{L\,M}} ,$$

eliminujeme-li J_1 pomocí rovnosti (B). Dosadíme tedy hodnotu

$$\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{L\,M}} = \frac{n\,\mathrm{J\,M}}{\mathrm{K}} + \mathrm{M\,N} - \frac{i\pi b}{2\,\mathrm{K\,L}} ,$$

čímž

$$\frac{\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = \frac{n\,\mathrm{L}'\,\mathrm{J\,M}}{\mathrm{K}} + \mathrm{L}'\,\mathrm{M\,N} + \frac{\pi}{2\,\mathrm{L\,M}} - \frac{i\pi b\,\mathrm{L}'}{2\,\mathrm{K\,L}} .$$

Píšeme-li nyní

$$\frac{\pi}{2\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}} - \frac{i\pi b\,\mathrm{L}'}{2\,\mathrm{K}\,\mathrm{L}} = \frac{\pi\,(\mathrm{K} - ib\,\mathrm{L}'\mathrm{M})}{2\mathrm{K}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}}\,,$$

a nahradíme-li pak $\mathrm{K} - ib\mathrm{L}'\mathrm{M}$ hodnotou $a\mathrm{L}\mathrm{M}$, a $\mathrm{L}'\mathrm{M}$ hodnotou $\frac{-c\,\mathrm{K} + ia\,\mathrm{K}'}{in}$, nabývá náš výraz tvaru

$$\frac{i\,\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = \left(-c + \frac{ia\,\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right)\mathrm{J} + (-c\,\mathrm{K} + ia\,\mathrm{K}')\,\frac{\mathrm{N}}{n} + \frac{ia\pi}{2\,\mathrm{K}}$$

$$= -c\,\mathrm{J} + ia\left(\frac{\mathrm{J}\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} + \frac{\pi}{2\,\mathrm{K}}\right) + (-c\,\mathrm{K} + ia\,\mathrm{K}')\frac{\mathrm{N}}{n}\,,$$

a tudíž

$$\frac{i\,\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = -c\,\mathrm{J} + ia\,\mathrm{J}' + (-c\,\mathrm{K} + ia\,\mathrm{K}')\frac{\mathrm{N}}{n}\,.$$

Jest důležito podotknouti, že hodnota N v těchto výsledcích se vyskytující jest, jakož ihned ukážeme, algebraickou funkcí modulu. Vezměme jakožto příklad v úvahu jednoduchý případ transformace druhého řádu; ku theoremu II, Fundamenta § 37., že, nahradíme-li q hodnotou q^2, hodnoty k, K, K′ přejdou do $\frac{1-k'}{1+k'}$, $\frac{1+k'}{2}\,\mathrm{K}$, $(1+k')\,\mathrm{K}'$ připojíme, že J a J′ přejdou do $\frac{1}{1+k'}\,(\mathrm{J} - \frac{1}{2}k^2\mathrm{K})$ a $\frac{1}{1+k'}\,(2\,\mathrm{J}' - k^2\mathrm{K}')$.

Dále podotkněme, že výsledky, jichž jsme se právě dodělali, lze podati ve tvaru jednodušším; připomeneme-li si, že jsme položili $a\,d - b\,c = n$, snadno odvodíme rovnosti

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} \dfrac{a\,\mathrm{J}_1 + ib\,\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = n\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,\mathrm{N}\,, \\ \dfrac{c\,\mathrm{J}_1 + id\,\mathrm{J}'_1}{\mathrm{M}} = in\,\mathrm{J}' + i\mathrm{K}'\,\mathrm{N}\,, \end{cases}$$

z nichž vyvodíme některé důsledky.

Znásobivše první hodnotou J′, druhou J, obdržíme jich odečtením tento nový výraz pro N

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\mathrm{J}'\,(a\,\mathrm{J}_1 + ib\,\mathrm{J}'_1) + i\mathrm{J}\,(c\,\mathrm{J}_1 + id\,\mathrm{J}'_1)\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{M}}\left[a\,\mathrm{J}'\,\mathrm{J}_1 - d\,\mathrm{J}\,\mathrm{J}'_1 + i\,(b\,\mathrm{J}'\,\mathrm{J}'_1 - c\,\mathrm{J}\,\mathrm{J}_1)\right],$$

do něhož vcházejí pouze kompletní integrály druhého druhu.

Budiž napotom položeno

$$\mathrm{U} = a\,\mathrm{L} + ib\,\mathrm{L}' ,$$
$$\mathrm{V} = a\,\mathrm{J}_1 + ib\,\mathrm{J}'_1 ,$$

i máme tyto dvě relace

$$ll'^2 \frac{d\,\mathrm{U}}{d\,l} = l^2\,\mathrm{U} - \mathrm{V} ,$$
$$ll'^2 \frac{d\,\mathrm{V}}{d\,l} = l^2\,(\mathrm{U} - \mathrm{V}) ,$$

jichž užiji k differenciaci podle k rovnice $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} = a\,\mathrm{L} + ib\,\mathrm{L}'$ čili $\mathrm{K} = \mathrm{M}\,\mathrm{U}$.

Tím nalezneme

$$(k^2\,\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{d\,k}{k\,k'^2} = \mathrm{U}\,d\,\mathrm{M} + \mathrm{M}\,(l^2\,\mathrm{U} - \mathrm{V})\frac{d\,l}{l\,l'^2} ;$$

a nyní vyjádřím pomocí J a K pravou stranu, nahrazuje M a V hodnotami

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} ,$$
$$\mathrm{V} = \mathrm{M}\,(n\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,\mathrm{N}) .$$

Tento počet nám podává

$$(k^2\,\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{d\,k}{k\,k'^2} = \frac{\mathrm{K}\,d\,\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \left[l^2\,\mathrm{K} - \mathrm{M}^2\,(n\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,\mathrm{N})\right]\frac{d\,l}{l\,l'^2} ,$$

což jest linearná a homogenní relace mezi J a K. Patrně bychom se téhož výsledku dodělali vzhledem ku J′ a K′, položivše

$$\mathrm{U} = c\,\mathrm{L} + id\,\mathrm{L}' ,$$
$$\mathrm{V} = c\,\mathrm{J} + id\,\mathrm{J}' ,$$

differenciací rovnice $i\,\mathrm{K}' = \mathrm{M}\,(c\,\mathrm{L} + id\,\mathrm{L}')$; poněvadž determinant $\mathrm{J}'\,\mathrm{K} - \mathrm{J}\,\mathrm{K}'$ jest různý od nully, jest nutno, aby koefficienty u J a K, každý o sobě, vymizely. Máme tedy

$$\frac{d\,k}{k\,k'^2} = n\,\mathrm{M}^2\frac{d\,l}{l\,l'^2} ,$$
$$\frac{k\,d\,k}{k'^2} = \frac{d\,\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,d\,l}{l'^2} - \mathrm{M}^2\,\mathrm{N}\frac{d\,l}{l\,l'^2} .$$

První z těchto relací nalezena *Jacobi*-m a podána ve Fundam. § 32.; jakož známo, jest významu základního v theorii transformace. Vzhledem k ní lze druhou relaci psáti ve tvaru

$$\frac{k\,d\,k}{k'^2} = \frac{d\,\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,d\,l}{l'^2} - \frac{\mathrm{N}\,d\,k}{n\,k\,k'^2} ,$$

z čehož odvodíme následující výraz, jenž jest, jakož jsme již byli ohlásili, ryze algebraický:

$$\mathrm{N} = n\,k\,k'^2\,\mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}\,k'}{l'}\,;$$

k němu připojím applikace.

Nejprve uvažujme případ transformace druhého řádu, kde

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\,,$$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+k}\,.$$

Odtud snadno vychází

$$\left(\frac{\mathrm{M}\,k'}{l'}\right)^2 = \frac{1+k}{1-k}\,,$$

pročež

$$\mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}\,k'}{l'} = \frac{1}{k'^2}\,,$$

odkud ihned

$$\mathrm{N} = 2k\,.$$

Přecházeje ku případu, kdy $n = 3$, užiji výrazů, jež podal *Jacobi* v § 13 Fundam. pro oba moduly a pro multiplikator, totiž

$$k^2 = \frac{(2+\alpha)\,\alpha^3}{1+2\,\alpha}\,,$$

$$l^2 = \frac{(2+\alpha)^3\,\alpha}{(1+2\,\alpha)^3}\,,$$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+2\,\alpha}\,.$$

Z nich především snadno obdržíme

$$k'^2 = \frac{(1-\alpha^2)\,(1+\alpha)^2}{1+2\,\alpha}\,,$$

$$l'^2 = \frac{(1-\alpha^2)\,(1-\alpha)^2}{(1+2\,\alpha)^3}\,,$$

čímž

$$\frac{k'}{l'} = \frac{(1+\alpha)\,(1+2\,\alpha)}{1-\alpha}\,;$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{M}\,k'}{l'} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,.$$

Majíce tímto způsobem formuli

$$\mathrm{N} = 3\,k\,k'^2\,\frac{d\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}{d\,k}\,,$$

pišme nejprve

$$\mathrm{N} = 6\,k\,k'^2\,\frac{d\,\alpha}{d\,k}\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}\,.$$

Uváživše napotom, že

$$3\,k\,k'^2\,\frac{d\,\alpha}{d\,k} = (1-\alpha^2)\,(2\,\alpha+\alpha^2)\,,$$

dojdeme následujícího výrazu

$$\mathrm{N} = 2\,(2\,\alpha+\alpha^2)\,.$$

Odtud řešením dle α:

$$\alpha = -1+\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{N}}$$

a dosazením do výrazu pro k^2 nalezneme rovnici mezi N a k^2, kterouž jsme chtěli odvoditi, totiž

$$\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)^4 - 6\,k^2\left(\frac{\mathrm{N}}{2}\right)^6 - (4\,k^2+4\,k^4)\,\frac{\mathrm{N}}{2} - 3\,k^4 = 0\,.$$

Porovnáme-li tento výsledek s formulí

$$\mathrm{sn}\,3\,x = \frac{3-(4+4\,k^2)\,\mathrm{sn}^2\,x+6\,k^2\,\mathrm{sn}^4\,x-k^4\,\mathrm{sn}^8\,x}{1-6\,k^2\,\mathrm{sn}^4\,x+(4\,k^2+4\,k^4)\,\mathrm{sn}^6\,x-3\,k^4\,\mathrm{sn}^8\,x}\,,$$

shledáváme, přihlédnuvše k čitateli, ihned, že platí:

$$\mathrm{N} = -2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,\frac{2\,m\,\mathrm{K}+2\,n\,i\,\mathrm{K}'}{3}\,,$$

kde m a n značí dvě libovolná celistvá čísla.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 31.

ŽAMBERSKÉ LEBKY.

PŘÍSPĚVEK

K ANTHROPOLOGII OBYVATELSTVA ZEMĚ ČESKÉ.

PODÁVÁ

Dr. LUBOR NIEDERLE.

PŘEDLOŽENO DNE 24. ČERVNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

O velikonocích tohoto roku pobyl jsem několik dní v městě Žamberku a při té příležitosti změřil jsem řadu lebek nacházejících se v tamější kostnici. Přirozeno ovšem, že jsem měl na podobné cestě s sebou jen dva nejnutnější nástroje: kompas dotykový a posouvací, a že jsem tudíž nemohl měřiti ani kapacity lebečné, ani úhlů lícních, aniž bráti míry, k nimž je nutně zapotřebí postaviti lebku do určité roviny horizontální pomocí kranioforu. Nicméně změřil jsem jich dostatečnou řadu co možná úplně tak, že práce tato jest dosud největší a vlastně první větší kraniometrickou prací o moderních lebkách českých.

Kostnice žamberská nachází se ihned u kostela. Podle letopočtu nade dveřmi se nacházejícího byla vystavěna v předešlém století, při čemž byly patrně všechny lebky ze starší komory sem vneseny a narovnány. Srovnání jich nebylo však valné, lebky ležely dlouho rozházeny, a teprve nynější správce duchovní uvedl vše do pořádku, v jakém jsem je nalezl. Lebky jsou narovnány v postranních výklencích kaple a sice jednak v jedné vertikální vrstvě po celé stěně, jednak na každé straně ve dvou mohutných hranicích. Jest jich velké množství, odhadl jsem jich sám na více než 6000, předpokládaje ovšem, že i uvnitř hranic jsou vrstveny tak, jako se jeví na vnějších stěnách. Pocházejí všechny od domácího obyvatelstva žamberského. Město *Žamberk* samo mělo dle sčítání z roku 1880 3664 obyvatelů, soudní okres žamberský na ploše 263·88 km^2 čítal 29.854 obyvatelů, téměř vesměs národnosti české (29.198 Čechů a 320 Němců). Nicméně počínají již v nedalekém okolí osady ryze německé, a o trhu na náměstí žamberském slyšel jsem velmi hojně mluviti německy. Také mnoho německých jmen na nápisech a firmách svědčí, že obyvatelstvo v městě samém, ač nyní česky mluví, silně bylo s Němci pomíseno. Osady německé tvoří tu výběžky massy, která se rozprostírá po severní části Moravy, rakouského Slezska, Kladskem a t. d. na sever. V celém politickém okresu žamberském Němci jsou již počtem silnější.[1])

Při zkoumání lebek postupoval jsem následovně: Vybíral jsem je z povrchu hranic tak, *jak se která namanula.* Odkládal jsem však lebky příliš mladé, nevyvinuté, a lebky příliš porouchané. Změřil jsem jich celkem 60 a sice 30 co možná úplně (na každé 15 měr), na dalších 30 změřil jsem pak aspoň

---

[1]) Dle sčítání z r. 1880 bylo tu Čechů 30.770, naproti 32.728 Němcům. Tito zaujímají téměř úplně soudní okres rokytnický a králický, Češi okres žamberský.

3 hlavní rozměry mozkovny, největší délku, šířku a výšku. Kromě těchto 60 lebek, ještě 3 jsem připojil, všechny poněkud deformované, pathologické, z nichž dvě snad representují typ *cretinů* v místě hojně se vyskytujících. Věnuji jim na konci této práce zvláštní odstavec. **Tabulka I.** předvádí míry 30 prvních lebek

Rozměr	Pohlaví	Maximum	Minimum	Střední míra
Největší délka. L.	♂	190	169	180·13
	♀	177	160	168·5
	?	189	165·5	174·2
	Summou	**190**	**160**	**174·3**
Největší šířka. B.	♂	162	141	151·5
	♀	150	138	143·4
	?	155	136	147·05
	Summou	**162**	**136**	**147·40**
Výška. H.	♂	144	126	133·8
	♀	135	116	126·5
	?	142	117	130·1
	Summou	**144**	**116**	**130·1**
Nejmenší šířka čela. B′.	♂	107·5	93	98·7
	♀	101	89	94·8
	?	97	94	95·7
	Summou	**107·5**	**89**	**96·4**
Délka base lebeční. L B.	♂	114	91·5	102·1
	♀	100	91	95·2
	?	105	87	96
	Summou	**114**	**87**	**97·7**
Výška obličeje. G′ H.	♂	83	59	70·07
	♀	68	61	64·3
	?	71	56	66·66
	Summou	**83**	**56**	**67**
Šířka v obloucích jařmových. J.	♂	145	128	135·4
	♀	129	112	123·3
	?	138	114	124
	Summou	**145**	**112**	**127·5**

Obraz 1. Maxima, minima a střední míry rozměrů.

úplněji změřených, **tabulka II.** míry 30 lebek dalších a 2 připojených pathologických (č. 43, 44). Na obou tabulkách jsou lebky seřaděny dle pohlaví, napřed mužského pak ženského, na konec lebky, o jichž pohlaví jsem se nemohl určitě rozhodnouti. Třídil jsem dle pohlaví určitě pouze tam, kde mi svědčila celá *řada* znaků v anthropologii užívaných pro určení jednoho nebo druhého pohlaví. Kde jsem takové řady znaků nenašel, kde jeden znak na jednu,

druhý na druhou skupinu ukazoval, nerozpakoval jsem se nikdy zařaditi lebku raději mezi nejisté, maje na paměti slova Hyrtlova: »ich gestehe, dass ich mir, obgleich ein alter Anatom, nicht zutraue, in der Geschlechtsbestimmung eines Schädels nicht zu fehlen.« Stáří lebek určoval jsem pouze přibližně, poněvadž

Indexy	Pohlaví	Maximum	Minimum	Střední míra
Index délky. L : B.	♂	95·26	76·63	84·23
	♀	93·75	79·66	85·18
	?	91·17	77·27	84·38
	Summou	**95·26**	**76·63**	**84·59**
Index výšky. L : H.	♂	79·77	68·42	74·52
	♀	81·32	68·60	75·55
	?	83·04	68·42	74·03
	Summou	**83·04**	**68·42**	**74·70**
Index svrchní části obličeje. G′H : J.	♂	62·87	44·03	52·03
	♀	52·80	48·06	50·81
	?	57·37	49·12	52·89
	Summou	**62·87**	**44·03**	**51·91**
Index nosní. NH : NB.	♂	59·09	39·65?	49·52
	♀	56·52	43·39	49·21
	?	51·22	45·92	49·83
	Summou	**59·09**	**39·65?**	**49·52**
Index očnicový. $O_1 : O_2$.	♂	92·68	75·61	84·00
	♀	93·05	77·78	86·14
	?	94·73	83·78	88·98
	Summou	**94·73**	**75·61**	**86·37**

Obr. 2. Maxima, minima a střední míry indexů.

určitější datování je velmi často omylné, a také jsem ho neměl pro svůj účel zapotřebí. Označoval jsem proto lebku každou (soudě především dle vývoje chrupu, obliterace švů a atrofie kostí) pouze dle následujícího chronologického pořádku: ♂ mladý — dospělý — starší — starý, v obyčejném slov těch významu.[2])

Popis lebek.[3])

Prvním mým úkolem bylo měřiti *délku* a *šířku* lebek, abych mohl stanoviti vzájemný jich poměr *indexem délkovým neboli horizontálním,* který tak dobře označuje hlavní útvar mozkovny v normě vertikální.

[2]) Název »starší« dal jsem pravidlem lebkám, jejichž švy klenbové částečně se zavíraly a jiné znaky neukazovaly na srostění *předčasné*, název »starý« lebkám, u nichž obliterace již velmi pokročila.

[3]) Měřil jsem celkem na základě francouzského systému Brocova, ale všechny míry jsou zahrnuty i v systému německé shody frankfurtské. Jedině v měření očnic a patra

Jak jsem již napřed řekl, sestavil jsem vůbec z dobrých důvodů lebky mužské, ženské a lebky pohlaví neurčitého zvláště ve 3 skupiny. Střední míry obou prvních skupin jsou důležité, střední míra všech lebek méně důležita. Přirozeno jest to zejména v tom případě, kde se jedná o absolutní největší rozměry hlavy, a kde rozměry tyto dle pohlaví velice se mění. Langer dobře řekl, že poměrná malost normální lebky jest jedním z nejlepších znaků pohlaví ženského. Tato poměrná malost ženské lebky proti mužské nese s sebou i poměrné zmenšení všech detailních rozměrů, a z těch důvodů nutno vždy, pokud srovnáváme *absolutní* míry, lebky ženské od mužských seskupovat, srovnávat a hledat v každé skupině střední míry zvláště.

Délka a šířka. U lebek pohlaví mužského našel jsem maximum největší délky 190 *mm*, minimum 169 *mm*, *průměrná délka* normální byla *180·13 mm;* u lebek ženských bylo maximum 177 *mm*., mininum 160 *mm*, *střední míra 168·5 mm,* u lebek pohlaví nezjištěného maximum 189 *mm*, minimum 165·5 *mm*, střední míra 174·2 *mm*. Celkem tedy nejdelší lebka byla 190 *mm*, nejkratší 160 *mm* dlouhá. Rozdíl byl 30 *mm*, tedy nevelký. Největší šířka (hledaná zkusmo na stranách lebky, mimo hřeben kosti skráňové nad výčnělem soscovým) ukázala poměry následující. Maximum, jež jsem našel u lebek mužských, bylo 162 *mm*, minimum 141 *mm, střední míra 151·5 mm*; u lebek ženských maximum bylo 150 *mm*, minimum 138 *mm*, *střední míra 143·4 mm*, u lebek pohlaví neurčitého maximum 155 *mm,* minimum 136 *mm*, střední míra 147·05 *mm*. Celkem tedy maximum šířky bylo 162 *mm*, minimum 136 *mm*, rozdíl 26 *mm*.

Vypočteme-li nyní na základě formule $\frac{š \times 100}{d}$ poměrnou šířku každé lebky, je-li délka rovna 100, neboli t. zv. *index délkový*, dostaneme u 60 změřených lebek výsledky následující: U lebek pohlaví mužského dostoupil nejvyšší index čísla 95·26, tedy výšky velmi značné; naopak minimum bylo pouze 76·63, *střední index lebek mužských jest,* sečteme-li všechny indexy a dělíme-li součet číslem počtu lebek, *84·23*. Mezi lebkami pohlaví *ženského* byl nejvyšší index 93·75, nejmenší 79·66, *střední 85·18*; mezi lebkami pohlaví neurčitého pak největší 91·17, nejmenší 77·27, *střední 84·38. Celkem dosáhl mezi 60 lebkami žamberskými index délkový maxima 95·26, minima 76·63. Průměrný index jest 84·59.* Průměrné číslo indexu délkového neudává nám však, jak index skutečně jest rozložen Jedině v tom případě, že indexy tyto

---

dovolil jsem si následující odchylky. Měřil jsem největší *šířku očnice*, ne od Brocova dakrya, nýbrž jednoduše od více méně otupené oblé hrany, kterou tvoří orbitalní část kosti čelní resp. kůstka slzní, obracejíc plochu lícní do nitra očnice, jak měří nyní professor Léon Manouvrier, a jak prý Broka sám ku konci svého života měřil. Je to *pravá* šířka očnic. Totéž asi chce shoda frankfurtská, měříc šířku očnice »von der Mitte des medialen *Randes* der Augenhöhle bis zum lateralen Rand der Augenhöhle«. U *patra* měřil jsem poněkud jinak *délku*. Poněvadž zadní trn, který tvoří kosti patrové, velmi často bývá ulomen nebo nestejně vyvinut, neměřil jsem od něho, ale od bodu, který se nachází tam, kde se křižuje čára příčná, dotýkající se obou výkrojů zadní hrany kostí patrových, s medianním švem. Bod tento jsem téměř vždy snadno stanovil. Ovšem lze výsledky měr jen se stejným způsobem nabytými srovnávati, ne s těmi, ku kterým se došlo cestou obvyklou.

kupí se skutečně a rovnoměrně kol jednoho středu, číslo tohoto středu shoduje se s číslem průměrným. Jakmile bychom měli dva středy, dvě čísla, kol nichž by indexy oscillovaly, a jež by nám takto zobrazovaly *dva typy* lebek se stanoviska poměrné jich délky, pak ovšem střední průměrné číslo jest jen číslo imaginární, neskutečné. K zjištění tohoto fakta je třeba sestaviti čísla indexů lebečných methodou seriovou, skupinovou. Lebky žamberské podávají tu následující obrazec:

Pohlaví	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
♂	1	—	1	3	5	—	—	7	3	2	1	—	1	—	1	1	2	—	—	1
♀	—	—	—	1	1	—	—	—	6	6	2	1	—	—	—	—	—	1	—	—
?	—	1	2	—	—	1	1	—	1	3	—	2	—	—	1	1				
Summou	1	1	3	4	6	1	1	7	10	11	3	3	1	—	2	2	2	1	—	1

Obraz 3. Serie indexů délkových.

O rozložení délkového indexu nabýváme tímto obrazcem ihned jasnějšího světla. Vidíme, že u lebek mužských můžeme z indexu tohoto souditi na 2 typy, předně jeden *delší*, jehož index oscilluje na číslech 79 a 80, druhý kratší s oscillací na 83. Pokud můžeme z tohoto výsledku souditi na skutečné zastoupení dvou různých typů mezi mužským obyvatelstvem žamberským, bude dále pověděno.

Proti lebkám mužským lebky ženské jeví se velmi určitými, tvaru *jednolitého*, všechny téměř kupí se na čísle 84 a 85, a zřejmě potvrzují theorii, dle níž lebky ženské pravidlem jsou brachycefalnější.[4])

Lebky pohlaví neurčitého jeví přirozeně při svém malém počtu rozptýlení. Vyjmeme-li však z nich 2, které jednak pro malost svoji, a hlavně proto, že tvarem svým náležejí úplně typu, který, jak později povím, charakterisuje právě ženské lebky žamberské, nejspíše jsou také pohlaví ženského (lebka č. 29 a 57), stává se pravý index ženský (85) ještě určitějším.

Výsledkem zkoumání indexu délkového jest, že obyvatelé žamberští jsou *rozhodní brachycefali*, *a sice ženy brachycefalnější mužů*. Střední index je vyšší o něco, než se obyčejně o českých lebkách udává. Zajímavo jest, že procento extremních tvarů krátkých indexem nad 90 jest dosti silné (12·5%), mesocefali indexem od 75—80 naproti tomu nejsou tak zastoupeni jak v jiných, dosud měřených skupinách (také 12·5%). Dolichocefal nevyskytl se žádný.

Výška. Největší výška mužských lebek byla 144 *mm*, nejmenší 126 *mm*, *střední 133·8 mm.* — U ženských bylo maxim. 135 *mm*, minim. 116 *mm*, *střední*

[4]) Welcker to prvý našel na německém materiálu. Jiní jinde našli opak: Tareneckij u Velikorusek, Majer a Kopernicki u Rusínek, Broca u Normanek a p. Ale již theoricky je větší brachycefalie u žen oprávněnější. Scházejí jim silně vyvinuté dutiny nasofrontální, čímž se délka oproti délce lebek mužských značně zmenší. Srv. o tom Niederle, Příspěvky k anthropologii I. (Praha 1891) str. 89.

výška 126·5 mm, u neurčitých maxim. 142 *mm*, minim. 117 *mm*, střední číslo 130·1; celkem jsem nalezl největší absolutní číslo výšky 144 *mm*, nejmenší 116 *mm*. Rozdíl činí 28 *mm*. — Vypočteme-li nyní z největší délky a výšky lebky *výškový index* lebečný dle formule $\frac{v \times 100}{d}$, obdržíme řadu indexů, v níž se ukazují poměry následující. Nejvyšší index u lebek mužských dosáhl čísla 79·77, nejmenší čísla 68·42. Průměrný index všech lebek tohoto pohlaví jest *74·52*. U lebek ženských bylo maximum 81·32, minimum 68·60, průměrný index *75·55*. Jsou tedy lebky ženské právě tak, jako byly brachycefalnější i *vyšší* lebek mužských. Lebky neurčitého pohlaví ukazovaly poměr 83·04 : 68·42 : 74·03; celkem při maximálním indexu 83·04, minimálním 68·42 (rozdíl o 15 jednotek), ukázaly žamberské lebky *průměrný index výšky 74·70*. Dle tohoto výsledku *náležejí žamberské lebky do skupiny střední, orthocefalů* dle nomenklatury německé (70·1—75·0) i dle nomenklatury Brocovy (72—74·99), a sice s náklonem k hypsicefalii. *Ženské lebky pak vůbec jsou průměrem vysoké, hypsicefalní.*

Pohlaví	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
♂	1	1	—	2	4	3	6	1	4	—	2	2	—	—	—	—
♀	1	1	—	—	1	1	—	1	2	4	—	—	—	2	—	1
?	1	2	1	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—
Summou	3	4	1	2	5	4	7	3	6	5	2	2	—	2	—	1

Obraz 4. Serie indexů výšky.

Verifikujeme-li průměrný index methodou seriovou, obdržíme obrazec, který nám ukazuje řadu *stejnoměrně* vzestupující i sestupující kol čísla 74—76. Jsou tedy zde výsledky průměrného počtu potvrzeny seskupením seriovým. I tu je dobře vidět, jak ženským lebkám vlastní je větší výše. U mužských lebek leží téměř všechny indexy v intervallu 72—76, u ženských jest jich nejvíce na 76 a 77, a mimo to nacházíme mezi nimi při poměrně malém počtu ještě tři s indexem nad 80. U mužských není ani jedna podobně vysoká.

Délka spodiny mozkovny, měřená od kořene nosního k přednímu okraji velkého otvoru týlního (diamètre nasio-basilaire), ukazovala poměry následující.

Maximum u mužských lebek bylo 114 *mm*, u ženských 100 *mm*, u neurčitých 105 *mm*, minimum u prvých 91·5 *mm*, u druhých 91 *mm*, u třetích 87 *mm*, střední délka spodinová u mužských 102·1 *mm*, u ženských 95·2 *mm*. Mezi všemi lebkami bylo tedy maximum její 114 *mm*, minimum 87 *mm*; rozdíl činil 27 *mm*.

Těmito čtyřmi hlavními rozměry stanovena jest hlavní konstrukce mozkové části lebečné.

Nejmenší šířka čelní jest velmi důležita, ukazujíc právě poměr šířky čela ku šířce lebky samé, ale participuje již zároveň na konstrukci obličeje. *Nej-*

větší šířky čela jsem neměřil, ačkoliv uznávám její důležitost.[5]) Broca měří ji na t. zv. stefaniích, bodech, které se nalézají tam, kde šev korunový křižuje se s lineou semicirculární, anebo ještě lépe řečeno tam, kde v hoření své části složitý šev korunový stává se pravidelně jednoduchým. Body tyto však, a to mi dozná, tuším, každý, kdo měřil jednou více lebek, jsou tak neurčité, že šířka čelní na nich měřená může a musí v rukou různých měřitelů velice se měniti. Linea semicircularis bývá často široká, šev korunový velmi složitý, bývají tam malé kůstky wormské, přechod ze složitosti švu korunového k jednoduché čáře nebývá náhlý, nýbrž pomalý, — slovem, v největším počtu případů nebylo naprosto možno stanoviti bod stefania určitě tam, kde by ho i jiný umístil, výsledky by byly bezcenné, a proto jsem upustil raději od stanovení největší šířky čelní a spokojil se s měřením *šířky nejmenší*, velmi konstantní a určité v rukou každého.

Maximum její u lebek mužských bylo 107·5 *mm*, u ženských 101 *mm*, u lebek pohlaví neurčitého 97 *mm*, minimum u prvé skupiny 93 *mm*, u druhé 89 *mm*, u třetí 94 *mm*. Rozdíl největšího maxima vůbec 107·5 *mm* a minima 89 *mm*, je tedy 18·5 *mm*. Střední průměrná šířka čela u mužů je 98·7 *mm*, u žen 94·8 *mm*.

Rozměry obličeje. Lebky, jež jsem vybíral z povrchu hranic, byly vesměs, jak je přirozeno, beze spodních čelistí. Nebylo naprosto možné nalézti lebku úplnou. Nenamáhal jsem se také hledáním čelisti, jež by hodila se k některé lebce změřené, jež by zapadla dobře do jam kloubních kostí skráňových a do korun zubů svrchní čelisti, a měřil jsem tedy na lebkách pouze rozměry *svrchní části obličeje*, bez čelisti spodní, předně *výšku* od kořenu nosního k alveolárnímu okraji mezi oběma prvními zuby řezacími, a pak *největší šířku* na obloucích jařmových. Tyto však bývají dosti často ulámány.

Výsledky byly stručně následující. Maximum výšky u lebek mužských bylo 83 *mm*, minimum 59 *mm*, střední míra 70·07 *mm*, maximum šířky na obloucích jařmových 145 *mm*, minimum 128 *mm*, střední míra 135·4 *mm*. U lebek ženských bylo maximum výšky obličeje 68 *mm*, minimum 61 *mm*, střední míra 64·3 *mm*, maximum šířky 129 *mm*, minimum 112 *mm*, střední míra 123·3 *mm*. U lebek pohlaví neurčitého byl týž poměr u výšky 71 : 56 : 66·6 *mm*, u šířky 138 : 114 : 124 *mm*. Celkem při maximální výšce 83 *mm* a minimální 56 *mm*, našla se maximální šířka v jařmových obloucích 145 *mm*, minimální pak 112 *mm*.

Z poměru těchto dvou rozměrů vypočítává se *index obličejový*, který na rozdíl od indexu celého obličeje musí se zváti všude jen *indexem svrchní části obličeje*. Shoda frankfurtská přejala ho i jeho nomenklaturu *prozatím* od Kollmanna. Dosud však nevím, že by byla shoda novou definitivní nomenklaturou doplněna. V Brocových instrukcích tohoto indexu není. Náš index dosáhl u mužských lebek maxima 62·87, minima 44·03. Prvé náleží lebce, která měla také vůbec největší absolutní výšku 83 *mm*, druhé lebce, která měla mezi mužskými nejmenší výšku absolutní 59 *mm*. *Střední index*

[5]) Také shoda frankfurtská rozměr tento vypustila.

lebek mužských je 52·03. U lebek *ženských* byl největší index 52·80, nejmenší 48·06?, *střední 50·81*, u neurčitých největší 57·37, nejmenší 49·12, střední 52·89 *mm.* Celkem u *všech* mnou změřených lebek bylo maximum indexu vrchního obličeje 62·87, minimum 44·03, *střední index 51·91.*

Dle Kollmannovy nomenklatury, který bere za číslo hraniční 50, náležejí lebky žamberské svým hořením obličejem mezi lebky *úzké, leptoprosopní.* Z obrazce rozložení seriového nelze mnoho k tomuto dodati.

Pohlaví	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
♂	1	1	1	1	—	1	1	2	—	1	1	1	1	—	—	1	—	—	1
♀	—	—	—	—	1	—	1	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
?	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—
Summou	1	1	1	1	1	2	2	4	2	1	1	1	2	1	—	1	—	—	1

Obraz 5. Serie indexů svrchního obličeje.

Vidíme pouze tolik, že *průměrné číslo* **51** *jest sice také zároveň bodem oscillačním,* ale že větve vzestupná i sestupná jsou velmi dlouhé, *intervall kolísání indexu velmi veliký,* čímž ovšem ubývá významu čísla průměrného.

Spojil jsem také na zvláštní tabulce indexy délkové k indexům obličejovým, hledaje, je-li nějaké souvislosti s určitým tvarem mozkovny a tvarem obličeje. Ale výsledek byl úplně negativní. Materiálu k tomu bylo málo, a co bylo, dalo obraz úplné promísenosti. Neznamenal jsem v tom nejmenší souvislosti, že by s delšími nebo kratšími tvary mozkovny spojoval se delší nebo kratší obličej.

Z detailů obličeje zajímá nejvíce tvar *otvoru nosního a očnic.* Obé jest nemalé důležitosti pro anthropologii plemen lidských. Vyjádřil jsem oba tvary změřením největší výšky a šířky a vypočtením indexů. Mimo tyto měřil jsem ještě na 30 lebkách tvar oblouku alveolárního svrchní čelisti. Míry jsou uvedeny na tabulce I. Indexu patrového však jsem nevypočítal, poněvadž myslím, že celé toto měření rozměrů patrových a porovnávání tvarů jeho je celkem bezvýsledné, nehledě ani k značné neurčitosti, s jakou se měří šířka patrová.

A přece jsou zde absolutní míry neveliké a následkem toho chyba, která by jinde na př. při měření maximální délky lebky nebyla velikou, stává se chybou velmi značnou. Je-li něco důležitějšího na formě patra pro anthropologa, jest to, jak se mi zdá, *útvar klenby patrové,* ale ten dosud nevím, jakým způsobem by šlo lehce a dobře čísly vyjádřit.

Tvar otvoru nosního vyjádřil jsem *indexem nosním* a našel následující výsledky. Maximum jeho u lebek pohlaví mužského bylo 59·09, minimum 39·65?, *střední index u mužů 49·52.* U lebek ženských bylo maximum 56·52, u lebek pohlaví neurčitého 51·22, minimum u prvých 43·39, u druhých 45·92, *střední index u žen 49·21,* u lebek neurčitých 49·83. Viděti již, že u všech

tří skupin je velmi jednotný. *Střední nosní index všech lebek je právě tak jako u každé skupiny pohlavní zvláště něco nad 49* (*49·52*), při maximu 59·09 a minimu 39·65.

Pohlaví	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
♂	1	—	1	—	—	—	1	1	—	1	2	6	1	—	1	—	—	—	1	—	1
♀	—	—	—	—	1	1	1	—	—	2	—	2	—	—	—	—	1	1	—	—	—
?	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—
Summou	1	—	1	—	1	1	3	1	—	3	2	9	3	—	1	—	1	1	1	—	1

Obraz 6. Serie indexů nosních.

Methoda seriová však nám to poněkud poopravuje, a skutečný střední index zvyšuje na č. 50. Z obrazce č. 6 jest viděti, že nosní otvor s indexem 50 přichází u všech lebek nejčastěji. O málo nižší stupeň, který jsme obdrželi počtem průměrným, povstal tím, že řada stupňů před 50 je četněji zastoupena než řada stupňů nad 50. Hlavně u lebek mužských je dobře viděti tato oscillace na čísle 50. Nechci však souditi z této tabulky, že by mužské lebky žamberské měly proti ženským užší nosní otvory. Lebek ženských, u nichž jsem index mohl vypočísti, je příliš málo, abychom se mohli odhodlati k podobnému soudu. *Patří tedy lebky žamberské celkem mezi středonosé, mesorhiny*, jak dle nomenklatury shody frankfurtské (47·1 až 51·0), tak dle rozdělení Brocova (48—52,99).

Indexy očnicové byly následující. Nejvyšší index u lebek mužských byl 92·68, nejvyšší u lebek ženských 93·05, u lebek pohlaví neurčitého 94·73. Vůbec tedy 94·73. Nejmenší u první skupiny byl 75·61, u druhé 77·78, u třetí 83·78, v celku 75·61. *Střední index očnicový u mužů jest 84·00, 86·14 u žen, průměrem u všech lebek 86 37.* Jak ze středních čísel, tak také již z maxim a minim vidíme, že u žen je index průměrem nebo častěji vyšší než u mužů.[6])

Pohlaví	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
♂	1	—	—	1	—	2	—	4	1	—	3	1	2	—	—	—	1	1	—	—
♀	—	—	1	—	—	1	—	1	—	1	1	—	1	—	—	—	1	1	1	
?	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Summou	1	—	1	1	—	3	—	5	2	1	5	1	3	—	—	—	3	2	1	1

Obraz 7. Serie indexů očnicových.

[6]) Lebka ze skupiny neurčitých, na níž jsem našel maximální index 94·73, je však také nejspíše, soudě dle jiných znaků, pohlaví ženského. (Tab. I. č. 28.)

Indexy seřaděné v serii však nám toho jasně nepotvrzují, nejspíše jen proto, že ženských lebek bylo k tomu nedostatečné množství. Za to nám serie ukazuje 3 dosti zajímavá centra oscillační, jedno u čísla 82, druhé u č. 85 a třetí na 91—92. Jestli tato centra oscillační odpovídají ve skutečnosti snad různým typům, neodvažuji se na základě dosavadního materiálu rozhodnouti. Jisto jest však, že platnost průměrného indexu 86·37 tímto rozdělením ve 3 skupiny jest velmi oslabena. *Spíše se bude skutečné střední číslo nalézati na stupni 85.* V každém případu ostávají lebky žamberské průměrem *hypsikonchní, vysokého tvaru očnic* (dle shody frankfurtské) s dosti značným procentem tvarů velmi vysokých.[7]) Mezi mnou měřenými 30 lebkami bylo jich vůbec hypsikonchních s indexem nad 85 = 47%, s indexem nad 90 = 23%.

Celkový výsledek je tedy asi tento:

Lebky obyvatelů žamberských jsou rozhodně brachycefalní a sice ženy průměrem brachycefalnější mužů. Střední index je 84·59; skutečné centrum je u žen také mezi 84—85, ale u mužů jednak na 79—80, jednak na 83. Tvary extremně brachycefalní (nad 90) i tvary mesocefalní jsou dosti hojné (obého 12·5%). Lebky jsou dále prostředně vysoké, orthocefalní s náklonem k hypsicefalii (střední index 74·70), rozdělíme-li je však dle pohlaví, jsou ženské lebky většinou vysoké, hypsicefalní. Svrchní část obličeje je poměrně úzká, leptoprosopní dle Kollmannovy nomenklatury se středním indexem 51·91, při čemž se však jeví ve skutečnosti kolísání v dosti velikém intervallu. S leptoprosopií obličeje spojuje se dále mesorhinie se středním indexem 49 u lebek ženských i mužských (index, který se však ve skutečnosti objevil nejčastěji, byl 50) a průměrná hypsikonchie se středním indexem 86·37 (u mužů 84, u žen 86·14), při čemž se objevilo dosti značné procento hypsikonchů s indexem nad 90, totiž 23%.

K těmto znakům kraniometrickým možno připojiti ještě některé deskriptivní. Jako u jiných českých lebek[8]) i zde jsem pozoroval v normě lícní značné vydutí oblastí temporoparietálních nad postranní čelo ohraničující linie. Mužské lebky byly velmi hojně vyznačeny nosem u kořenu hluboko pod glabellou zasazeným a znatelnými jamkami přednosními. Také jsem si všiml, že u lebek jinak dosti mladých přichází hojněji ztráta zubů spojená s alveolární obliterací. Souvisí to s potravou? Spojení kostí temenních s kostí týlní tvoří častěji jakýsi schůdek.

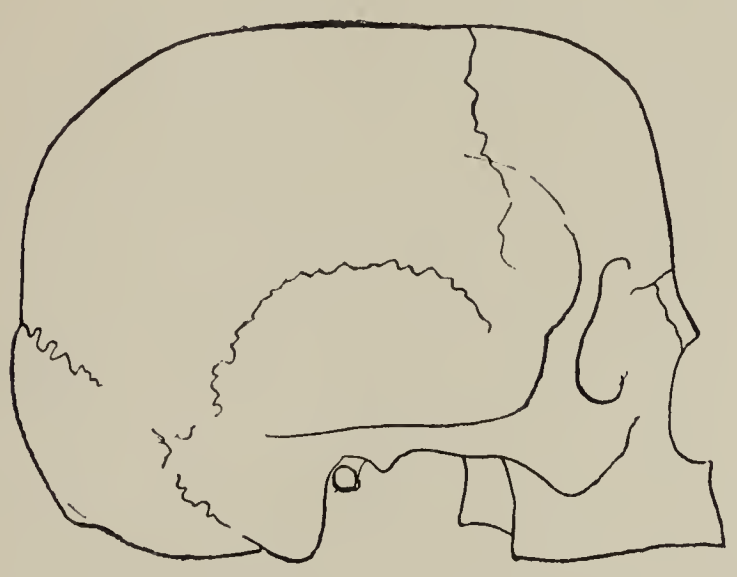
K tomu dlužno podotknouti ještě následující. Při měření lebek zpozoroval jsem brzy, že mezi nimi vynikají hlavně dva typy. V resultátech měr není jich pozorovat dobře, ale celkovým dojmem dosti dobře jsem je rozlišoval, hlavně z normy postranní. Podávám zde schematické náčrtky obou těchto

---

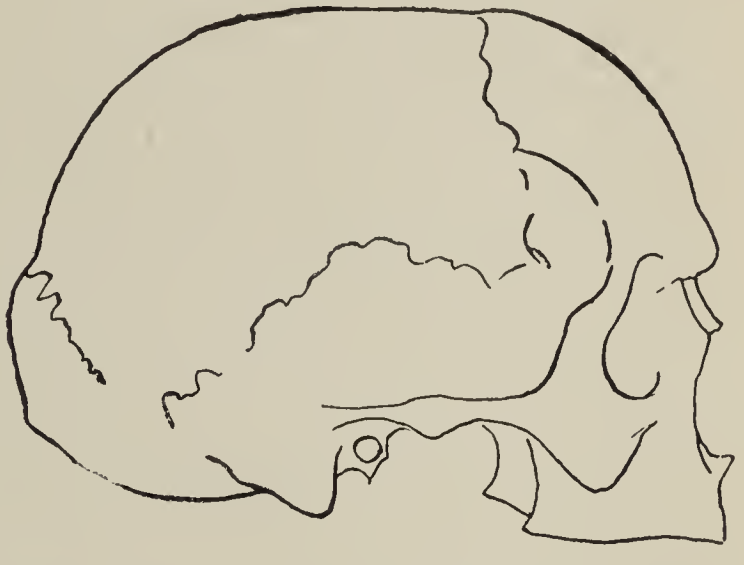
[7]) Zde jsem neuvedl rozdělení Brocova. Jeho nomenklatura zakládá se na měření šířky oční od *dakrya*; s měřením šířky, jak jsem ji měřil podle Manouvriera, spíše se shoduje šířka očnic shody frankfurtské.

[8]) Ku př. na lebkách z kostnice ve Velichovkách u Josefova, chovaných v dvorním museu vídeňském.

typů. Typ první, zovu jej krátce *typ A*, vyznačoval se *hlavně plochým temenem*, které spadalo napřed i vzadu dosti příkře v čelo a v týl. Při tom se vyznačuje plochým occiputem, vysokým čelem a brachycefalií. Typ druhý *B*



Obrazec 8. Schema typu A.



Obrazec 9. Schema typu B.

byl čela více nakloněného zpět, vytáhlejšího occiputu, nosem hluboko zasazeným s hojnými jamkami přednosními, a poskytoval celkem dojem tvaru dolichoidnějšího a nižšího. Vzorem jeho byla na př. lebka č. 14.

Typ	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
A ♂	1	—	—	—	1	—	—	1	—	1	1	—	1	—	—	1	1	—	—	—
B ♂	—	—	1	3	1	—	—	6	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
A ♀ [9])	—	—	—	—	1	—	—	—	5	6	2	1	—	—	—	1	—	—	—	—

Obraz 10. Index délkový dle typů.

Když jsem lebky srovnal dle pohlaví a k sobě přirovnával, viděl jsem ihned, že typ A u žen, typ B u mužů převládal, že vůbec hlavně typ A možno míti za charakteristický typ ženské lebky žamberské. Soudím proto, že se tu především jen jedná *o různosti pohlavní*, ačkoliv musím doznati, že i mezi lebkami, jež jsem dle jiných znaků určitě zařadil mezi lebky mužské, přichází dosti určitě vyznačený typ A. Mezi 31 mužskými lebkami našel jsem typ B patnáctkrát, tedy téměř v 50%, čistý typ A sedmkráte, tedy asi 19%. Naproti tomu mezi 18 ženskými lebkami byl typ A čistě vyjádřen jedenáctkráte (nečistě ještě třikráte), tedy téměř v 60% (72%), typ B pouze dvakráte.

Je-li však toto rozdělení na dva typy skutečně jen rozdělením pohlavním, či máme-li zde co jednati se dvěma různými anthropologickými typy, nedovedu říci z dosavadního. Ale pochybuju. V mírách jsem ostřejšího vyznačení

[9]) Do této serie jsem připojil na základě typu a malosti i dvě lebky ze seznamu neurčitých, a sice č. 29 a 57.

těchto dvou typů nenašel. Všechny indexy jsem zkoumal v seriích i dle těchto typů seřaděných, ale nenašel jsem i tu nějakého jasnějšího potvrzení, tak hlavně v seriích indexu výšky, svrchní části obličeje, otvoru nosního a očnic. Všude bylo rozložení indexu v typu A i B celkem stejné. Pouze typové serie indexu délkového ukázaly mi některé zajímavé výsledky, a sice v poměru ženského typu A k typu B na lebkách mužských. Typ B jeví dvě oscillace, jednu u 79, druhou u 83, totéž co ukazovaly lebky mužské vůbec (srv. obraz 3.). Typ ženský A potvrzuje pak tytéž výsledky hořejší. Z toho je zřejmo, že se zde nejspíše jedná pouze jen o typy pohlavní, při čemž mužský typ je proti ženskému *delší*.

Závěr.

Právě podané výsledky, doufám, budou dosti zajímavy pro ty, již se zajímají o českou anthropologii a sice nejen proto, že dřívější resultáty, pokud shodné jsou, jsou znovu potvrzeny větším materiálem, nýbrž se jimi opravuje i doplňuje ledacos, k čemu dříve došli na základech kusých hlavně dr. Weissbach a prof. E. Zuckerkandl.

Podal jsem tímto *první*, pokud vím, zpracování *většího stejnorodého materiálu* českých moderních lebek V anthropologickém kabinetě akademie mnichovské leží sice ve skříních 100 lebek moravských, kterými se před lety obíral dr. Obolenski, ale on nezměřil nic více, než délku a šířku u 85 lebek a vypočetl jejich indexy délkové. Výsledky nebyly dosud uveřejněny.[10]) Anthropologický kabinet dvorního přírodovědeckého musea vídeňského chová také několik serií českých lebek, hlavně z kostnic ve Velichovkách u Josefova, v Čejči na Moravě a z Petler (Bettlern) u Klášterce v Žatecku. Změřeny jsou, ale, tuším, dosud také nepublikovány.[11]) Co je uveřejněno, jsou jen menší práce v spisech Weissbachových a Zuckerkandlových.[12]) Řadu 38 Čechů

---

[10]) Lebky tyto zaslal professoru J. Rankemu Dr. Wankel. Z listu, kterým sbírku provázel, vysvítá, že pocházejí z kostnic, z nichž některé chovaly lebky dosti staré, a sice z Nákla a Příkazu u Olomouce (30), z Cholíny (30), z Petrovic mezi Sloupem a Blanskem (30) a z Doubravic mezi Českou Třebovou a Brnem (10). Prvních 60 náleží Hanákům, druhé Podhorákům.

[11]) Z prvých dvou míst jest jich více, z Petler 13. U příležitosti svého pobytu ve ve Vídni vypsal jsem si indexy délkové této skupiny (77·7, 78·4, 79·4, 80, 80·6, 81·7, 82·3, 82·7, 83·2, 84·2, 86·7, 92·6, 94·5).

[12]) Dr. *A. Weissbach*, Beiträge zur Kenntniss der Schädel österreichischer Völker. Wien 1867. (Abdruck aus den medizin. Jahrbüchern Bd. XIII. 1867.) Bemerkungen über Slavenschädel. (Zeitschrift für Ethnologie 1874, str. 306 nsl.) Změřil tu mimo jiné hlavní poměry (délku, šířku a výšku) 40 českých lebek, pocházejících hlavně z Čech méně z Moravy, a 20 slováckých ze severozápadních Uher a z pohraničných krajů moravských. — Dr. *Em. Zuckerkandl*, Beiträge zur Craniologie der Deutschen in Österreich. I. (Mittheilungen der wiener anthrop. Gesellschaft. XIII. str. 89 nsl.) Craniologische Untersuchungen in Tirol und Inner-Österreich. I. (ibidem XIV. str. 117 nsl.; srv. i XV. Sitzungsberichte str. 104—105). Über die physische Beschaffenheit der inner-österreichischen Alpenbevölke-

živých (vojáků) z okolí znojemského spolu s 38 Němci z téhož kraje změřil major Himmel a výsledky jeho vydal a s Hercegovci srovnal dr. A. Weissbach.[13]) To jest, pokud vím, vše.[14]) Je proto přirozeno, že příspěvek 60 (z nich 30 důkladněji) změřených českých lebek, a co hlavního ne porůznu z nemocničního, velkoměstského materiálu sebraných, jako je na př. asi materiál, s kterým Weissbach a Zuckerkandl pracovali, ale z *jednoho místa* pocházejících, *stejnorodých*, poskytuje vždy k studiu české anthropologie příspěvek zajímavý, a ne bez výsledků.

Srovnáme-li poměry indexu délkového, ku kterýmž došli autoři výše zmínění s výsledky naší práce, vidíme, že lebky žamberské ukazují předně *index délkový poněkud vyšší*. Zejména ženská lebka česká jest u nás od mužské poprvé určitěji rozlišena a ukázáno, že jest normálně kratší, aspoň na Žambersku. Dr. Weissbach našel r. 1874 u 40 lebek českých střední index 83·1, při čemž však nejvyšší počet lebek kupil se na čísle 85, Zuckerkandlovi oscillovalo nejvíce lebek z 29 na čísle 82 a 83. — Při tom Weissbach měl 7 čili 17·5%, Zuckerkandl 6 čili 20·7% mesocefalů.[15]) Výsledky Weissbachovy přejali i autoři díla *Crania ethnica*,[16]) Hovelacque a Hervé.[17]) Zatím náš index průměrný dostoupil čísla *84·59*, a vytkneme-li zvláště pohlavní rozdíl,

Naleziště	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	Kmen	Počet
Náklo, Příkazy a Cholína	1	—	1	2	8	4	4	7	7	4	5	1	6	1	—	2	Hanáci	53
Petrovice a Doubravice	—	1	—	3	2	5	6	3	2	2	5	2	1	—	—	—	Podhoráci	32
Summou . .	1	1	1	5	10	9	10	10	9	6	10	3	7	1	—	2	Moravané	85

Obraz 11. Serie indexů délkových 85 lebek moravských.

---

rung. (Correspondenzblatt der d. anthr. Ges. 1889 str. 157.) Všude si všímá slovanského lidu, v práci na druhém místě citované uvádí i míry 29 lebek českých a 7 slovenských, jak dále bude uvedeno. Ale provenience jejich je neudána a tudíž nejistá. Také dva ruští anthropologové prof. *Leshaft* a *Procenko* všímali si českých lebek, přirovnávajíce je k jinoslovanským, ale práce jejich mně nebyly dosud přístupny.

[13]) Dr. *A. Weissbach*, Die Herzegoviner verglichen mit Čechen und Deutschen aus Mähren nach Major Himmel's Messungen. Wien 1890.

[14]) R. 1851 změřil také Dr. Edvard Grégr více lebek z kostnice *putimské* (u Písku) a srovnával je s několika praehistorickými lebkami, v Čechách nalezenými. Byly krátkolebé, ale další míry nejsou udány v článku, který o tom vyšel v »Živě« r. 1858 str. 223 (»O lebkách člověčích vůbec a slovanských zvláště«).

[15]) *Weissbach*, Bemerkungen über Slavenschädel l. c., *Zuckerkandl* (Mitth. d. wiener anthr. Ges. XIV str. 125). *H. Welcker* ve své práci »Untersuchungen über Wachsthum und Bau des menschlichen Schädels« stanoví střední index 27 českých lebek docela na 82. Ale zde dlužno uvážiti, že neměřil největší šířky lebky vůbec, nýbrž jen největší šířky temenní, a že tudíž jeho šířka byla pravidlem menší naší.

[16]) *Quatrefages et Hamy*. Crania ethnica str. 492.

[17]) *Hovelacque et Hervé*, Précis d'anthropologie (Paris 1887) str. 569. O Češích praví: »L'os malaire est developpé, le nez est petit et plat, le crane volumineux. Ils passent pour

jak jest nutno, u mužských lebek 84·23, u ženských dosáhl *85·18*. Také počet mesocefalů je menší 12·5%.

Výsledky Obolenského dosud neuveřejněné jsou uvedeny v obrazci 11. Zde vidíme delší silně obsazenou řadu indexů (80—86) bez jednoho oscillujícího středu. Spíše bychom znamenali dvě centra oscillující, jedno kol 82, druhé na 86. Rozdělil jsem na obrazci tyto lebky moravské do dvou serií úmyslně proto, poněvadž každá z obou skupin pochází z jiného kraje. Jest velice litovati, že Obolenski neroztřídil materiál podle pohlaví. Snad by se bylo široké kolísání indexu, rázem vyjasnilo.

Také jiné věci dlužno doplniti. Weissbach v článku zmíněném vykládá, že lebky západních Slovanů liší se od lebek Jihoslovanů nejen nižším indexem délkovým, ale i větší *nízkostí*. Totéž platí pro české lebky vzhledem k polským a rusínským. Tuto vlastnost českých lebek je Weissbach nakloněn vyložiti mísením s Němci, jejichž lebky se vyznačují menší výškou.[18])

Také výrok Wankelův o obecné nízkostí lebek, nacházejících se v kostnici sedlecké, bychom mohli zde uvésti, kdybychom jeho náhodnému, a jak se zdá, jen od oka sdělanému odhadu, přikládati chtěli váhy.[19])

Ale žamberské lebky neukázaly nám *žádnou chamaecefalii,* průměrný index výšky i oscillační bod byl na čísle 74, druhý na čísle 76. Lebky byly *vůbec orthocefalní,* ba *ženské* lebky *průměrem vysoké, hypsicefalní.*

Dr. E. Zuckerkandl ve svém článku »Craniologische Untersuchungen in Tirol und Inner-Oesterreich« uvádí k přirovnání také 29 lebek českých provenience neudané, a charakterisuje na tomto základě české a slovenské lebky následujícími slovy: »Die Schädel der Nordslaven sind bei aller Breite lang — *dolichoid* — und stehen daher der germanischen Form viel näher als die Südslaven,« a dále »Dem gegenüber verweise ich blos auf die charakteristische Bildung der Nordslaven. Die *Prognathie, die breite, hohe Mundregion, die gedrungenen, engen, rein quergelagten Augenhöhlen und die kurze breite Nasenöffnung* sind charakteristisch für das Gesichtsskelet des Czechen- und Slovakenschädels. Das südslavische Gesichtsskelet zeigt Aehnliches.«[20]) V prvé věci má Zuckerkandl (právě tak jako již dříve Weissbach) pravdu. Naše lebky jsou skutečně delší lebek jihoslovanských, a nejen to, ony i v celém útvaru svém, který indexem nejde vyjádřit, poukazují častěji na formy, které jsou vlastní ku př. starým dolichocefalům germanských hrobů z počátku středověku (srv. náš typ B). Také neveliká skupina valašských lebek, jež jsem nejnověji změřil

---

les plus énergiques et les plus résistants de tous les Slaves.« Charakteristika pro anthropologa ovšem velmi nedostatečná.

[18]) *Weissbach*, Bemerkungen über Slavenschädel (l. c. str. 315). Weissbach obdržel následující poměry indexu výškového 40 českých lebek: Oscillační body se objevily dva, a sice u 72 a 75, u druhého ale mnohem více (značná čísla i na 76 a 77) tak, že průměrný index byl přece 75·2. U Slováků byl týž 75·5, u Rusínů 78·9, u Poláků 76·7.

[19]) Dr. *H. Wankel*, Über die angeblich trepanirten Cranien des Beinhauses Sedlec in Böhmen. (Mittheilungen d. wiener anthrop. Gesellschaft (1878) VIII. str. 352. Vyšlo také o sobě ve Vídni r. 1879. Dí tam: »ihr Charakter ist im Allgemeinen brachycefal oder mesocefal, letzteren sind oft sehr stark chamaecefal.«

[20]) l. c. str. 125.

(srv. poznámku 23.), ukazovala častěji týž dolichoidní tvar. Ale charakteristika *obličeje* tak, jak ji tímto podal prof. Zuckerkandl *není správná,* aspoň jí naše žamberské lebky v hlavních dvou znacích odporují: v tvaru orbit a apertury nosní. O prognathii alveolární se nezmiňuji, neměřil jsem jí. Na měření a srovnávání tvaru očnic klade prof. Zuckerkandl velkou váhu, chceť přímo, aby se sestavila o něm zvláštní statistika. Žamberské lebky podávají dobrý příspěvek, ale výsledek zní zcela jinak, než hoření definice udává. *Nízké, úzké orbity nejsou naprosto charekteristikem lebek žamberských,* právě tak jako jím není *krátká široká apertura nosní!* Očnice, jak jsme nahoře viděli, jsou průměrem *vysoké, hypsikonchní* a při tom se vyskytá ještě *značné procento* očnic velmi *vysokých* (s indexem nad 90 bylo jich mezi 30 23%!) Apertura nosní je také *střední*, ne nízká, široká. Jest tedy charakteristika obličeje české lebky, kterou zde r. 1884 podal prof. Zuckerkandl přese všechnu určitost, s kterou byla pronesena, *nesprávná.* Při nejmenším vidět zřejmě, jak soudy z malého materiálu není naprosto možno zobecňovat. Co nalezl prof. Zuckerkandl na 29 lebkách z Čech (odkud jsou, jsou-li z místa jednoho, nebo z různých stran sebrány, neudáno), není ještě charakteristikem české lebky vůbec.[21])

Možno však, že jsou v Čechách kraje, jejichž typ se bude lišit od typu žamberského a snad shodovat s typem prof. Zuckerkandlem definovaným. Jsem vůbec přesvědčen, že různé kraje české, tak jako ukazují různé typy živých hlav svého obyvatelstva, i na lebkách jejich objeví rozdíly. Při této příležitosti, myslím, že jsem oprávněn ukázati na problém, který se naskytuje v studiu moderní české anthropologie.

Naše obyvatelstvo je nyní krátkolebé a sice celkem asi typu, který jsme nahoře definovali. Soudím však a priori, že v jižních resp. národnostně čistších krajích Čech a Moravy bude brachycefalnější, nebo aspoň rovnoměrněji oscillovat kol jednoho stupně, než v krajích severních, kde velmi silně proniknuto bylo přistěhovalými živly německými. Němci v říši jsou poměrně dolichocefalnější než my. Čím dále jdeme na sever, tím více ubývá krátkolebosti,[22]) a tu při neustálém živení krajin nyní německých v severních Čechách a Moravě kolonisty od severu, které se dálo od dávných dob neustále až po naše časy, jest patrně nutným apriorním požadavkem, — předpokládám ovšem dědičnost a konstantnost typu, ne sice naprostou, nezměnitelnou ani vlivem tisíců let, jako učí Kollmann, ale konstantnost dočasnou, relativní, při níž, ociťuje-li se řada individuí ve svém genetickém vývoji v novém prostředí, ku př. rodina kolonisty severoněmeckého v kraji českém, mění se typ *pozvolna*, dlouho zanechávajc stopy znaků starších — pak jest, opakujeme, nutností, aby tento

---

[21]) Ostatně i výsledky, které na svých 29 lebkách našel a jež uvedl v závorce, neopravňovaly ho nijak k hořejší definici. Našelť mezi 29 lebkami 11 chamaekonchních, *12 mesokonchních a 6 hypsikonchních.* Jak možno říci z toho, že jsou charakteristikou české lebky »engen gedrungenen Augenhöhlen«? Dále bylo z nich pouze 6 širokonosých, *11 středonosých* a *12 úzkonosých.* Kde je zde »kurze breite Nasenöffnung«?

[22]) Dle *Rankeho* moderní Severoněmci (Friesové) ukazují následující poměr dolichocefalů k mesocefalům a k brachycefalům 18% : 51% : 31%, obyvatelé středního Německa 25% : 29% : 46%, Bavoři již 1% : 16% : 83%. (Der Mensch II. str. 204.)

jejich dolichocefalnější typ v německých krajích Čech přišel k platnosti, k výrazu. A proto soudím, že asi právě tak, jako se u nás našlo v německých krajích zřetelně větší procento typu světlé komplexe, čímž na př. v severozápadních Čechách shodují se hranice typu dle stupně komplexe dosti dobře s hranicemi národnostními, budeme moci jednou k tomuto anthropologickému znaku, rozlišujícímu nám Němce od Čechů, připojiti podobný znak druhý, totiž větší procento dolichoidních (nepravím dolichocefalních) tvarů. Na potvrzení toho bude ovšem třeba řady *lokálních* studií.[23])

Možno, že Weissbach a Zuckerkandl našli index nižší, nebo větší počet delších lebek proto, že lebky, s kterými pracovali, pocházely právě z krajin smíšenějších, a je možno též, že skupina žamberských lebek, která oscillovala u čísla nižšího 79 (srv. obrazec 3.), jest výsledkem vlivu německého, který zde, jak jsem nahoře pravil, ze Slezska až k samému Žamberku zasahá. Ostatně totéž

[23]) Také *na Slováky dlužno pamatovat.* Různé fragmentární zprávy dosti si odporují. *Weissbach* na př. u 20 Slováků našel poměry délky hlavy zcela příbuzné českým (střední index 83·5), ale mezi 7 slováckými lebkami u Zuckerkandla je *5 mesocefalních*, slovácké lebky v Lenhossékově Kranioskopii jsou definovány jako *mesocefalní*, a Dr. Wankel v nahoře zpomenutém listu k prof. Rankemu dí, že slovácké lebky »*sehr* von den čechischen abzuweichen scheinen«. Potvrdí-li se to, bylo by to velmi důležité pro českou anthropologii. *Welcker* (Untersuchungen) udává střední index 6 slováckých lebek na 81. Něco podobného, jak se zdá, ukazují lebky moravských Valachů. Během tisku této práce přišel jsem náhodou do *Tiché*, malé to vesnice valašské nedaleko Frenštátu, a nalezl v díře za oltářem kostelíka staré, vzácné dřevěné konstrukce, hromadu kostí ze hřbitova, které tam byly uloženy, jak mi starý posel dosvědčoval, asi koncem předešlého století nebo začátkem nynějšího století. Lebek tam bude něco ke stu, bohužel jsem však nemohl jednak pro nepřístupnost, jednak pro nedostatek času prohlédnouti a na rychlo změřiti jich více než 18 (z toho 9 mužských, 4 ženské, ostatní pohlaví neurčitého). Ponechávaje si podrobnější popsání jich na dobu pozdější, až budu míti po ruce více materialu ku srovnání, chci zde uvésti jenom to zajímavé faktum, že tyto patrně čisté valašské lebky *jsou dolichocefalnější českých*, právě asi jako slovenské dle udání svrchu zmíněných autorů. Obrazec jejich indexů je následující:

Pohlaví	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	Dohromady
♂	—	—	1	1	1	2	1	—	1	—	1	—	—	—	1	9
♀	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	4
?	1	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	4

Z toho je neomylně viděti, že index je nižší než český zejména u lebek mužských. Vypočteme-li střední index, je u 9 mužských 84·07, ale vymýtíme-li správně lebku s indexem 91, která, jak velká vypnutost temenních hrbolů svědčí, jest nejspíše rhachitickou a tudíž z řady normálních lebek má býti vyloučena, sestoupí index střední pouze na *82·87*. Index ovšem malého počtu ženských lebek je průměrem 85·81, lebek pohlaví neurčitého 84·73. Střední index všech (s vymýcením pathologické) je *84·07*. K tomuto výsledku přistupuje ještě to, že lebky i rozhodně brachycefalní objevovaly mi častěji ještě tvar doli. choidní. Faktum to je velmi zajímavé proto, že tyto valašské lebky jsou *jistě velice čisté*, a svědčilo by pro naši theorii o původním dolichocefalním tvaru slovanské lebky. S určitějším tvrzením chci však vyčkati, až budou vykonána další rozměrnější badání.

jeví obě serie Obolenského, řada lebek z Olomúcka i řada lebek z Podhorácka. Obě končiny jsou blíže hranic národnosti německé (obrazec 11).

Tím, že *nynějšímu čistšímu* obyvatelstvu českému přičítám i větší, resp. čistší brachycefalii, než německému obyvatelstvu Čech, které sem přišlo od severu, nijak se nedotýkám *původních* anthropologických tvarů těchto národů. Ukázal jsem již na jiném místě,[24]) jak mnoho důvodů má pro sebe theorie, dle níž Slované i Germané, jsouce větve jednoho kmene árijského, byli pravděpodobně i typu původně podobného: lebky dlouhé s úzkým obličejem, s vysokými očnicemi, světlých vlasů, očí i pleti. Oba národové tento typ nyní ztratili, západní Slované a Jihoněmci u mnohem větší míře než severní Němci, jelikož tito v kraji svém doznali mnohem menšího mísení a mnohem méně rušících vlivů než Slované a jižní Němci. Tím se stalo, že zejména jižní a západní slovanské větve[25]) na dobro změnily svůj původní typ (o hypothesovaných příčinách nechci se zde znovu rozvádět), kdežto Němci na sever od Čech bydlící mnohem čistěji ho udrželi. Tím se i vysvětluje, proč kolonisté němečtí, kteří se již od dávných dob naší historie do Čech hrnuli a na severu usazovali, přirozeně působili na typ, který se zatím u domácího obyvatelstva ustálil, a proč se odvažuji *a priori* souditi, že i v typu lebečném najdeme rozdíly (ovšem jen v průměru celku, ne v individuích) mezi obyvatelstvem krajů českých a německých.

Pro tento soud nemám mimo tento apriorní základ empirického potvrzení. Ba některá dosavadní zkoumání na první pohled platnosti jeho nenasvědčují. Jest to na př. zajímavý příspěvek k určení anthropologického typu *dětí lovosických*, který nedávno uveřejnil Dr. *J. Matiegka*.[26]) Lovosice jsou město nyní zcela poněmčené, kde se usadilo mnoho německých rodin ze Saska a t. d., a kde bychom tedy přirozeně čekali známky vlivu typu přistěhovalců. Typ dětí, soudě dle indexu délkového, však ukazuje střední číslo *87·15*, při čemž i když odečteme 2 jednotky, abychom mohli index hlavy živé přirovnávati k indexu lebečnému,[27]) střední číslo 85·15 *převyšuje* střední číslo lebek žam-

---

[24]) *L. Niederle*, Příspěvky k anthropologii zemí českých I. (Praha 1891) str. 95 nsl. a v Athenaeu 1891 str. 195 nsl. Srv. též referát „*Les derniers résultats et cardinaux problèmes de l'anthropologie en Bohême*“ v Compte Rendu du XI. congrès internationale de l'archéologie et anthropologie préhistorique (Moskva 1892). T. I.

[25]) Čím jdeme ve slovanských zemích dále na sever a na východ, tím bylo mísení se středoevropskými brachycefaly menší, a proto tam pozorujeme stálé ubývání brachycefalie. Tato menší brachycefalie východnějších slovanských kmenů, kterou budeme moci, jak se zdá, vystopovati i v obvodu lidu českého (srv. poznámku 23.), je ovšem něco zcela jiného, než ta, kterou snad dle naší hypothesy v jiných krajinách českých přivodili kolonisté ze severního Německa. Ona jest *prvotní*, tato *druhotná*; ona by značila částečné zachování původního tvaru lebky, tato by pravila, že lebka původně dlouhá a pak různými vlivy skrácená, *znovu* se vlivy německými prodlužuje.

[26]) Český lid I. str. 429 nsl.

[27]) Že rozdíl mezi indexem hlavy živé, tedy lebky obalené různě silnou vrstvou částí měkkých, a indexem vyschlé lebky existuje, není pochybnosti. Pochybuju proto, že by *Topinard* správně soudil, když pravil ve své velké anthropologii (Éléments d'anthropologie générale str. 373), že dle nejnovějších badání rozdíl tento je jenom velmi nepatrný (0·31), snad že ho prý vůbec není. Výsledky zkoumání jiných badatelů ukázaly opak. Dr. *Mies*

berských. I oscillační bod je výše, na 86. Ale výsledky tyto nelze dobře s našimi srovnávati. Tam se měřily hlavy *dětí*, zde lebky *dospělých*. A tu není pro mne pochyby, že tato vyšší brachycefalie dětí lovosických jest jen čistě *dětská*, *založená v nedokončeném vývinu lebky*, a že jest Matiegkovo zkoumání jen novým dobrým dokladem pro tvrzení o větší brachycefalii dětí proti lidem dospělým. Neboť nesmíme zapomínat, že značná úloha na poměrném rozměru délky hlavy připadá vývinu dutin nasofrontálních. Dítě jich nemá, ne sice na prosto, jak se dosud v knihách čte,[28]) ale nejsou asi do 6.—7. roku tak vyvinuty, aby silněji zvětšovaly délku lebky. Za to u dospělých, zejména mužů, bývají někdy velmi objemné, oblouky nadoční a glabella jsou jimi silně vyklenuty, a snadno se stává, že zvětší délku o 5—10 *mm*, a tím sníží index o 2—3 jednotky! Něco podobného jest ještě se zevním hrbolem týlním, t. zv. iniem. I ten u dětí není žádný, u žen slaběji vyvinut; u dospělých mužů však leckdy dotyčné místo kosti týlní velmi sesílí, a přispěje tak ku zvětšení délky. Nemohu proto dosavade pochopit, jak mohl přijíti prof. Zuckerkandl k doznání, že délka hlavy dosáhne dříve svého maxima než šířka, z čehož by nutně následovalo, že by se lebka od dětství do doby dospělosti více krátila, a ne prodlužovala, jak právě podaný výklad i řada empirických výsledků ukazuje.[29])

Proto nesvědčí poměrně vysoká brachycefalie lovosických dětí proti myšlénce nahoře pronesené. Ale za to bychom čekali, *že u dětí z krajiny ryze*

---

našel nověji na dospělých lebkách Němců (v nemocnicích kolínské a mnichovské) rozdíl větší než 1 (»Über die Unterschiede zwischen Länge, Breite und Längen-Breiten-Index des Kopfes und Schädels« v Mittheil. d. wiener anthropolog. Gesellschaft Bd. XX. str. 41), Dr. *Weissbach* (Länge und Breite des Kopfes und Schädels«, ibidem XIX. Sitzungsberichte str. 198) rozdíl 1·5—2, a již dříve *P. Broca* a *L. Stieda* vypočetli rozdíl na dvě jednotky (Comparaison des indices céphaliques sur le vivant et sur le squelette« v Bulletins de la société d'anthropologie de Paris 1868 str. 25, a *Stieda* »Über Berechnung des Schädelindex aus Messungen an lebenden Menschen« v Archiv für Anthropologie XII. str. 421). Tak soudí i *E. Houzé* (Programme du cours d'anthropologie, Bruxelles 1891, str. 27), který právě s Topinardem v této věci pracoval; jiní odnímali ještě více (Mantegazza).

[28]) *Topinard* soudí, že se počínají objevovati u dětí v 6.—8. roce (Éléments d'anthropologie générale, Paris 1885 str. 658), dle *Fr. Merkela* v 6. - 7. roce. (Beitrag zur Kenntniss der postembryonalen Entwickelung des menschlichen Schädels, Bonn 1882 str. 178.) Dle *Poiriera* však počínají se vyvíjeti resorpcí diploy již v 1.—2. roce, rostou pak pomalu dilatací stěn, a v 6. roce dospívají asi velikosti hrášku.

[29]) Prof. *Zuckerkandl* v článku již vícekráte citovaném na str. 127. Oporou theorie této bylo mu 156 dětí z Rakous, mezi nimiž bylo větší procento mesocefalů než u dospělých z téže krajiny, a tvrzení prof. *Schaaffhausena* pronesené na sjezdu v Paříži r. 1867 (Compte rendu de la 2. session. Paris 1868 str. 409 nsl. Srv. též článek jeho v Bulletinech anthropologické společnosti pařížské r. 1866 str. 319). Že však tomu bude jinak, svědčí mimo theoretický výklad nahoře podaný i empirické výsledky celé řady měření. Pokud vím, *všude se u nás našly děti brachycefalnější.* Srv. výsledky práce Matiegkovy o dětech lovosických i moje dále podané výsledky měření školních dětí z Nové Paky a z Pouchova u Hradce Králové. Totéž našel i *K. Ikov* u Bělorusů (Замѣтки по кефалометріи Бѣлоруссовъ v Дневникѣ импер. общества любителей естествознанія, антропологіи и этнографіи въ Москвѣ 1890 str. 99), *F. Regnault* na dětech pařížských (Des altérations craniennes dans le rhachitisme. Paris 1888 str. 61).

české bude poměrně ještě větší. Měřil jsem předešlé prázdniny řadu školních dětí v městě Nové Pace a ve vsi Pouchově u Hradce Králové, ale musím doznati, že výsledky toho dosud nepotvrzují. Obrazec rozložení indexů délkových obdržel jsem následující:

Místo	Pohlaví	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	Počet
Nová Paka	♂	1	—	1	3	5	2	10	8	8	9	11	13	5	3	7	3	2	2	1		80
	♀	—	—	—		1	—	2	3	1	8	7	6	3	3	2	—	—	—	—	1	33
	Summou	1	—	1	3	6	2	12	11	9	17	18	19	8	6	9	3	2	2	1	1	113
Pouchov	♂	—	—	1	2	1	1	3	5	6	8	6	3	2	—	2	—	1	—	—	—	41
	♀	—	—	—	—	3	2	3	4	1	1	1	2	3	3	—	—	—	1	—	—	24
	Summou	—	—	1	2	4	3	6	9	7	9	7	5	5	3	2	—	1	1	—	—	65

Obraz 12. Serie délkových indexů dětí z Nové Paky a z Pouchova.

Vidíme téměř totéž, co v Losovicích. Ba v Nové Pace, která leží přece na blízku hranic německé národnosti, vidíme vyšší stupeň brachycefalie (opět *více u děvčat než u hochů*) než v ryze české vsi Pouchově. Prosil jsem proto dra. Matiegku, aby mi roztřídil indexy lovosických dětí dle jich původní národnosti (přibližně dle českosti nebo německosti jmen), výsledek však byl nevelký. I děti s jmény německými, i děti s jmény českými nejvíce byly zastoupeny na čísle 86. Pouze děti českého původu jsou tu zastoupeny silněji, naopak děti původu německého zase v oddělení indexů pod číslem 86. Možná, že jest to skutečně doklad pro theorii nahoře postavenou, ale tak slabý, že se ho dosud nechci dovolávat.

Nicméně od ní neustupuju, a na tyto Matiegkovy a moje cefalometrické výsledky nekladu váhu hlavně proto, poněvadž byl materiál *nedospělý*. Bude nutno pracovati v kostnicích různých míst českých na lebkách dospělých, tyto výsledky přirovnávat, a *celek* nám pak odpoví. Z jednotlivých skupin vždy dlužno varovati se zobecňování. Nevíme obyčejně, nebyly-li zde účinny i nějaké zvláštní vlivy lokální.

Dodatek.

Mezi lebkami v kostnici žamberské pozoroval jsem *dosti hojně* zvláštní útvar lebek, jak u lebek dětských tak i u dospělých. Typ tento vyznačen jest na první pohled především plochým obličejem s vysokými orbitami, k čemuž přistupuje vysoké, ploché nebo do předu vyduté čelo; mozkovna má zvláštní útvar dobře viditelný hlavně se strany. Témě je ploché, po délce švu šípového rovně spadá do zadu až k hraně, kterou tvoří linea nuchae suprema. Tam se plocha téměř láme.

Jednu jsem změřil, ale nepodávám její obraz, poněvadž nebyla typu dosti určitě *vyznačeného.* Zahlédl jsem tam sice lebku mnohem význačnější, zejména s čelem více do předu vydutým, s velmi nízkým, plochým temenem, ale nemohl jsem jí dostati. Bylať zastrčena ve stěně z kostí narovnané, a pokus o její vynětí byl by měl nutně za následek sřícení celé té vysoké stěny kostí.

Z toho, že se typ právě popsaný častěji objevoval, soudil jsem ihned, že nám snad představuje typ *cretinů,* ovšem ne takového stupně, jakého jsem zahlédl v městě několik živých. Je-li tomu vskutku tak, povolanější rozhodnou, já zde pouze na to upozorňuji Lebka, již jsem měřil, mínění tomu neodporuje.

Lebka představuje nám jednoduchý případ částečné a sice čelní hydrocefalie. Rozměry její připojil jsem na tabulku I. pod č. 63.[30]) Jest brachycefalní jako ostatní (index 86·28). Orbity vynikají svou výškou (index 93·41); tvar tento je v patrné korrelaci s útvarem čela. Lebka náležela člověku *mladému,* jak svědčí celý stav kostí; všechny švy klenby lebeční jsou zevně otevřeny. *Uvnitř však jsou přední část švu šípového a šev korunový zarostlé.* Také jsem šev čelní, který *zevně jest dosud celý otevřen,* našel na vnitřní kompaktě zavřený. I persistence švu frontálního i ono předčasné srostění švu na kmeni lebečném je asi v souvislosti s pathologickým vývinem mozku. Šev sfenobasilární je již zavřen. Místo, kde stýká se kost kolková s kostí temenní (t. zv. pterion), vyznačuje se na obou stranách dosti značnou délkou švu, který obě kosti spojuje. Šev lambdový je silně členitý a protkán mnoha kůstkami wormskými. Pohlaví přesně určiti jsem se vzhledem na pathologický vývin lebky neodhodlal. Z útvaru obličeje a slabě vyvinutých násadců svalových na spodině lebky soudil bych však spíše na pohlaví ženské.

Cretinů je v kraji žamberském poměrně dosti, a bylo by záhodno podrobit je bedlivějšímu zkoumání. Dle sčítání z r. 1880 bylo jich v celém politickém okresu žamberském 115 (68 ♂, 47 ♀), a pokud se pamatuji na výbornou mapu statistiky blbců, kterou vystavil p. K. Wahl na loňské jubilejní výstavě (skupina XXVI. č. 4404.), tvoří tento okres část pásma, v němž cretini v Čechách poměrně nejsilněji jsou zastoupeni (100 na 100.000). Toto pásmo táhne se od Jablonce podél hranic až k Poličce, obsahujíc Jilemnicko, Vrchlabsko, Trutnovsko, Broumovsko, Novoměstsko, Rychnovsko, Lanškrounsko, Litomyšlsko a Poličsko.[31])

---

[30]) Na tabulce II. pod číslem 43. připojen jest také jeden cretin, tomuto úplně podobný. Lebka č. 44 je také poněkud deformovaná, tvaru do výše vytaženého. Obou lebek jsem proto nepojímal ve své výpočty.

[31]) Druhý, na cretiny bohatší kraj obsahuje okresy sušický, prachatický, krumlovský a kaplický, třetí je na západě Čech v Rudohoří.

Lebky žamberské. Řada první.

Tabulka I.

Číslo lebky	Největší délka	Intertuberální délka	Největší šířka	Nejmenší šířka čelní	Výška (basion-bregma)	Délka base lebečné (basion-nasion)	Šířka mezioční	Výška očnic	Šířka očnic	Výška dutiny nosní	Šířka dutiny nosní	Délka patra	Šířka patra	Výška svrchní části obličeje	Šířka na obloucích jařmových	Index					Pohlaví	Stáří	Poznámky
																délky	výšky	obličeje	nosní	očnicový			
	L.		B.	B'.	H.	LB.		O_2.	O_1.	NH.	NB.	G_1.	G_2.	G'H.	J.	L : B.	L : H.	G'H : J.	NH : NB.	O_1 : O_2			
1	181	183	152	96	130	99	25	34	40	44	26	43	37	59	134	83·97	71·82	44·03	59·09	85·—	♂	starší	Typ A
2	178	180	154	98	141	103	22	30	38	55	28	45	39	75	135	86·51	79·21	55·55	50·90	78.95	♂	dospělý	Typ A
3	176	178	155	96	135	95	25	34	42	49	25	44	42	69	135	88·06	76·70	51·11	51·02	80·95	♂	mladý	Typ A
4	179	—	144	97	132·5	96	25	34	39	50	25	41	38	67	132	80·44	74·02	50·75	50·—	87·18	♂	starší	Typ A
5	171	174	156	104·5	126	94	26	33	40	53	24	—	—	—	139	91·23	73·68	—	45·28	82·50	♂	starý	Typ A
6	184	185	141	100	137	106	26	38	41	58?	23	48	39	83	132	76·63	74·45	62·87	39·65?	92·68	♂	dospělý	Typ A
7	169	178	161	93	127	91·5	27	36	39·5	55	23	41	39	77	137	95·26	75·14	56·20	41·81	91·14	♂	starý	
8	177	177	148	98	131	100	26	32	39	51·5	26	45	43	64	135	83·61	74·01	47·40	50·49	82·05	♂	starší	Typ B
9	183	186	157	100	135	104	30	35	42	53	26	46	42	74	137?	85·79	73·77	54·01?	49·05	83·33	♂	mladý	Typ B
10	189	—	151	97·5	136	106	27	32	39	49	28	38?	35?	—	137	79·89	71·95	—	57·14	82·05	♂	starý	Typ B
11	178	177	149	97·5	131	100	25·5	35	41	52	26	46	36	76	128	83·71	73·59	59·37	50·—	85·36	♂	dospělý	Typ B
12	182	183	147	100	136	107	28	31	41	51	26	48	42	64	141	80·77	74·72	45·39	50·98	75·61	♂	mladý	Typ B
13	180	173	151	97	130	103	26	35	40	50	24	45?	38	—	138	83·88	72·22	—	48·—	87·30	♂	dospělý	Typ B
14	188	186	149	107·5	144	110	30	32	40	50	25	49·5	42	68	145	79·25	76·59	46·90	50· –	80·—	♂	dospělý	Persistence švu čeln. Ostrý typ B.
15	183	184	146	98	132	102	27	32	37	45	24	49	37	64	129	79·78	72·13	49·61	53·33	86·48	♂	starší	Typ B
16	180	177	141	93	141	105	25	33	40	51	23·5	46	36	69	128	78·33	78·33	53·90	46·07	82·50	♂	mladý	Typ B
17	190	189	152	106	130	114	29	34	40	53	26	49	36	72	140	80·—	68·42	51·43	49·05	85·—	♂	starý	
18	172	175·5	145	97	125	96	25	28	36	47	23	46	41	—	125	84·30	72·67	—	48·93	77·78	♀	dospělá	Typ A. Persistence švu čelního.
19	171	173	144	98	129	99	24	34	42	46	26	42	—	—	—	84·21	75·44	—	56·52	80·95	♀	starší	Typ A
20	172	—	138	97	118	93	21	36	41	50	25	—	—	68	—	80·23	68·60	—	50· –	87·80	♀	starší	Typ A
21	170	172	145	101	130	100	24	32	39	48	26·5	43	41	62?	129	85·29	76·47	48·06?	55·20	82·05	♀	dospělá	Typ A
22	166	169	145	89	135	100	23	35	38	48·5	22	41	39	66	125	87·35	81·32	52·80	45·36	92·10	♀	mladá	Typ A
23	167	166	143	94	127	93	22	33·5	36	53	23	—	39	65	127	85·63	76·05	51·18	43·39	93·05	♀	dospělá	Typ A
24	166	166·5	142	93	116	94	23?	33	36	48	24?	—	—	—	112	85·54	69·88	—	50?	91·67	♀	stará	
25	160	164	150	90	130	91	22	30	35	47	21	38	34	64	123	93·75	81·25	52·03	44·68	85·71	♀	mladá	Hrboly temenní silne vyst. Rhachitis?
26	163	166	139	94	126	91	21	32	38	44	21·5	42	37	61	122?	85·27	77·30	50?	48·85	84·21	♀	dospělá	Typ B
27	176	175	139	96	123	87	24	34	37	49	25	41	37	70	122	78·97	69·88	57·37	51·02	91·89	♀?	dospělá	Typ B
28	178	182	146	96	134	102	25·5	36	38	49	22·5	45	37	69	122	82·02	75·28	56·55	45·92	94·73	♀?	mladá	
29	171	178	146	94	142	105	26	32·5	38	51	26	44	38	71	138	85·38	83·04	51·45	50·98	85·52	♀?	starší	Typ A
30	172	176	151	97	133	90	23	31	37	41	21	41	36	56	114	87·79	77·32	49·12	51·22	83·78	♀?	mladá	
63	175	184·5	151	101	128	93	26	35·5	38	53	22?	36	37	73·5	126?	86·28	73·14	58·33?	41·51?	93·41	♀?	mladá	Cretin

Tabulka II.

Lebky žamberské. Řada druhá.

Číslo lebky	Největší délka L.	Intertuberální délka	Největší šířka B.	Výška (basion-bregma) H.	Index délky L:B.	Index výšky L:H.	Pohlaví	Stáří	Poznámky
31	176	180	162	131	92·70	74·43	♂	starý	Typ A
32	185	186	158	135	85·40	72·97	♂	starší	
33	177	—	161	—	90·95	—	♂	starý	
34	173	174	146	138	84·39	79·77	♂	starý	Typ B
35	177	176	148	139	83·61	78·53	♂	starý	Typ B
36	190	190	159	—	83·68	—	♂	starší	Typ B
37	176	180	148	135	84·09	76·70	♂	dospělý	Typ B
38	179	177	150·5	130	84·07	72·62	♂	starší	Typ B
39	180	181	150	138	83·37	76·66	♂	starší	Typ B
40	182	—	147	—	80·77	—	♂	starší	
41	186	192	150	130	80·64	69·89	♂	dospělý	
42	175	171	161	130	92· –	74·28	♂	dospělý	
43	177	—	158	—	89·26	—	♂	starší	Cretin. Čelo silně vypouklé.
44	168	170	153	134	91·07	79·76	♂	starší	
45	170	—	147	—	86·47	—	♀	mladá	Typ A
46	170	—	144	—	84·70	—	♀	mladá	Typ A
47	166	—	140	—	84·33	—	♀	starší	Typ A
48	175	180	149	135	85·14	77·14	♀	dospělá	Typ A
49	168	170	142	130	84·52	77·38	♀	starší	Typ A
50	170	—	145	—	85·29	—	♀	starší	
51	160	158	139	117	86·87	73·12	♀	starší	
52	170	—	144	—	84·70	—	♀	starší	Typ B
53	177	—	141	—	79·66	—	♀	dospělá	
54	176	—	136	—	77·27	—	♀?	starší	
55	176	—	149	—	84·65	—	♀?	starší	Typ A
56	180	185	147	135	81·66	74·99	♂?	starší	Typ A
57	170	175	155	131	91·17	77·05	♀?	starší	Typ A
58	189	187	149	132	78·83	69·84	♂?	—	
59	171	171	150	117	87·72	68·42	♂?	dospělý	Rhachitická?
60	176	170·5	150	124	85·22	70·45	♀?	starší	Typ B
61	175	—	150	—	85·71	—	♀?	—	
62	165·5	—	150	—	90·64	—	♀?	dospělá	

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 32.

POZNÁMKY
K THEORII INTERPOLACE.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 5. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

1. Budiž

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

libovolná celistvá funkce stupně $n, x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ pak libovolné veličiny a utvořme podíl determinantů

$$(1) \qquad F_h(x_0, x_1, x_2, \ldots x_h) = \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 \ldots x_0^{h-1} & F(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{h-1} & F(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_h & x_h^2 \ldots x_h^{h-1} & F(x_h) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^h \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^h \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_h & x_h^2 \ldots x_h^h \end{vmatrix}.$$

Násobíme-li sloupce determinantu v čitateli po řadě čísly a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots$ a odečteme-li výsledky od sloupce posledního, zbude determinant

$$| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^{h-1}, a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-h} x_0^h |,$$

kde jsme se omezili na vyjádření prvního řádku. Odtud pak obdržíme

$$(2) \qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum_{\alpha=0}^{n-h} a_\alpha \frac{| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^{h-1}, x_0^{n-\alpha} |}{| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^h |}.$$

Jednotlivé členy posledního součtu jsou celistvé souměrné úkony veličin $x_0, x_1, x_2, \ldots x_h$, jak brzy ukážeme.

Rozvineme-li čitatele podlé prvků posledního sloupce a vyjádříme-li jmenovatele rozdílovým součinem, obdržíme po zkrácení

$$(3) \qquad \begin{cases} F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) \\ = \dfrac{F(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_h)} + \dfrac{F(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_h)} \\ + \quad \cdot \\ + \dfrac{F(x_h)}{(x_h - x_0)(x_h - x_1)\ldots(x_h - x_{h-1})}, \end{cases}$$

z čehož plyne jednoduchým výpočtem vztah

$$(4) \qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \frac{F_{h-1}(x_0, x_1, \ldots x_{h-1}) - F_{h-1}(x_h, x_1, \ldots x_{h-1})}{x_0 - x_h},$$

který sloužiti může k rekurrentnímu stanovení funkcí F_h. Máme tu postupně

$$F_1(x_0, x_1) = \frac{F(x_0) - F(x_1)}{x_0 - x_1}, \qquad F_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{F_1(x_0, x_1) - F_1(x_2, x_1)}{x_0 - x_2}, \ldots$$

Volímeli $\overline{F}(x) = x^n$, bude tu postupně

$$\overline{F_1}(x_0, x_1) = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 = n-1} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1}, \qquad \overline{F_2}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = n-2} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots$$

obecně

$$\overline{F_h}(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_h^{\alpha_h}; \quad \begin{pmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_h = 0, 1, 2, \ldots \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_h = n - h \end{pmatrix}$$

čili explicite vyjádřeno

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{h-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{h-1} & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_h & x_h^2 & \ldots & x_h^{h-1} & x_h^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^h \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_h & x_h^2 & \ldots & x_h^h \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_h = n-h)} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\alpha_h}.$$

Vzorec tento dlužno považovati za zobecnění elementarné rovnice

$$\frac{x_0^n - x_1^n}{x_0 - x_1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-2} x_1 + \ldots x_1^{n-1}.$$

Veličina (5) v pravo je patrně celistvá souměrná funkce veličin $x_0, x_1, \ldots x_h$, rozměru $n - h$, a totéž platí následovně o výrazu (2), který tedy lze psáti:

$$(2^*) \qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum_{(\alpha + \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_h = n-h)} a_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\alpha_h}.$$

2. Z rovnice (4) máme

$$F(x_0) = F(x_1) + (x_0 - x_1) F_1(x_0, x_1),$$
$$F_1(x_0, x_1) = F_1(x_1, x_2) + (x_0 - x_2) F_2(x_0, x_1, x_2),$$
$$\cdot \cdot \cdot \

Poslední člen $(x - x_1) \ldots (x - x_m) f_m(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = R_m$ se při interpolaci vynechává (poněvadž právě neznáme hodnotu funkce $f(x)$ pro libovolné místo) a zove se zbytkem interpolačním. Jedná se o sblížené udání chyby, jaké se dopustíme vynecháním zbytku R_m.

K tomu účelu užijeme následující *důležité věty.*

Utvořme funkce rozdílové

$$F(x), \quad \Delta F(x) = F(x) - F(x - \xi), \quad \Delta^2 F(x) = \Delta F(x) - \Delta F(x - \xi),$$
$$\ldots \Delta^k F(x) = \Delta^{k-1} F(x) - \Delta^{k-1} F(x - \xi), \ldots,$$

kde ξ je realná veličina kladná neb záporná. Pak zní míněná věta následovně: *Mizíli realná spojitá funkce realné proměnné* $F(x)$ *na* $n + 1$ *místech* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, *pak lze ustanoviti dosti malé* ξ *tak, aby též n-tá funkce rozdílová* $\Delta^n F(x)$ *zmizela na jednom místě uvnitř intervallu* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$.*)

Této věty užijme nyní při determinantu

$$\text{(A)} \qquad F(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^n & f(z) \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n & f(x_n) \end{vmatrix};$$

tento jest realnou funkcí proměnné z a mizí na $n + 1$ místech: $x, x_1, x_2, \ldots x_n$; musí tedy uvnitř intervallu omezeného největší a nejmenší z právě psaných veličin existovati hodnota z, pro niž $\Delta^n F(z) = 0$, t. j. pro niž

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n!\,\xi^n & \Delta^n f(z) \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n & f(x_n) \end{vmatrix} = 0;$$

řešením dle $\Delta^n f(z)$ plyne odtud rovnice

$$\text{(7a)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi^n},$$

čili dle (1):

$$\text{(7)} \qquad f_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi^n},$$

takže zbytek v řadě (6) zní

$$\text{(6a)} \qquad R_m = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) \frac{\Delta^m f(z)}{m!\,\xi^m}.$$

---

*) Najisto platí věta pro nekonečně malá ξ, jsouli derivace až ku n-té včetně konečny a spojity.

Vzorec (7) vyjádřen ve tvaru explicitním dle (3) přejde v následující

$$(8)\qquad \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{f(x_1)}{(x-x_1)\cdot(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \frac{f(x_2)}{(x-x_2)\cdot(x_2-x_1)\dots(x_2-x_n)} + \dots\dots\dots\dots + \frac{f(x_n)}{(x-x_n)\cdot(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots}\frac{}{(x_n-x_{n-1})} + \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi_n},$$

který není nic jiného než známý *interpolační vzorec Lagrangeův* s udáním zbytku.

Z toho plyne zároveň, že interpolace Newtonova a Lagrangeova jsou stejně přesny, majíce vždy týž zbytek; jsoutě v podstatě totožny a liší se pouze formalně.

Předpokládámeli, že funkce $f(z)$ a její prvých n derivac jsou spojity na mezeře $(x, x_1, x_2, \dots x_n)$, pak plyne z okolnosti, že determinant $F(z)$ mizí na n místech $x, x_1, \dots x_n$, že též n-tá derivace jeho zmizí na určitém místě z řečené mezery;*) z toho obdržíme podobně jako výše vzorec

$$(7')\qquad f_n(x, x_1, \dots x_n) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Zbytky Lagrangeova prokladu a též prokladu obecnějšího ustanovil na základě počtu integralního poprvé pan *Hermite*.**)

3. Lagrangeův vzorec interpolační byl zobecněn panem Hermitem na uvedeném místě, a po té způsobem elementarným bez udání zbytku panem F. Gomes Teixeirou.***) Neli k týmž, tož aspoň k analogickým vzorcům bychom dospěli následujícím způsobem. Utvořme determinant

$$(A')\qquad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \dots & z^n & f(z) \\ 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & nx_1^{n-1} & f'(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n & f(x_2) \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \dots & nx_2^{n-1} & f'(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = F(z),$$

---

*) Srovnej H. A. Schwarz, Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVII, 1882. Aneb: Gesammelte math. Abhandlungen, II. Bd. (Berlin, J. Springer, 1890) p. 307.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 84.

***) Mémoires de la Société royale de Sciences de Liège, 2. řada, X. sv. Courso de Analyse infinitesimal, I, 2. vyd., str. 256.

jenž vznikne z determinantu (A) tím, že se určitý počet řádků nahradí derivacemi prvými, druhými atd. řádků ostatních. Vyskytnou se takto v determinantu v posledním sloupci prvky $f(x_1), f'(x_1), \ldots f^{(\nu_1-1)}(x_1); f(x_2), f'(x_2), \ldots f^{(\nu_2-1)}(x_2); \ldots$ a součet indexů $\nu_1 + \nu_2 + \ldots$ bude roven n. Předpokládámeli, že derivace funkce $f(z)$ jsou v intervallu $(x, x_1, x_2 \ldots)$ spojité až po n-tou, pak je z determinantu patrno, že $F(z)$ mizí na $z = x$ jednoduše, na $z = x_1$ α_1-násobně, na $z = x_2$ α_2-násobně, atd., takže známe celkem $n+1$ míst nullových, z nichž některá se kupí v mnohonásobná. Z toho pak plyne, že $F^{(n)}(z)$ zmizí aspoň na jednom místě z uvažovaného intervallu, z čehož se obdrží rozvinutím n-té derivace determinantu (A′) rovnice:

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^{n-1} & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \ldots & (n-1)x_1^{n-2} & f'(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \ldots & nx_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!},$$

kterýžto vzorec právě obsahuje míněné zobecnění interpolace Lagrangeovy, takže zbývá pouze rozvinouti levou stranu, aby se obdržely hotové vzorce, což pro nedostatek času pomíjíme.

Uvedeme zde ještě poznámku, která nám přišla na mysl před pěti lety při studiu citované práce pana Hermitea. Týž uvádí ve svém pojednání vzorec, jejž lze takto psáti:

$$(10)\quad \begin{cases} F(x+h) - F(x) = \Phi_1(h)\, F'(x) + \Phi_2(h)\, F''(x) + \ldots + \Phi_k(h)\, F^{(k)}(x) \\ \qquad + \Phi_{k+1}(h)\, F'(x+h) + \Phi_{k+2}(h)\, F''(x+h) + \ldots \\ \qquad + \Phi_{2k}(h)\, F^{(k)}(x+h) + R_k, \end{cases}$$

kde $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{2k}$ jsou výrazy závislé pouze na h, nezávislé na povaze funkce $F(x)$, a zbytek R_k zmizí, klademeli za $F(x)$ polynóm stupně $2k$.

Jedná se o tvar funkcí Φ, které se obdrží specialisováním funkce F; volíme právě za F polynóm stupně $2k$, aby R_k odpadlo z rovnice. Znamenámeli $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$, máme rovnice

$$\left[\Delta F^{(\lambda)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\lambda} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\lambda)}(x)\right] + \sum_{\nu=k+1}^{2k} \frac{h^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!} F^{(\nu)}(x) = 0,$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots k).$$

Vyloučímeli z těchto rovnic veličiny $F^{(k+1)}, F^{(k+2)}, \ldots F^{(2k)}$, obdržíme

$$(10^a)\qquad \begin{vmatrix} \Delta F(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu)}(x), & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}, & \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}, \ldots & \frac{h^{2k}}{(2k)!} \\ \Delta F'(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+1)}(x), & \frac{h^k}{k!}, & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}, \ldots & \frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \Delta F''(x) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+2)}(x), & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}, & \frac{h^k}{k!}, & \ldots \frac{h^{2k-2}}{(2k-2)!} \\ \ldots\ldots\ldots\

kde symbol $D^\alpha h^\beta$ značí αtou derivaci funkce h^β, tedy

$$D^\alpha h^\beta = \beta(\beta - 1)\ldots(\beta - \alpha + 1)\, h^{\beta-\alpha},$$

a zvláště $D^0 h^\beta = h^\beta$.

Tento determinant se však obdrží z výrazu

$$C_k D_{x_1}{}^{k-1} D_{x_2}{}^{k-2} \ldots D_{x_k}{}^0 \begin{vmatrix} x_0{}^k & x_1{}^k & x_2{}^k & \ldots & x_k{}^k \\ x_0{}^{k+1} & x_1{}^{k+1} & x_2{}^{k+1} & \ldots & x_k{}^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0{}^{2k} & x_1{}^{2k} & x_2{}^{2k} & \ldots & x_k{}^{2k} \end{vmatrix}$$

substitucí $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = h$; klademeli tedy

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots x_k) = \begin{vmatrix} x_0{}^k & x_1{}^k & x_2{}^k & \ldots & x_k{}^k \\ x_0{}^{k+1} & x_1{}^{k+1} & x_2{}^{k+1} & \ldots & x_k{}^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0{}^{2k} & x_1{}^{2k} & x_2{}^{2k} & \ldots & x_k{}^{2k} \end{vmatrix}$$

$$= x_0{}^k x_1{}^k x_2{}^k \ldots x_k{}^k \prod_{\alpha > \beta = 0,1,2,\ldots k} (x_\alpha - x_\beta),$$

bude $\dfrac{\Delta_0}{1!\,2!\ldots(k-1)!}$ rovnati se součiniteli při $\xi_1{}^{k-1}\, \xi_2{}^{k-2} \ldots \xi_k{}^0$ v rozvinutém výrazu $C_k \Psi(x_0, h+\xi_1, h+\xi_2, \ldots h+\xi_k)$. Poněvadž ale

$$\Psi(x_0, h+\xi_1, h+\xi_2, \ldots h+\xi_k)$$
$$= x_0{}^k (h+\xi_1)^k (h+\xi_2)^k \ldots (h+\xi_k)^k \prod_{\alpha > \beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta) \prod_{\gamma} (\xi_\gamma + h - x_0),$$

$$\left(\begin{matrix}\alpha > \beta = 1, 2, 3, \ldots \\ \gamma = 1, 2, 3, \ldots\end{matrix}\right),$$

musí každý člen v rozvinutém výrazu této funkce obsahovati jakožto činitele jeden člen rozvinutého součinu $\Pi(\xi_\alpha - \xi_\beta)$, jenž jest rozměru $1+2+\ldots+k-1$. Tudíž náleží člen o součinu $\xi_1{}^{k-1}\, \xi_2{}^{k-2} \ldots \xi_k{}^0$ k členům stupně nejnižšího a obdrží se, když se tento člen ze součinu $\Pi_{\alpha < \beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta)$ s náležitým znamením vyjme a znásobí veličinou, již z ostatních činitelů obdržíme substitucí $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_k = 0$. Obdržíme tak

$$\frac{\Delta_0}{1!\,2!\ldots(k-1)!} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k\, x_0{}^k\, h^{k^2} (h - x_0)^k$$

čili

$$(11^*) \qquad \Delta_0 = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1!\,2!\ldots(k-1)!}{k!\,(k+1)!\ldots(2k)!}\, x_0{}^k\, h^{k^2} (h - x_0)^k.$$

Determinant Δ jest linearnou funkcí veličin a_α, jejíž členové přejdou v *různé* členy funkce Δ_0 substitucí $a_\alpha = \dfrac{x_0{}^{k+\alpha}}{(k+\alpha)!}$; z toho plyne, že determinant Δ

obdržíme, když v rozvinuté funkci (11*) nahradíme veličiny $x_0^{k+\alpha}$ veličinami $(k+\alpha)!\, a_\alpha$. Nacházíme takto vzorec

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & \frac{h}{1!} & \frac{h^2}{2!} & \cdots & \frac{h^k}{k!} \\ a_1 & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \cdots & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} & \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} & \cdots & \frac{h^{2k}}{(2k)!} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1!\,2!\ldots(k-1)!}{k!\,(k+1)!\ldots(2k)!}\, h^{k^2} \sum_{\sigma=0}^{k} (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (k+\sigma)!\, a_\sigma\, h^{k-\sigma}\,.$$

Hodnota determinantu (10ª) se obdrží, klademeli zde

$$a_{k-\alpha} = \Delta F^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\alpha} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\alpha)}(x)\,,$$

takže rovnice (10ª) zní

$$\sum_{\sigma=0}^{k} (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2k-\sigma)!\, h^\sigma \left[\Delta F^{(\sigma)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\sigma} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\sigma)}(x)\right] = 0\,,$$

z čehož následuje porovnáním s (10)

$$\Phi_{k+\sigma} = (-1)^{\sigma+1} \binom{k}{\sigma} \frac{(2k-\sigma)!}{(2k)!}\, h^\sigma\,,$$

$$\Phi_\sigma = \frac{h^\sigma}{(2k)!} (-1)^\sigma \sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \frac{(2k-\sigma+\nu)!}{\nu!}\,.$$

Klademeli ve vzorci (10) $x+h'$ za x, $-h'$ za h, vznikne

$$F(x+h') - F(x) = -\sum \Phi_\alpha(-h')\, F'(x+h') - \sum \Phi_{\alpha+k}(-h')\, F'(x)\,,$$

z čehož plyne $\Phi_\alpha(h) = -\Phi_{k+\alpha}(-h)$, $\Phi_{k+\alpha}(h) = -\Phi_\alpha(-h)$, a tedy máme dosazením do posledních výsledků jednak

$$(10^b)\qquad \Phi_\sigma(h) = \binom{k}{\sigma} \frac{(2k-\sigma)!}{(2k)!}\, h^\sigma\,, \qquad \Phi_{k+\sigma}(h) = (-1)^{\sigma+1}\, \Phi_\sigma(h)\,,$$

jednak ale obdržíme též následující vzorec arithmetický:

$$\sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \frac{(2k-\sigma+\nu)!}{\nu!} = (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2k-\sigma)!$$

čili elegantněji vyjádřeno:

$$(13)\qquad \sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \binom{2k-\sigma}{\nu} = (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}\,.$$

Vzorec ten lze též vyjádřiti větou, že *součinitel při x^σ v rozvinuté a spořádané funkci*

$$(1+x)^k (1-x)^{2k-\sigma}$$

má hodnotu $(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}$.

Vyjádříme-li součinitele tohoto integrálem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} (1+x)^k (1-x)^{2k-\sigma} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma},$$

obdržíme substitucí $x = e^{2i\varphi}$ vzorec

$$(13^a) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^k \varphi \, \sin^{2k-\sigma} \varphi \, e^{3(k-\sigma)i\varphi} \, d\varphi = (-1)^{k+\sigma} i^{-\sigma} \binom{k}{\sigma} 2^{2\sigma-3k}.$$

4. Pan Ivar Bendixson ve své zajímavé práci Extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss*) užil identity

$$(\alpha) \quad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_0} + \frac{x-a_0}{(z-a_0)(z-a_1)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)} + \dots$$
$$+ \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)(z-x)}$$

následujícím způsobem: Značili $f(z)$ funkci mající uvnitř jistého oboru (S) omezeného čarou S povahu funkce celistvé, a neležíli na čáře S žádný z bodů $a_0 \dots a_n$, x, kde aspoň x leží uvnitř oboru (S), pak násobme poslední identitu $f(z)\,dz$ a integrujme podél S; tím obdržíme rovnici

$$(14) \qquad f(z) = A_0 + A_1 (x-a_0) + A_2 (x-a_0)(x-a_1) + \dots$$
$$+ A_n (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1}) + R_n,$$

kde

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_\nu)},$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)} \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

snadno ukážeme, že vzorec (14) splývá se vzorcem Newtonovým (6), *jestliže všecka místa* $a_0, a_1, \dots a_n, x$ leží uvnitř (S). Neboť za této podmínky integrály A_ν, R_n jsou spojité funkce veličin $a_0, a_1, \dots a_n, x$, které se mohou uvnitř (S) libovolně pohybovati. Poněvadž ale

$$A_\nu (a_0, a_1, \dots a_\nu) - A_\nu (a_{\nu+1}, a_1, \dots a_\nu)$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)\,dz \,.\, (a_0 - a_{\nu+1})}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_\nu)(z-a_{\nu+1})},$$

*) Acta mathematica, sv. 9.

máme

$$\frac{A_\nu(a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu) - A_\nu(a_{\nu+1}, a_1, a_2, \ldots a_\nu)}{a_0 - a_{\nu+1}} = A_{\nu+1};$$

kromě toho jest $A_0(a_0) = f(a_0)$, a odtud soudíme, že bude

$$A_\nu(a_0, a_1, \ldots a_\nu) = f_\nu(a_0, a_1, \ldots a_\nu).$$

Vzorec interpolační (6) resp. (14) redukuje funkci $f(x)$ na funkci celistvou; můžeme ale též utvořiti obecnější vzorec interpolační, kde se interpolovaná funkce nahradí výrazem racionalným lomeným. Tento obecnější vzorec interpolační bude generalisovati theorém Laurentův právě tak jako vzorec (6) zobecňuje větu Taylorovu.

Mějme v rovině věnec (S) omezený dvěma uzavřenýma čarama, vnitřní S_0 a vnější S_1; $f(z)$ buď jednoznačná funkce mající na (S) povahu funkce celistvé a znamenejtež $b_1, b_2, b_3, \ldots$ místa položená mimo (S), jinak libovolná, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pak body zcela libovolné, z nichž žádný neleží na čáře S_1. Tu pak bude

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{f(z)\,dz}{z - x},$$

kde integrál je vzat v kladném směru po okraji oboru (S) a tedy sestává ze dvou částí:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{f(z)\,dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_0} \frac{f(z)\,dz}{z - x}.$$

V prvém integrálu nahraďme $\frac{1}{z - x}$ výrazem (α), v němž pišme $a_1\, a_2 \ldots$ místo $a_0\, a_1 \ldots$, v druhém pak užijme vzorce

$$(\beta)\quad \frac{1}{x - z} = \frac{1}{x - b_1} + \frac{z - b_1}{(x - b_1)(x - b_2)} + \frac{(z - b_1)(z - b_2)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)} + \ldots$$

$$+ \frac{(z - b_1)(z - b_2)\ldots(z - b_{m-1})}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)} + \frac{(z - b_1)(z - b_2)\ldots(z - b_m)}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)(x - z)},$$

i obdržíme tak hledaný vzorec interpolační

$$(15)\quad f(x) = A_0 + A_1(x - a_1) + A_2(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_n(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

$$+ \frac{B_1}{x - b_1} + \frac{B_2}{(x - b_1)(x - b_2)} + \ldots + \frac{B_m}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)} + R_{m,n},$$

kde položeno

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{f(z)\,dz}{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_{\nu+1})},$$

$$B_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_0} (z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_{\nu-1})f(z)\,dz\,,$$

$$R_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1} \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+1})}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n+1})}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{S_0} \frac{(z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}\frac{f(z)\,dz}{x-z}\,.$$

Máli $f(z)$ povahu funkce celistvé také uvnitř čáry S_0, zmizí patrně všecka B, takže vzorce (15) lze s výhodou užiti pouze při funkcích, jež mají uvnitř S_0 místa zvláštní. Jestliže dále funkce $f(z)$ má sice uvnitř S_0 místa zvláštní, ale máli ve všech bodech zevně S_0 (a jeli konečná pro $z=\infty$) povahu funkce celistvé, bude patrně $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$, takže celistvá část pravé strany se redukuje na konstantu. Nejdůležitější částí interpolačního problému jest ovšem vhodná volba veličin a, b, tak aby zbytek $R_{m,n}$ byl co možná malý.

Leží na snadě, jak třeba voliti veličiny a, b v počtu nekonečném, tak aby ve vzorci (15) bylo $\lim_{m=\infty,\,n=\infty} R_{m,n} = 0$, t. j. abychom obdrželi pro $f(x)$ nekonečnou řadu, která právě zobecňuje větu Laurentovu; tím není ovšem řečeno, že by úkol ten byl vždy možným. Ukážeme to na příkladě, kde

$$a_1 = v\,, \quad a_2 = qv\,, \quad a_3 = q^2 v\,, \quad \ldots a_n = q^{n-1}v\,, \ldots$$
$$b_1 = q^{-1}v\,, \quad b_2 = q^{-2}v\,, \quad b_3 = q^{-3}v\,, \quad \ldots b_n = q^{-n}v\,,$$

při čemž q značí komplexní veličinu absolutně menší jedné.

Za čáry S_0, S_1 volme kružnice $|z| = r_0$, $|z| = r_1$ $(r_0 < r_1)$; podmínka, aby body $b_\nu = q^{-\nu}v$ ležely mimo mezikruží, vyžaduje $|q^{-1}v| > r_1$, tedy $|v| > |qr_1|$. Volímeli kromě toho $|v| < r_1$, pak také žádný z bodů a neleží na kružnici S_1. Zbytek $R_{m,n}$ zní v našem případě

$$R_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_1} \prod_{\alpha=0}^{n} \frac{1-q^\alpha\frac{v}{x}}{1-q^\alpha\frac{v}{\zeta}}\cdot\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_0} \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{1-q^\alpha\frac{\zeta}{v}}{1-q^\alpha\frac{x}{v}}\frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

a tedy přejde pro $m=\infty$, $n=\infty$ ve tvar

$$R_\infty = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_0}\left(\prod_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1-q^\alpha\frac{\zeta}{v}}{1-q^\alpha\frac{x}{v}}\right)\frac{f(z)\,dz}{z-x}\,.$$

Následkem toho máme vztah:

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_0}\left(\prod_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1-q^{\alpha}\frac{\zeta}{v}}{1-q^{\alpha}\frac{x}{v}}\right)\frac{f(z)\,dz}{z-x}=-f(x)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,.\,(x-q^{\alpha-1}v)_{\alpha=1}^{n}\,,$$

kde jsme po příkladu Schendelově*) užili označení

$$(x-q^{\alpha-1}v)_{\alpha=1}^{n}=(x-v)\,(x-qv)\,(x-q^2v)\ldots(x-q^{n-1}v)\,,$$

$$(x-q^{\alpha-1}v)_{\alpha=1}^{-n}=\frac{1}{(x-q^{-\alpha}v)_{\alpha=1}^{n}}=\frac{1}{(x-q^{-1}v)\,(x-q^{-2}v)\ldots(x-q^{-n}v)}\,,$$

a pak zcela obecně

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_1}\frac{f(z)\,dz}{(x-q^{\alpha-1}v)_{\alpha=1}^{n+1}}\,.$$

Vzorec (16) zde nastupuje na místo theorému Laurentova, který zde tedy nemá analogie v pravém slova smyslu, poněvadž integrál (16) nedovedeme obecně vyčísliti. Volme jakožto příklad

$$f(z)=\log\frac{z+r}{z-r}\,;$$

tato funkce jest jednoznačna v komplexní rovině (z) opatřené řezem $(-r\ldots r)$; pomyslná část její jest na severním břehu o $-2\pi i$ větší, než na jižním. Volíme pak $r_0=r+\delta$, a v integrálu (16) možno nahraditi cestu integrační čarou, jež obíhá řez $(-r\ldots r)$ a těsně k němu přiléhá. Obdržíme tak jakožto hodnotu levé strany (16) v našem případě výraz

$$\int_{-r}^{r}\left(\prod_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1-q^{\alpha}\frac{\zeta}{v}}{1-q^{\alpha}\frac{x}{v}}\right)\frac{dz}{z-x}\,;$$

znamenámeli tedy k vůli přehledu

$$\prod_{\alpha=1}^{\infty}(1-q^{\alpha}\xi)=P(\xi,q)\,,$$

máme z (16), uvážímeli, že zde $A_0=A_1=A_2=\ldots=0$, vztah

$$(17)\qquad \frac{1}{P(\frac{x}{v},q)}\int_{-r}^{r}P(\tfrac{\zeta}{v},q)\,\frac{dz}{z-x}=\log\frac{x-r}{x+r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(x-q^{-\alpha}v)_{\alpha=1}^{n}}\,,$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik sv. 84. Srovnej též naši studii o Schendelově zobecnění mocninových řad. (Věstník Č. Ak. čís. 3.)

kde

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int (z - q^{-\alpha} v)_{\alpha=1}^{n-1} \log \frac{z+r}{z-r} \, dz$$

čili

$$C_n = \int_{-r}^{r} \prod_{\alpha=1}^{n-1} (z - q^{-\alpha} v) \, . \, dz \,, \tag{17a}$$

a sice vztah dokázaný za podmínek $r < |x| < |\frac{v}{q}|$.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 33.

O HLAVNÍ VĚTĚ
THEORIE
FUNKCÍ VYTVOŘUJÍCÍCH.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 25. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J Otty v Praze.

Některé úkoly počtu integralního dají se pohodlně řešiti pomocí t. zv. funkcí vytvořujících (fonction génératrice), jež zavedl *Abel*; nazývá se tak funkce $f(x)$ hovící rovnici

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx = \varphi(a)\,;$$

užívání této methody však vyžaduje důkaz věty, že za jistých okolností »určující« funkci $\varphi(a)$ přísluší jediná funkce vytvořující $f(x)$. Provésti tento důkaz jest účelem následující úvahy; v odstavci I. předeslána věta z nauky o funkcích realné proměnné, kterou jiným způsobem dokázal p. *Weierstrass* ve spisech Berlínské akademie a současně p. *Runge* ve svých universitních přednáškách r. 1885, z nichž podán stručný výtah v časopise Acta mathematica, sv. 7.

Tuto methodu vytvořujících funkcí měli jsme na mysli při poznámce pod čarou, již jsme učinili při své práci Mittheilungen aus der Integralrechnung.*)

I. Budiž $f(x)$ libovolná konečná a spojitá funkce realné proměnné x, obsažené v určité mezeře $(a \ldots b)$; pak lze sestrojiti řadu celistvých funkcí racionalných

$$R_1(x), R_2(x), R_3(x), \ldots R_n(x), \ldots$$

které v celém intervallu $(a \ldots b)$ stejnoměrně s rostoucím n hodnotě $f(x)$ se blíží, t. j. výraz

$$\lim_{n=\infty} R_n(x)$$

konverguje stejnoměrně a rovná se $f(x)$.

Důkaz. Volme klesající řadu kladných konstant

$$(1) \qquad \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n > \ldots; \qquad \lim \delta_n = 0\,.$$

Intervall $(a \ldots b)$ rozdělme na r dílů rovných, a nazveme A_s bod, jehož souřadnice jsou

$$x = a + \frac{s(b-a)}{r}, \qquad y = f\left(a + s\frac{b-a}{r}\right).$$

---

*) Monatshefte für Mathematik und Physik, I. roč.

Tím obdržíme na křivce $y = f(x)$ znázorňující průběh naší funkce $r + 1$ bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots A_r$. Lomená čára $A_0 A_1 A_2 \ldots A_r$ (složená z přímých délek $A_s A_{s+1}$) bude se celkem málo lišiti od čáry $y = f(x)$, jeli r dosti veliké, t. j. rozdíl mezi funkcí $f(x)$ a mezi funkcí $\varphi(x)$ znázorněnou touto čarou bude veskrz menší než daná veličina. Kterémukoli číslu n z řady $1, 2, 3, \ldots$ můžeme pak ustanoviti číslo $r = m_n$ tak, aby tímto způsobem vzniklá funkce $\varphi(x)$ — již znamenáme nyní $\varphi_n(x)$ — lišila se od $f(x)$ o veličinu menší než $\frac{1}{3}\delta_n$, t. j. aby v celém intervallu $(a \ldots b)$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \tfrac{1}{3}\delta_n .$$

Zároveň ale znamenáme m_n nejmenší z hodnot r, pro něž tento případ nastane.

Intervall $(a \ldots b)$ rozšiřme po obou stranách o délku ε, t. j. uvažujme nadále intervall $(a - \varepsilon \ldots b + \varepsilon)$. V částech $(a - \varepsilon \ldots a)$, $(b \ldots b + \varepsilon)$ nově připojených funkce $\varphi_n(x)$ není ještě definována. Volme tedy v první části $\varphi_n(x) = \varphi_n(a)$, v druhé $\varphi_n(x) = \varphi_n(b)$. Pak bude $\varphi_n(x)$ funkcí konečnou a spojitou v celém intervallu $(a - \varepsilon \ldots b + \varepsilon)$, jež je znázorněna lomenou čarou. Dá se tedy tato funkce dle známých vlastností funkcí Dirichletovských vyjádřiti řadou

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi ,$$

která konverguje stejnoměrně v oboru $(a \ldots b)$. Následkem stejnoměrnosti konvergence naší řady můžeme ustanoviti číslo*) m'_n tak, aby součet

$$\sum_{\nu=m'_n}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi$$

v celém oboru $(a \ldots b)$ byl absolutně menší než $\frac{\delta_n}{3}$, takže pak rozdíl mezi $\varphi_n(x)$ a funkcí analytickou

$$\psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m'_n - 1} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi$$

bude menší než $\frac{\delta_n}{3}$ a tedy pro všecka x mezery $(a \ldots b)$

$$|f(x) - \psi_n(x)| < \tfrac{2}{3}\delta_n .$$

Funkci $\psi_n(x)$ lze pak rozvinouti dle pravidla Taylorova v řadu stále konvergentní:

$$\psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{(n)} x^\nu ,$$

---

*) A sice volíme za m'_n opět nejmenší číslo hovící naší podmínce.

která tedy rovněž konverguje stejnoměrně v mezeře $(a \ldots b)$. Znamenejme nyní m''_n nejmenší číslo té vlastnosti, že zbytek

$$\sum_{\nu=m''_n}^{\infty} b_\nu^{(n)} x^\nu$$

je v celém intervallu $(a \ldots b)$ menší než $\frac{\delta_n}{3}$, a položme

$$R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m''_n - 1} b_\nu^{(n)} x^\nu \,. \tag{2}$$

Pak bude

$$|\psi_n(x) - R_n(x)| < \frac{\delta_n}{3} \,,$$

a tedy

$$|f(x) - R_n(x)| < \delta_n \,.$$

Volímeli po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, sestrojíme tím způsobem zákonitou řadu funkcí tvaru (2)

$$R_1(x), R_2(x), R_3(x), \ldots \tag{2'}$$

a jež mají tu vlastnosť, že $R_n(x)$ se od $f(x)$ liší o veličinu menší než je n-tý člen řady (1), t. j. δ_n. Tím je věta dokázána.

II. Buď nyní $f(x)$ funkce konečná a spojitá, daná v celém intervallu $(0 \ldots \infty)$ a nechť existuje pro všecka a, převyšující jistou mez, integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx = \varphi(a) \,. \tag{3}$$

Pak sluje dle *Abel*-a $f(x)$ funkcí *vytvořující* (fonction génératrice) úkon $\varphi(a)$, kdežto $\varphi(a)$ sluje funkcí *určující* (fonction déterminante) úkon $f(x)$.

Že k dané funkci vytvořující existuje jediná určující, je patrno. Platí však též důležitá věta:

Dané funkci určující $\varphi(a)$ *může odpovídati nanejvýš jedna funkce* $f(x)$, *která ji vytvořuje.*

Kdyby totiž existovala ještě funkce $f_1(x)$ hovící rovnici (3), t. j.

$$\int_0^\infty e^{-ax} f_1(x)\, dx = \varphi(a) \,,$$

pak bychom obdrželi odečtením obou rovnic

$$\int_0^\infty e^{-ax} [f(x) - f_1(x)]\, dx = 0 \,.$$

Avšak

$$f(x) - f_1(x) = f_2(x)$$

je konečná a spojitá funkce v oboru $(0 \ldots \infty)$, a my dokážeme, že pro takovou nemůže integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax} f_2(x)\, dx$$

pro všecka a zmizeti. Zavedemeli proměnnou $z = e^{-x}$, přejde integrál v následující

$$J_a = \int_0^1 z^{a-1} f_2\left(l \tfrac{1}{z}\right) dz\,,$$

o němž se má dokázati, že nemizí pro všecka a převyšující jistou mez. Funkce $f_2\left(l \frac{1}{z}\right) = \psi(z)$ je spojitou ve všech bodech mezery $(0 \ldots 1)$, nanejvýše bude bod $z = 0$ činiti výminku. Bude nám tedy dokázati nemožnosť rovnice

$$J_a = \int_0^1 x^{a-1} \psi(x)\, dx = 0 \tag{4}$$

předpokládané pro všecka a převyšující jistou mez. *Omezíme se dokázati větu pouze pro ten případ, že existuje veličina c, pro niž*

$$\lim_{x=0} x^c \psi(x) = 0\,. \tag{5}$$

Volímeli pak $x^c \psi(x) = \chi(x)$, a zaměnímeli a za $a + c$, přejde (4) v

$$J'_a = \int_0^1 x^{a-1} \chi(x)\, dx\,, \tag{4'}$$

kde funkce $\chi(x)$ je spojitou v celém oboru $(0 \ldots 1)$.

Pak existuje celistvá funkce

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu x^\nu\,,$$

která se od $\chi(x)$ liší o veličinu, jež v celém oboru $(0 \ldots 1)$ je menší než předepsaná veličina δ, t. j. bude

$$|\chi(x) - R(x)| < \delta\,.$$

Ze vzorce (4') plyne, ano $a + \nu > a$,

$$J'_{a+\nu} = \int_0^1 x^{a+\nu-1} \chi(x)\, dx = 0$$

a tedy

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu J'_{a+\nu} = \int_0^1 x^{a-1} \chi(x) R(x) dx = 0$$

t. j.

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) dx + \int_0^1 x^{a-1} \chi(x) \left[R(x) - \chi(x)\right] = 0$$

a odtud dle poslední nerovnosti:

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) dx < \delta \int_0^1 x^{a-1} |\chi(x)| dx .$$

Integrál na pravé straně nezávisí na volbě funkce $R(x)$, t. j. na δ, a tedy plyne odtud, že integrál

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) dx$$

je menší než libovolná veličina kladná, což vyžaduje, aby zmizel. Ano $\chi^2(x)$ je funkce kladná, musí býti nullou, t. j. $\chi(x) = 0$. Odtud plyne, že též funkce $\psi(x)$ t. j. $f_2(l\frac{1}{x})$ je identicky nullou a věta dokázána.

Pozn. Dlužno podotčíti, že supposice (5) obmezuje všeobecnou platnosť naší věty do jisté míry. Žádajíc, aby $\lim x^c \psi(z) = 0$, t. j. aby $\lim_{x=\infty} e^{-cx} f_2(x) = 0$, dovolila podmínka ta provésti důkaz pouze pro ony funkce $f(x)$, $f_1(x)$, jichž rozdíl se stane zároveň s x nanejvýš tak nekonečným, jako jistá funkce exponencialní.

Obdržímeli tedy někdy vztah

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-ax} f_1(x) dx$$

platný pro všecka a dostatečně veliká, budeme jen tehdy moci souditi na rovnosť

$$f(x) = f_1(x) ,$$

jeli lze určiti kladnou veličinu c tak, aby

$$\lim_{x=\infty} e^{-cx} \left(f(x) - f_1(x)\right) = 0 .$$

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 35.

THEORETICKÉ A EXPERIMENTÁLNÍ PŘÍSPĚVKY

K NAUCE O STROJÍCH ELEKTRICKYCH

NA PROUDY STŘÍDAVÉ.

PÍŠE

Dr. K. DOMALÍP.

PŘEDLOŽENO DNE 29. DUBNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Ve vývinu strojů elektrických lze hlavně tři charakteristické doby rozeznávati. — V první době sestrojovány byly stroje s větší působností, po většině stroje na proudy střídavé, se snahou pomocí commutatorů učiniti z nich stroje na proudy stejnosměrné, jelikož stroje na proudy střídavé jen obmezené působení jevily. Účinky, které na směru proudu jsou závisly, jako účinky chemické, nebylo možno jimi docíliti. Commutatory tyto při větších strojích byly dosti složité, čímž i působnost strojů valně trpěla. Zavedením Pacinottiho collectoru Grammem závada tato odstraněna a tím konstrukce strojů elektrických nastupuje druhou dobu, ve které stroje na proudy stejnosměrné vysoké dokonalosti dostoupily. V této době stroje na proudy střídavé za příčinou jich omezeného upotřebení do pozadí zatlačeny byly. V novější pak době otázka přenášení energie do velké vzdálenosti stroje na proudy střídavé opět k platnosti přivedla, ano zdá se, že i první místo při technickém upotřebení zaujmou. Tím zahájila se třetí doba. V této době nejen theoretické prozkoumání, ale i stavba těchto strojů dostoupila na takový stupeň dokonalosti, že se stroji elektrickými na proudy stejnosměrné se na stejném stupni nacházejí, co pak se týče jich vhodnosti při upotřebení, je daleko předčí. Vzhledem na tuto důležitost technickou a i theoretickou, kterou tyto stroje v nynější době vynikají, hodlám v následujících statích o zjevech elektrických na těchto strojích jak se stanoviska theoretického tak i se stanoviska experimentálního na základě pokusů vlastních soustavně pojednati.

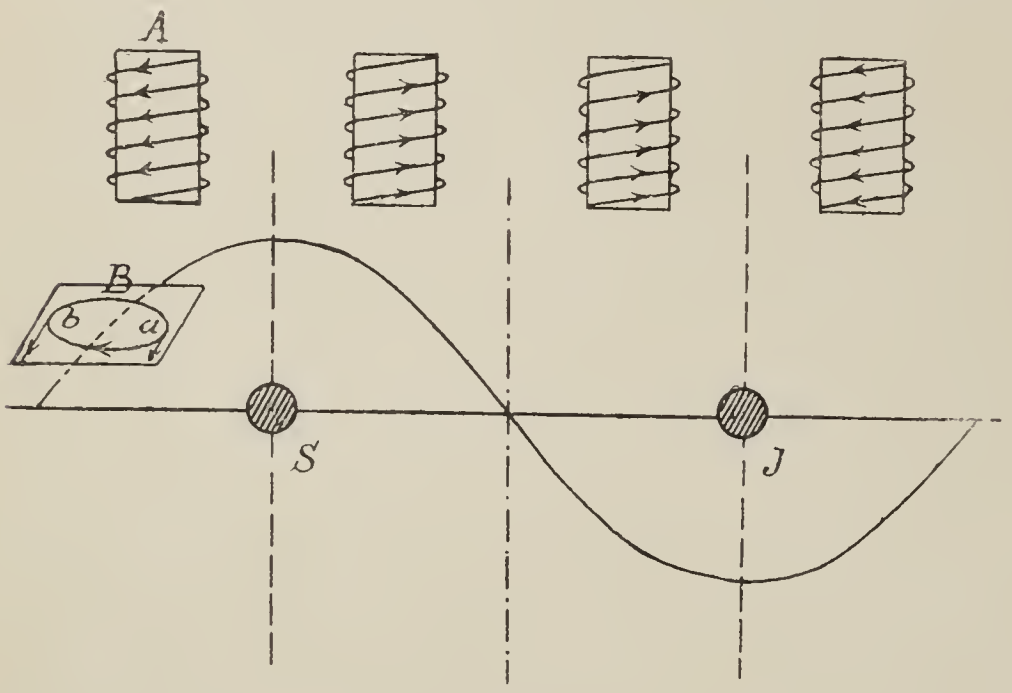
Prve však než k rozboru působnosti strojů těchto přikročíme, dovolím si v následujícím podati nový rozvrh strojů elektrických vůbec.

Obyčejně dělí se stroje elektrické dle různých vnějších známek, na příklad dle vinutí na induktoru aneb dle jich působení a t. d. Do takového roztřídění však nelze pojmouti všechny stroje, některé pak zaujímají své postavení výlučné. V následujícím podávám roztřídění strojů dle způsobu, jakým síla elektromotorická v různých strojích pohybem induktoru v poli magnetickém vzniká. Roztřídíme-li stroje elektrické dle této známky vnitřní, lze všechny dosud známé stroje zařaditi do určitého řádu. — Stroje pak do určitého řádu spadající mají společné vlastnosti.

Jak známo, vzniká síla elektromotorická pohybem uzavřeného vodiče v poli magnetickém, neb užijeme-li obvyklého způsobu mluvy — protínáním silokřivek magnetických — ať již protínání toto děje se tím, že induktor se

pohybuje a magnetické pole jest v klidu, neb obráceně, pohybuje-li se pole magnetické a induktor jest v klidu. Dle toho, jakým způsobem silokřivky se protínají, lze roztříditi stroje na tři zvláštní řády.

Ve strojích elektrických pohybuje se induktor neb po případě pole magnetické v kruhu. Magnetické poly jsou v kruhu rozestaveny, podobně i cívky indukční, a protínání silokřivek děje se pohybem otáčivým. Ku snadnějšímu seznání působení stroje přeměníme si pohyb otáčivý v pohyb postupný. V obrazci 1. značí *S J* střídavě nastupující poly magnetické severní a jižní polarity, křivka pak sinusová značí intensitu pole magnetického na různých místech. Do prvního řádu lze počítati všechny stroje, v nichž poloha cívky a prvku proudového zobrazena jest v obr. 1. (*A*, *B*). Uvedeme-li si na mysl průběh silokřivek mezi dvěma poly opačné polarity, lze pohyb prvku proudového, který ve stroji se děje v kruhu,



Obr. 1

v našem schematu však pohybem postupným od levé ruky ku pravé, takto stanoviti: Rovina tímto prvkem proudovým položená, pohybujíc se ve směru naznačeném, protíná svou hranou silokřivky pole magnetického. Ku stanovení výslední síly elektromotorické, co směru síly této se týče, užijeme pravidla Pfaundlerova. Díváme-li se ve směru pohybu lineárného prvku a otočíme prvek ten směrem ručky na hodinách do polohy silokřivky, kterou právě prvek tento protíná, tu ve směru, kterým se dostaneme ku severnímu polu magnetu, vzniká síla elektromotorická.

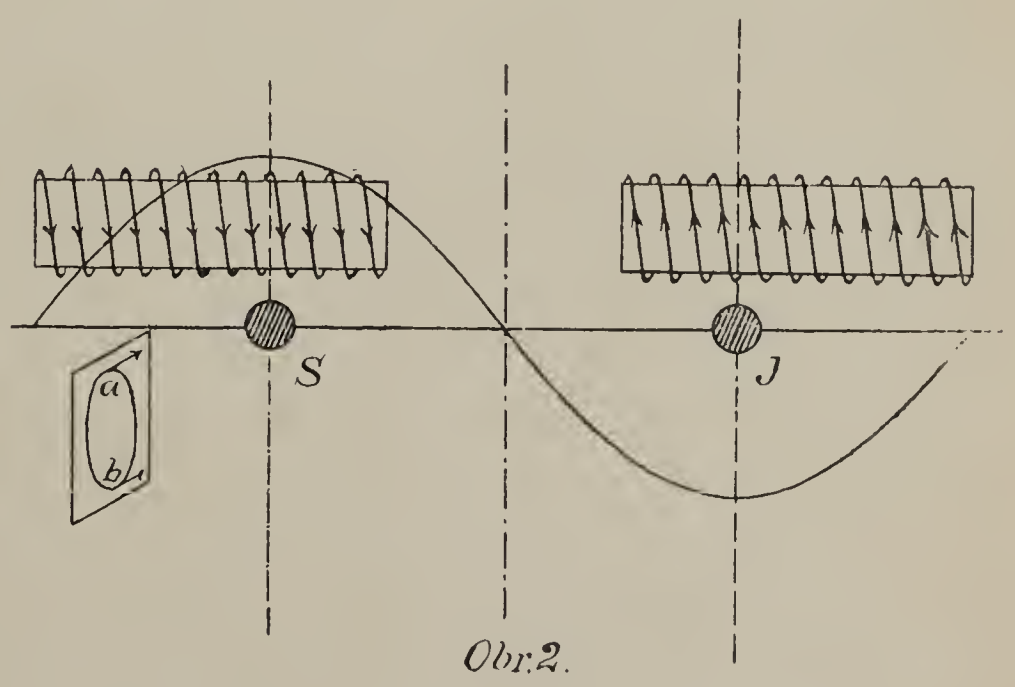
Ku stanovení pouhého směru síly elektromotorické v prvku proudovém *B* dostačí, stanovíme-li směr a velikosť síly této v bodech (*a*, *b*), tedy v tečnách v těchto bodech ku kruhovému proudu vedených. Dle svrchu uvedeného pravidla bude směr síly elektrické v obou případech označen šipkami, jak v obrazci naznačeno.

Síly tyto v prvku proudovém *B* působí v opačném smyslu, jelikož však *a* pohybuje se v intensivnějším poli magnetickém než *b,* bude i síla elektromotorická quantitativně větší, a výslední síla elektromotorická bude směřovati ve směru šipkou v prvku kruhovém označeném. Dle pravidla Pfaundlerova seznáme, že směr sil elektromotorických v *a* a *b* zůstane nezměněn, pokud *a* i *b* se pohybují v severní části pole magnetického, pokud se pohybují mezi body indifferentními, jakmile však *a* neb *b* tuto čáru indifferentní překročí, nastane obrat směru síly elektromotorické v těchto bodech. Výslední pak směr síly elektromotorické v kruhovém prvku *B* závislý bude tedy na tom, v jak silném poli magnetickém tyto body se pohybují. Výslední směr v kruhovém prvku

řídí se dle směru síly elektromotorické bodu, který se nachází v intensivnějším poli magnetickém. Nad poly magnetickými, kde prvek proudový kolem polu symetricky jest rozdělen, bude síla elektromotorická rovnati se nulle. Při dalším pohybu prvku proudového od polu *S* ku čáře indifferentní bude převládati směr prvku *b*, jelikož v intensivnějším poli magnetickém se pohybuje; za čarou indifferentní v negativném poli pak převládá opět z téhož důvodu směr prvku v *a*, jelikož ale směr ten jest opačný směru, když *a* v positivném poli magnetickém se nacházelo, bude v kruhovém prvku *B* síla elektromotorická výslední nezměněným směrem působiti v celé délce mezi poly *S* a *J*. Nad polem *J* opět síla elektromotorická rovnati se bude nulle, a za tímto polem vznikne opět síla elektromotorická v opačném smyslu, nastane tedy obrat proudu indukovaného. Z předcházejícího rozboru jde tedy na jevo, že kdykoliv cívky překročí poly magnetické, nastává vždy obrat proudu indukovaného. Chceme-li pak proudy tyto střídavého směru usměrniti, třeba položiti commutator s přerušující (isolující) vložkou do polohy axiální. —

Do tohoto prvního řádu strojů elektrických přísluší všechny stroje, které před Pacinottim (Grammem) objeveny byly a i velká řada strojů novějších na proudy střídavé. Stroje tyto mají společnou úpravu commutatoru, stejné uspořádání pole magnetického, a stejné vinutí na cívkách. Pravidla pro úpravu commutatoru pro uspořádání magnetu a vinutí cívek plynou z předcházejícího rozboru, a nelze mi na tomto místě jednotlivě o nich pojednati, jen připomínám zde toliko co charakteristickou známku strojů do tohoto řádu patřících: je-li magnetické pole utvořeno ze dvou řad magnetů, musí nejen magnety vedle sebe ležící míti opačnou polaritu, ale i magnety naproti sobě postaveny. Cívky pak, je-li jich počet týž co počet magnetů na jedné straně, střídavě opačně vinuty, jestli všecky cívky v jeden celek jsou spojeny.

Do druhého řádu lze počítati všechny stroje, v nichž poloha cívky neb prvku kruhového zobrazena jest obrazcem 2. Pohyb prvku kruhového v magnetickém poli lze tím způsobem stanoviti, že rovina kruhovým prvkem tímto položena, svou plochou silokřivky magnetického pole protíná. Užijeme-li opětně pravidla Pfaundlerova ku stanovení směru sil elektrických v bodech *a, b,* seznáme, že síly tyto směřují směrem šipkami v tečnách v bodech *a*, *b* sestrojených. Směry sil těchto v prvku kruhovém mají opačný směr a výslední směr opět bude tu směr bodu *a,* jelikož bod tento pohybuje se v intensivnějším poli magnetickém. Jelikož bod tento stále v intensivnějším poli magnetickém se

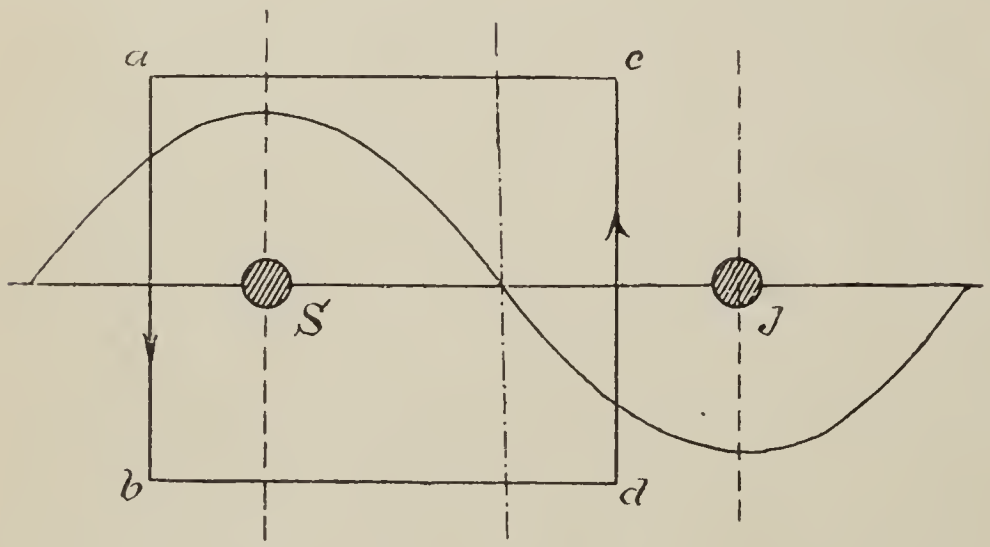


Obr. 2.

pohybuje, rozhoduje směr síly elektromotorické v a o směru indukovaného proudu v prvku kruhovém. Pokud se prvek tento pohybuje v severní části pole magnetického od jedné čáry indifferentní ke druhé, nemění se směr síly a tím také se nezmění směr indukovaného proudu. Jakmile však prvek kruhový projde indifferentní polohou, zamění se také směr síly v a a tím obrátí se také směr proudu indukovaného.

Z tohoto rozboru jest patrno, že nastává obrat proudu v prvku kruhovém, kdykoli překročí čáru indifferentní neb jinak také polohu aequatoriální zvanou, a tím právě liší se podstatně stroje do tohoto druhého řádu patřící od strojů prvého řádu, kdež obrat proudu nastal přechodem tak zvané polohy axiální. Chceme-li proudy tyto střídavé usměrniti, třeba položiti commutator s přerušovací deskou (isolující) do polohy aequatoriální. Do tohoto druhého řádu patří stroje Pacinottiho, Gramma a jiných, tak zvané stroje prstenové a mnohé stroje na proudy střídavé novější doby.

Do třetího řádu lze počítati stroje, v nichž poloha uzavřeného prvku proudového zobrazena jest v obrazci 3. Prvek proudový objímá v případě tomto celé pole magnetické. Pohybuje-li se jedna část $a\,b$ v severní části pole magnetického, pohybuje se druhá část $c\,d$ opět v jižní části pole magnetického. Dle pravidla Pfaundlerova vznikne indukce směrem šipkami v obrazci naznačenými. Směry těchto proudů v tomto případě v uzavřeném vodiči se sesilují. Jelikož tu opět směr síly elektromotorické se nemění, pokud se vodič pohybuje v téže části pole magnetického, zůstává také směr indukovaného proudu týž. Jakmile však vodič překročí čáru indifferentní, obrátí se opět směry sil elektromotorických v obou částech ab a cd a směr proudu indukovaného bude opačný se směrem proudu dřívějšího. Nastává tedy obrat proudu na strojích do třetího řádu spadajících právě tak, jako na strojích příslušících do řádu druhého, kdykoliv vodič uzavřený překročí čáru indifferentní. Úprava commutatoru pro proudy stejnosměrné bude tedy táž, jako při strojích řádu druhého. Do tohoto třetího řádu spadají tak zvané stroje bubnové a některé stroje na proudy střídavé. Úprava magnetů strojů příslušících do těchto dvou řádů liší se od úpravy magnetů strojů prvního řádu tím, že magnety protilehlé mají polaritu stejnou, kdežto u strojů řádu prvého polarita protilehlých magnetů byla opačná. —



Obr. 3.

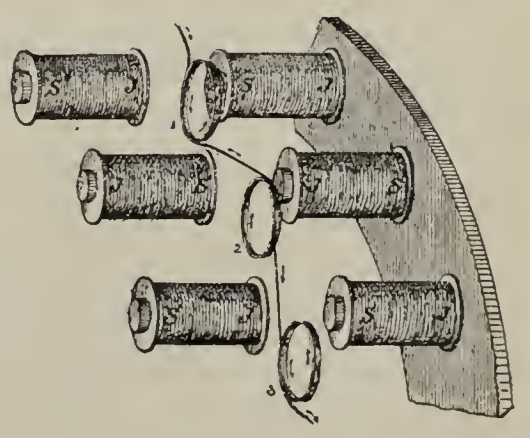
Střední síla elektromotorická.

Na základě principu o setrvačné energii lze vyvoditi známý zákon indukce. Pohybuje-li se vodič v magnetickém poli způsobem takovým, že protíná silo-

křivky pole magnetického, nastane indukce, a síla elektromotorická rovná se počtu silokřivek, které v jednotce časové vodič tento protíná. Tvoří-li vodič uzavřený obvod proudový v magnetickém poli, jest síla elektromotorická na změně silokřivek obvodem tímto procházejících závislá, a sice rovná se opět této změně v jednotce časové. Na strojích elektrických tvoří vodič uzavřené obvody proudové, řídíme se tedy při vypočtení síly elektromotorické tímto pravidlem poslednějším. Máme-li na mysli stroje spadající do prvého řádu, seznáme, že největší počet silokřivek plochou proudovou procházeti bude, když tato nad poly magnetickými čili jinak v poloze axiální se nachází. Přejde-li vodič z polohy axiální nad čáru indifferentní, bude počet silokřivek plochou procházející rovnati se nulle, jelikož v této poloze touto plochou stejný počet kladných a záporných silokřivek prochází. Při pohybu vodiče od polu do následující čáry indifferentní klesne počet silokřivek plochou proudovou procházející z N na nullu, nazveme-li N počet silokřivek plochou proudovou nad polem magnetickým procházející. Doba, ve které vodič ze své polohy nad polem severním přijde opět na následující severní pol, nazývá se periodou a značí se T. Jelikož dle předcházejícího počet silokřivek, procházející plochou proudovou, změní se o N v čase, ve kterém vodič z polohy své nad polem dospěje nad čáru indifferentní, tedy v čase $\frac{T}{4}$ bude střední síla elektromotorická, která při tomto pohybu vzniká

$$E = \frac{4N}{T}.$$

V přiloženém obrazci 4. naznačen jest stroj spadající do prvého řádu strojů elektrických. Magnetické pole skládá se ze dvou věnců magnetů. Magnety vedle sebe a proti sobě ležící mají polaritu nestejnou.



Obr. 4.

Počet magnetů na jednom věnci budiž m, počet pak cívek budiž týž. Vedle sebe ležící cívky jsou opačně vinuty, bude tedy síla elektromotorická, je-li v každé cívce n závitů

$$E = \frac{4mnN}{T};$$

značí-li v počet obratů za minutu, bude počet period za vteřinu $= \frac{v}{60}\,\frac{m}{2}$ a tedy doba jedné periody

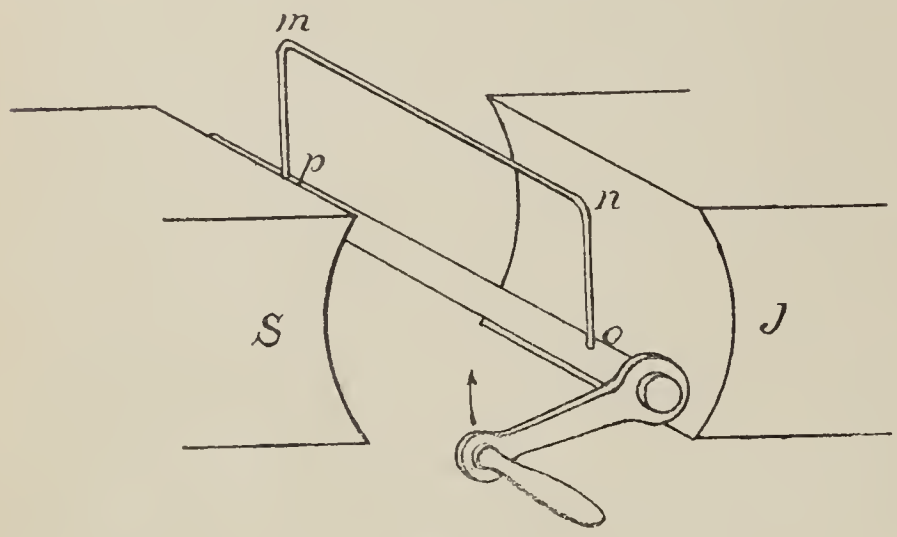
$$T = \frac{2 \cdot 60}{v \cdot m}$$

a síla elektromotorická:

$$E = \frac{4 \cdot v \cdot m^2 \cdot n \cdot N}{2 \cdot 60} = \frac{v \cdot m^2 \cdot nN}{30}.$$

Harmonická změna síly elektromotorické.

V předcházejícím odstavci určili jsme střední sílu elektromotorickou, která se ve stroji elektrickém budí. Síla tato však není stálá, ale jak z předcházejícího rozboru na jevo jde, proměnlivá, a sice periodicky proměnlivá. Stejné hodnoty sil elektromotorických vyskytují se ve stejných dobách. Jakým způsobem síla elektromotorická se mění, vidíme na následujícím jednoduchém případě. Uzavřený vodič *m n o p* (viz obr. 5.) nechť pohybuje se rovnoměrným pohybem otáčivým ve stejnorodém poli magnetickém ve směru v obrazci šipkou označeném. Při svém pohybu protíná lineárný vodič *m n* silokřivky magnetické a síla elektromotorická jest dle předcházejícího závislá na počtu silokřivek, v jednotce časové protnutých. Jelikož dle předešlého lineárný vodič *m n* pohybuje se rovnoměrnou rychlostí v kruhu, lze za tento pohyb dosaditi pohyb harmonický. Promítneme-li pohyb tento na průmět vertikální, bude se *m n* v tomto průmětu pohybovati pohybem harmonickým. Počet silokřivek protnutých v jednotce časové bude na rychlosti tohoto pohybu



Obr. 5.

závislý, předpokládáme-li pole stejnorodé. Pohyb tento vyjádří se, jak známo, vzorcem:

$$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

kdež s značí dráhu v čase t vykonanou, a pak amplitudu a T dobu jedné periody, a rychlosť pohybu harmonického vyjádří se, jak známo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T};$$

značí-li a počet silokřivek protnutých vodičem při pohybu jeho ze středu pohybu harmonického do největší vzdálenosti, bude s měřiti počet silokřivek protnutých v čase t, a jelikož síla elektromotorická na počtu silokřivek v jednotce časové protnutých je závislá, bude:

$$E = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

kdež a lze také v tom smyslu pojmouti co počet silokřivek, který uzavřeným vodičem *m n o p* v naznačené poloze prochází.

Z předcházejícího rozboru lze snadně vyvoditi, jakým podmínkám třeba vyhověti při strojích elektrických na proudy střídavé, aby síla elektromotorická ve stroji vznikající měnila se harmonicky. Pohybuje-li se induktor v kruhu rychlostí stejnoměrnou a sice ve stejnorodém poli magnetickém, vzniká harmonicky proměnlivá síla elektromotorická. Z předcházejícího rozboru jde na jevo,

že lze rovnoměrně otáčivý pohyb induktoru ve strojích elektrických přeměniti promítnutím na rovinu, kolmě stojící na směru silokřivek magnetických, v pohyb harmonický. Ze známých pak vlastností tohoto pohybu lze seznati způsobem jednoduchým zákony o působení strojů elektrických. Koná-li se v témže prostředí dva neb více pohybů harmonických, lze tyto pohyby složiti v jeden pohyb výslední; podobně lze i pohyby takové rozkládati. Jelikož ve strojích elektrických vznikají v obvodu proudovém síly elektromotorické, stejné sice periody, avšak nestejné amplitudy a měny, chceme v následujícím vyhledati mathematický a geometrický výslední pohyb dvou takových pohybů harmonických.

Dva pohyby harmonické stejného směru a stejné periody a nestejné amplitudy a měny vyjádří se, jak známo, rovnicemi

$$x = a \sin (m t + b) ,$$
$$x_1 = a_1 \sin (m t + b_1) ,$$

kdež značí a, a_1 amplitudy, b a b_1 měny částečných pohybů harmonických a $m = \frac{2\pi}{T}$. Výslední pohyb:

$$X = x + x_1 = a \sin (m t + b) + a_1 \sin (m t + b_1)$$

z rovnice této jde:

$$X = (a \cos b + a_1 \cos b_1) \sin m t + (a \sin b + a_1 \sin b_1) \cos m t ;$$

dosadíme-li do této rovnice za

(a)
$$\begin{cases} a \sin b + a_1 \sin b_1 = A \sin B , \\ a \cos b + a_1 \cos b_1 = A \cos B , \end{cases}$$

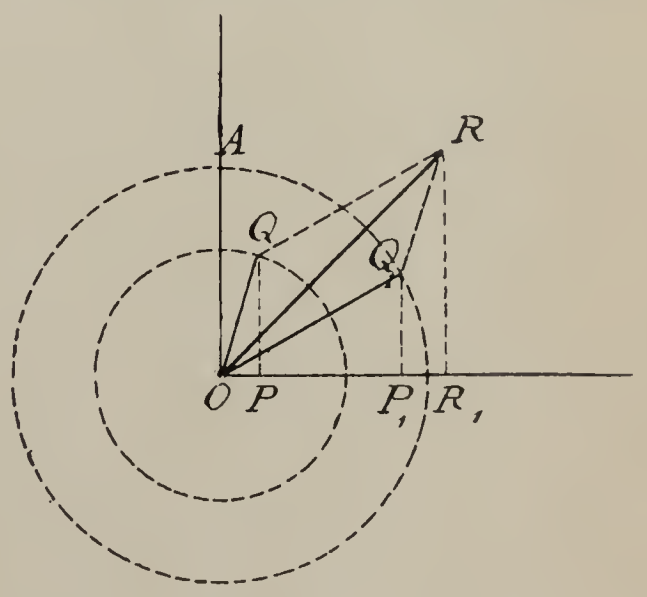
obdržíme

$$X = A \sin (m t + B)$$

co pohyb výslední.

Z rovnice této jde, že výslední pohyb jest opět pohybem harmonickým, mající stejnou periodu jako pohyby částečné, avšak jinou amplitudu a jinou měnu. Z rovnice (a) určíme tyto hodnoty:

$$A^2 = a_1{}^2 + a^2 + 2 a a_1 \cos (b_1 - b) ,$$
$$\operatorname{tg} B = \frac{a \sin b + a_1 \sin b_1}{a \cos b + a_1 \cos b_1} .$$



Obr. 6.

Úlohu předcházející lze způsobem geometrickým takto řešiti. Na místo pohybu harmonického lze dosaditi pohyb rovnoměrný v kruhu. Nechť tedy první pohyb nahrazen jest pohybem bodu Q v kruhu opsaném poloměrem rovným amplitudě tohoto pohybu částečného $= a$, a druhý pohyb nahrazen rovnoměrným pohybem bodu Q_1 v kruhu opsaném poloměrem a_1 amplitudou druhého částečného pohybu. Nestejné měny obou těchto pohybů vyznačeny jsou v obrazci 6. úhly $Q\,O\,A$ a

$Q_1 O A$. Sestrojíme-li na $O Q$ a $O Q_1$ rovnoběžník, bude úhlopříčna $O R$ amplitudou výsledního pohybu harmonického a $\sphericalangle R O A$ jeho měnou. $O R$ se nemění, jelikož $O Q$ a $O Q_1$ jsou stálé, podobně nezmění se i měna $\sphericalangle R O A$, jelikož oba pohyby částečné mají stejnou periodu. Jak z obrazce na jevo jde, rovná se výslední pohyb harmonický

$$O R_1 = O P + O P_1 .$$

Podobně jako lze harmonické pohyby skládati, lze pohyby tyto i rozkládati.

Výslední síla elektromotorická.

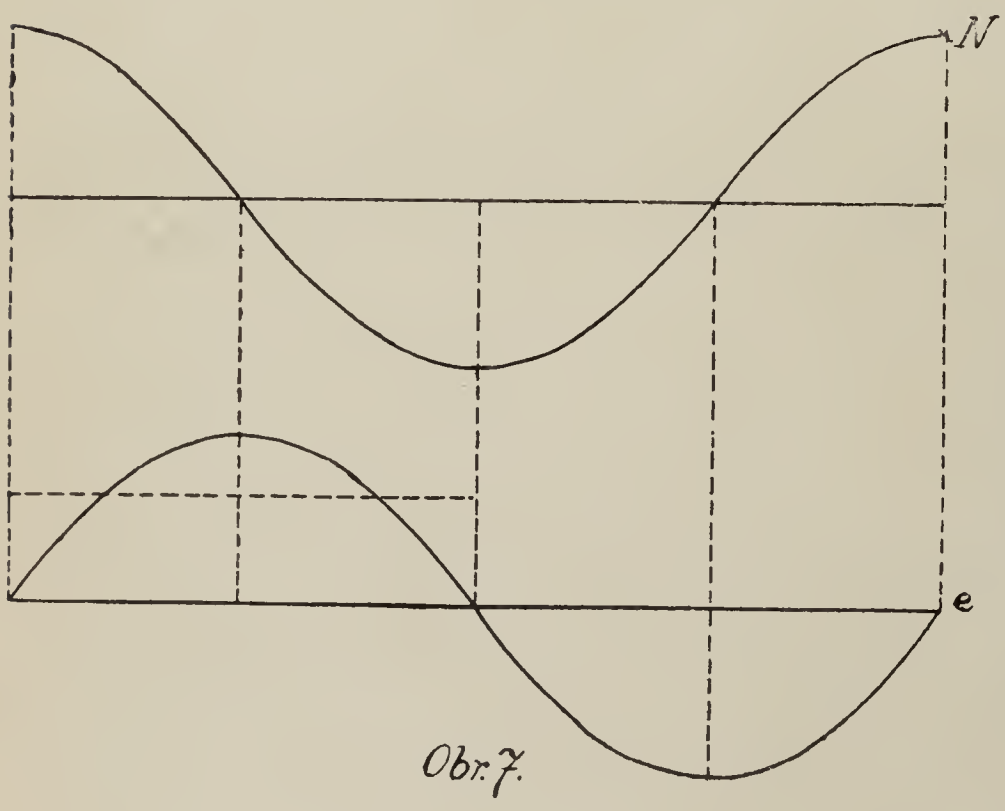
Počet silokřivek protnutých v čase t vodičem otáčecím se rovnoměrně ve strojích elektrických vyjádří se, jak nahoře odvozeno bylo, vzorcem

$$N = N_o \cos \frac{2 \pi t}{T} ; \qquad (1)$$

předpokládáme-li, že vodič z polohy axiální počne se pohybovati a značí-li N_0 protnutý počet silokřivek v čase $t = \frac{T}{4}$ aneb silokřivky procházející plochou uzavřeného odvodu proudového v poloze kolmé na silokřivky magnetické, bude N měřiti protnutý počet silokřivek v čase t, neb počet silokřivek, který právě uzavřeným obvodem proudovým prochází.

Síla elektromotorická, jak známo, měří se změnou počtu silokřivek v jednotce časové, jelikož:

$$(2) \qquad -\frac{d N}{d t} = \frac{2 \pi N_o}{T} \sin 2 \pi \frac{t}{T} ,$$



Obr. 7.

bude:

$$(3) \qquad e = e_o \sin 2 \pi \frac{t}{T} .$$

Naneseme-li na osu X čas a na osu Y počet silokřivek (viz obr. 7.), po případě sílu elektromotorickou, obdržíme křivky, zobrazující harmonickou změnu těchto hodnot. Z obrazce toho jde, že v čase, kdy plochou proudovou prochází největší počet silokřivek, síla elektromotorická rovná se nulle, a opačně síla elektromotorická jest největší, když plochou proudovou silokřivky žádné neprocházejí. Z předcházejícího vzorce jde, že maximální síla elektromotorická

$$(4) \qquad e_o = \frac{2 \pi N_o}{T} ,$$

jelikož, jak nahoře dovozeno bylo, střední síla elektromotorická

$$e_s = \frac{4 N_o}{T} , \tag{5}$$

bude:

$$e_s = \frac{2}{\pi} e_o . \tag{6}$$

Dělíme-li rovnici (3) odporem celého obvodu proudového, obdržíme vzorec pro intensitu proudu

$$i = \frac{e_o}{r} \sin 2\pi \frac{t}{T} , \tag{7}$$

kterážto rovnice souvislosť základních hodnot elektrických stanoví.

Ve strojích elektrických však poměry nejsou tak jednoduché, jak v předcházejícím případě se předpokládalo. V uzavřeném obvodu proudovém působí dvě síly elektromotorické periodické, jedna majíc původ svůj ve vnějším poli magnetickém, druhá ve vlastní indukci vznikající měnivým proudem v cívkách induktoru, která původní sílu elektromotorickou seslabuje

$$e = e_o \sin \frac{2\pi t}{T} - L \frac{di}{dt} , \tag{8}$$

kdež L činitelem vlastní indukce se zove a na rozměrech cívky závislým jest. Dělíme (8) odporem r, obdržíme:

$$i = \frac{e_o}{r} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{L}{r} \frac{di}{dt} , \tag{9}$$

kteroužto rovnici lze příslušnými substitucemi, jak známo, v následující rovnici differentiální přeměniti

$$di + a i dt - b dt = 0 . \tag{10}$$

Provedeme-li integraci tuto a zavedeme-li opět původní hodnotu, obdržíme

$$i = \frac{e_o}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right) \tag{11}$$

vzorec pro stanovení intensity proudové, když vedle vnější síly elektromotorické působí i vlastní indukce.

Chceme v následujícím podati jednoduché, na uvedené již methodě geometrické se zakládající řešení tohoto případu. Jak již uvedeno, působí v obvodu uzavřeném stroje elektrického dvě periodické síly elektromotorické, jedna vnější, druhá vnitřní, která indukovaným proudem vzniká. Induktorem procházející proud tvoří silokřivky a tím vlastní neb vnitřní síla elektromotorická vzniká, síla tato

$$e'_2 = \frac{dN}{dt} \tag{12}$$

jest tedy, jak nahoře uvedeno, na změně silokřivek závislá, a jelikož silokřivky mění se intensitou proudu, bude také:

$$e'_2 = L \frac{di_1}{dt} , \tag{13}$$

značí-li i_1 skutečnou intensitu proudu ve stroji a L činitele, který na rozměrech a úpravě induktoru jest závislý.

Vyjádříme-li

$$i_1 = \frac{e_1}{r} \sin 2\pi \frac{t}{T} , \tag{14}$$

bude

$$L \frac{di_1}{dt} = L \frac{2\pi}{T} \frac{e_1}{r} \cos 2\pi \frac{t}{T} \tag{15}$$

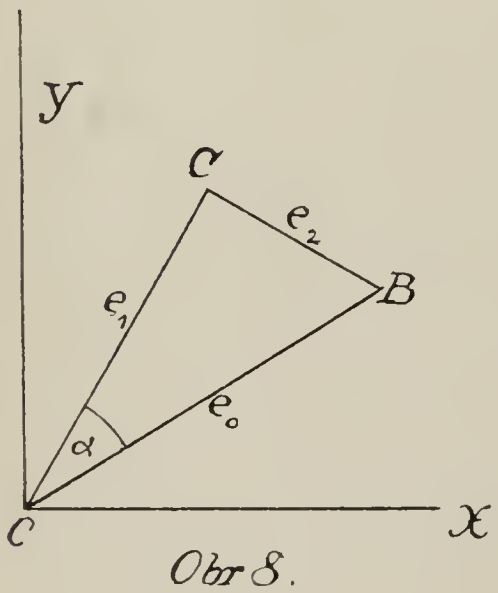
čili

$$e'_2 = \frac{2\pi L}{Tr} e_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} . \tag{16}$$

Z rovnice této jde, že síla elektromotorická vnitřní indukce jest periodickou funkcí téže periody jako skutečná síla elektromotorická, vzhledem však na měnu jest o $\frac{\pi}{2}$ čili 90^0 pošinuta. Amplituda této síly elektromotorické

$$c_2 = \frac{2\pi L}{Tr} e_1 .$$

Původní čili vnější síla elektromotorická rozkládá se tedy ve dvě složky téže periody ve měně však o $\frac{\pi}{2}$ rozdílné. Značí-li OB v obrazci 8. amplitudu periodické vnější síly elektromotorické, budou kolmo na sobě stojící přímky OC a CB značiti amplitudy skutečné síly elektromotorické a vnitřní indukce. Jest tedy amplituda vnější síly elektromotorické přeponou pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou amplitudy skutečné (e_1) a vnitřní síly elektromotorické (e_2). Úhel α u sestrojení trojúhelníka určí se z původní rovnice



Obr 8.

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{2\pi L}{Tr} = \operatorname{tg} \alpha . \tag{17}$$

Z pravoúhlého trojúhelníka jde:

$$e_1 = e_0 \cos \alpha = \frac{e_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} , \tag{18}$$

$$e_2 = e_0 \sin \alpha = \frac{e_0 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} . \tag{19}$$

Dosadíme-li za $tg\alpha$ hodnoty z rovnice (17), obdržíme:

$$(20) \qquad e_1 = \frac{e_0}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}}, \qquad (21) \qquad e_2 = \frac{e_0 \frac{2\pi L}{Tr}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}}$$

amplitudy sil periodických.

Vyjádříme-li periodickou změnu vnější, původní síly elektromotorické rovnicí

$$e = e_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \tag{22}$$

bude periodická změna skutečné síly elektromotorické vyjádřena:

$$e'_1 = \frac{e_0}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right), \tag{23}$$

kdež $2\pi\varphi$ značí $\sphericalangle \alpha$, o který měna tohoto pohybu vzhledem na původní sílu elektromotorickou se opozdí; toto opozdění měny vypočte se dle svrchu uvedeného vzorce

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\pi\varphi = \frac{2\pi L}{Tr}.$$

Periodická změna síly elektromotorické vnitřní vyjádří se:

$$e'_2 = \frac{e_0 \frac{2\pi L}{Tr}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right). \tag{24}$$

Dělíme-li rovnici, skutečnou sílu elektromorickou vyjadřující (23), odporem obvodu proudového, obdržíme skutečnou intensitu proudovou.

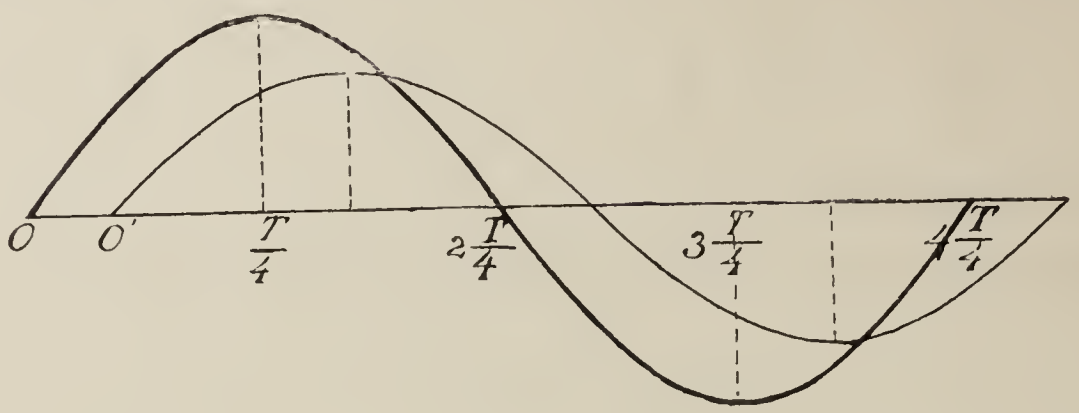
$$i_1 = \frac{e_0}{r\sqrt{1+\left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right) \tag{25}$$

neb

$$i_1 = \frac{e_0}{\sqrt{r^2+\left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right).$$

Výraz ve jmenovateli pod odmocnítkem nazývá se také odporem zdánlivým. Srovnáme-li výraz ten, určující skutečnou intesitu v obvodu proudovém, ve kterém dvě síly elektromotorické vznikají, vnější a vnitřní síla elektromotorická, jak nahoře uvedeno bylo, zvětší se tedy odpor skutečný zdánlivě a současně měna pohybu harmonického se zamění. — V přiloženém obr. 9. naznačena jest periodická změna vnější síly elektromotorické křivkou tmavější a periodická změna

skutečné intensity proudové slabší křivkou. Jak z obrazce tohoto na jevo jde, jest křivka intensity pošinuta vzhledem na křivku sil elektromotorických vnějších. Maximum síly elektromotorické vnější a maximum skutečné intensity proudové nevyskytují se současně, maximum skutečné intensity proudové nastupuje později o $\frac{\alpha T}{2\pi}$.

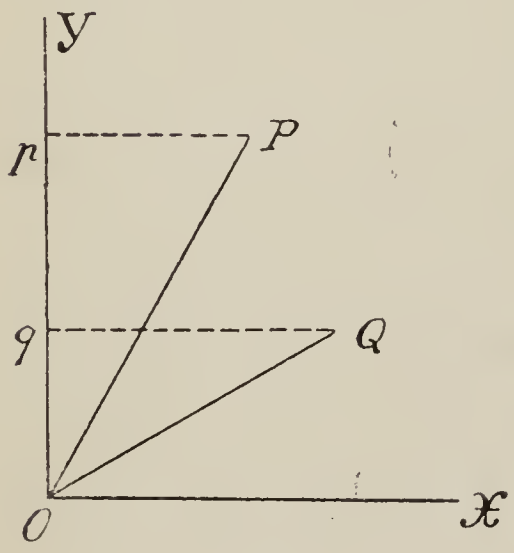


Obr. 9

Věta geometrická.

V přiloženém obrazci 10. značí OP a OQ svou délkou a polohou dva pohyby harmonické téže periody, nestejné měny. Otáčí-li se OP a OQ stejnou úhlovou rychlostí, budou jich kolmé průměty na osu OY zobrazovati příslušné pohyby harmonické. Otočí-li se tyto amplitudy jednou kolem, bude střední hodnota součinů všech průmětů (Op, Oq):

$$S = \frac{OP \times OQ}{2} \cos POQ ,$$



Obr. 10.

t. j. rovná se polovině součinu amplitud násobenému cosinem úhlu, který obě amplitudy při geometrickém zobrazení svírají. Důkaz mathematický podal Flemming ve svém spise »The alternate current transformer« p. 118, a geometrický Blakesley ve spise »Alternating Currents«.

Jest-li $OP = OQ$ a $\sphericalangle POQ = 0$, bude i $Op = Oq$ a obdržíme:

$$S = \frac{OP^2}{2} ,$$

t. j. střední hodnota čtverců harmonické změny rovná se polovině čtverce amplitudy. Měříme-li intensitu proudu dynamometrem, jest účinek závislý na čtverci intensity procházejícího proudu harmonického; měříme-li tedy dynamometrem střední hodnotu čtverců intensit procházejícího proudu, bude tedy:

$$i'_s = \frac{i_o}{\sqrt{2}} ,$$

značí-li i'_s střední hodnotu čtverců a i_o amplitudu, maximální hodnotu intensity harmonického proudu.

Značí-li OP amplitudu vnější síly elektromotorické a OQ amplitudu skutečné intensity proudové, procházející obvodem proudovým, bude součin $S = \frac{OP \times OQ}{2} \cos POQ$ měřiti práci v obvodu proudovém vykonanou, jelikož součin ten jest střední hodnotou všech součinů příslušných průmětů kolmých, kteréžto součiny měří práci elektrickou v určitých dobách proudu harmonického. Označíme-li amplitudu vnější síly elektromotorické E_o a amplitudu skutečného proudu $\mathcal{J}_o$ a je-li úhel, který amplitudy při geometrickém zobrazení svírají, roveň α, bude práce této síly elektromotorické vnější v obvodu proudovém vyjadřena vzorcem:

$$P = \frac{E_o \mathcal{J}_o}{2} \cos \alpha$$

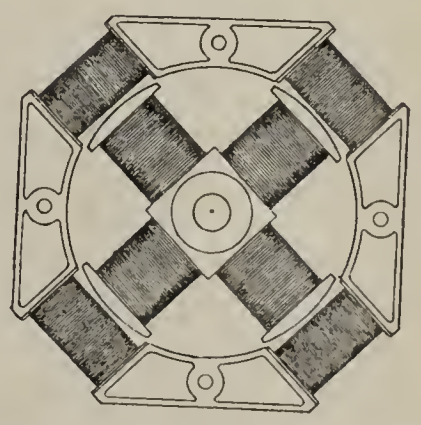
a práce vnitřní síly elektromotorické v obvodu proudovém:

$$P_1 = \frac{E'_o \mathcal{J}_o}{2} \cos 90^0 = 0 ,$$

je-li E'_o opět amplituda vnitřní síly elektromotorické. Vnitřní silou elektromotorickou, neboli indukcí vnitřní, žádná práce se nezíská, aniž se jaká spotřebuje. Vnitřní indukcí nahromadí (utají) se tedy část energie, která opět ve vhodném okamžiku se uvolní. Energie utajená a uvolněná se rovnají.

Střední síla elektromotorická.

Svrchu uvedené zákony o proudech střídavých chceme na stroji elektrickém Ganze a spol. experimentelně dovoditi. Dle přiloženého obrazce 11. vzniká pole magnetické čtyřmi poly magnetickými, které na ose radiálně připevněny jsou. Vinutí sousedních polů jsou střídavě opačným směrem vinuta. Tyto magnety objímá věnec ze čtyř cívek, které magnetům naproti jsou položeny, a plochy protilehlé cívky a magnetu se rovnají. Cívky opět jako magnety jsou střídavě opačným směrem vinuty. Magnetické pole na tomto stroji vzniká proudem, který se z jiného stroje elektrického do závitů elektromagnetů přivádí. Magnetické pole otáčí se v tomto stroji a cívky nacházejí se v klidu.



Obr. 11.

Myslíme-li si obvodem proudovým cívky položenu rovinu, protínají se silokřivky plochou této roviny a stroj tento sluší tudy do druhého řádu našeho rozdělení zařaditi. Obrat proudový nastává tedy v poloze aequatoriální. Proud periodický, který otáčením magnetů vzniká, bude míti dvě periody při každém otočení stroje. Je-li v počet obratů za minutu, bude počet period za vteřinu

$$p = \frac{2v}{60}$$

a tedy doba jedné periody

$$T = \frac{60}{2v} .$$

Rozměry stroje tohoto jsou následující:

Každá cívka indukční obsahuje 69 závitů, tedy 4 cívky 276 závitů. Průřez železného jádra rovná se 52 cm^2. Celkový odpor drátu cívek $= 0{\cdot}21\ \Omega$. Na každém magnetu navinuto jest 1040 závitů, celkem tedy 4160; odpor celého drátu na magnetech navinutého rovná se 55Ω. Koná-li stroj 1250 obratů za minutu, vyvine se síla elektromotorická dle uvedeného vzorce

$$E = \frac{v \,.\, m^2 \,.\, n \,.\, N}{30} ,$$

kdež N počet silokřivek na plochu obvodu proudového značí; je-li N_1 intensita magnetického pole čili počet silokřivek připadající na jednotku plochy (cm^2), bude $N = N_1 q$ a střední síla elektromotorická vypočte se dle vzorce:

$$E_s = \frac{v \,.\, m^2 \,.\, n \,.\, q\, N_1}{30} \quad \text{v jednotkách absolutních,}$$

kdež m počet magnetů značí. V našem případě $m = 4$; počet cívek rovněž $m = 4$; počet závitů v jedné cívce indukční $n = 69$; q, průřez cívky indukční $= 52\ cm^2$; v počet obratů za minutu $= 1250$. Vedeme-li do závitů na elektromagnetu proud takové intensity, že intensita pole magnetického $= 6000$; obdržíme střední sílu elektromotorickou dle posledního vzorce, dělíme-li 10^8

$E_s = 143\ V$ v jednotkách Voltových.

Experimentelní důkaz o změně sinusové proudu ve stroji na proudy střídavé.

Stefan* ve své správě o elektrické výstavě ve Vídni ukázal, jak lze experimentelně dovoditi, zdali změna proudu indukovaného ve stroji na proudy střídavé jest změnou sinusovou. Nahoře bylo dovozeno, že střední hodnota čtverců harmonicky proměnlivé síly elektromotorické rovná se

$$e'_s = \frac{e_o}{\sqrt{2}} ,$$

kdež e_o maximum síly elektromotorické nebo amplitudu harmonické změny značí. Dělíme-li rovnici tuto odporem obvodu proudového, v němž tato síla elektromotorická vzniká, obdržíme opět

$$i'_s = \frac{i_o}{\sqrt{2}} ,$$

kdež i'_s střední hodnotu čtverců intensit a i_o amplitudu harmonického proudu značí.

---

* Stefan, Offic, Bericht über die internationale elektrische Ausstellung in Wien 1883 p. 218. r. 1886.

Jelikož na stroji elektrickém, jehož rozměry nahoře jsme uvedli, s kterým řada pokusů provedena byla za účelem srovnání theorie s pokusem, vznikají dvě síly elektromotorické, vnější vznikající otáčecím se polem magnetickým a druhá vnitřní majíc původ svůj v induktoru stroje, vyjádří se harmonická změna skutečné intensity proudové vzorcem:

$$i_1 = \frac{e_0}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} \sin\left(\frac{t}{T} - \varphi\right).$$

Amplituda této změny harmonické rovná se

$$\frac{e_0}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}},$$

bude tedy střední hodnota čtverců intensit

$$i'_s = \frac{e_0}{\sqrt{2}\sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}},$$

$$[i'_s]^2 = \frac{{e_0}^2}{2\left(r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2\right)}.$$

Napíšeme-li rovnici tuto způsobem

$$\frac{1}{[i'_s]^2} = \frac{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}{\frac{1}{2}{e_0}^2} \qquad \text{(a)}$$

a naneseme-li na osu x r^2 a na osu y $\frac{1}{[i'_s]^2}$, obdržíme rovnici přímky

$$y = ax + b,$$

ve kteréž

$$a = \frac{2}{{e_0}^2}; \qquad b = \frac{\left(2\frac{\pi}{T}L\right)^2}{\frac{1}{2}{e_0}^2}.$$

Abychom harmonickou změnu proudu ve stroji dovodili, provedeme se strojem řadu pokusů tím, že měníme odpor obvodu proudového a určíme si současně střední intensitu čtverců proudů a zobrazíme si pak výsledky tyto graficky tím způsobem, že ve směru osy X naneseme čtverce vložených odporů a ve směru osy Y zvratné střední hodnoty čtverců intensit. — Bude-li zobrazující čára přímkou, pak jest tím důkaz podán, že lze předpokládati ve stroji tomto tuto jednoduchou změnu harmonickou. V následujícím chceme uvésti řadu pokusů, provedených na výše uvedeném stroji na proudy střídavé. V rovnici přímky jest skutečný odpor obvodu proudového a jeho intensita

veličinou proměnnou. Nutno tedy při pokusu hleděti k tomu, aby ostatní hodnoty v rovnici uvedené během pokusu se neměnily. Jelikož e_0 značí nám amplitudu vnější harmonické síly elektromotorické, a jelikož tato, jak již uvedeno

$$e_0 = \frac{2\pi N_0}{T},$$

kdež N_0 maximální počet silokřivek procházejících induktorem značí, musí tento býti stálým. Podmínce této vyhovíme, když pole magnetické vnější jest stálé, vedeme-li tedy kolem závitů elektromagnetů proud stálé intensity. Při pokusech našich veden byl proud ze stroje compoundního Siemens-e a Halske-ho, vloženým rheostatem stále ve stejné intensitě udržován byl, a sice intensita tato rovnala se 1·51 *A*.

Podobně třeba T stále ve stejné hodnotě udržeti, jelikož T periodu harmonické změny, která otáčením magnetického pole vzniká, značí, vyhoví se podmínce této tím, že pole magnetické stále stejnou rychlostí rovnoměrnou se otáčí. Magnetické pole otáčelo se rychlostí takovou, že v jedné minutě nastalo 1300 obratů. Tím vyhovělo se také podmínce druhé, aby i výraz $\frac{2\pi L}{T}$ byl veličinou stálou.

Hodnoty e_0 a $\frac{2\pi L}{T}$ byly tedy při pokusech hodnotami stálými. — Změna odporů obvodu proudového provedena byla tím způsobem, že do vnějšího vedení vkládán byl odpor velkým rheostatem, jehož rozměry a úprava je taková, že v něm jen nepatrná, na celkový výsledek bezúčinná vlastní indukce vzniká. Podobné bylo i oteplení vloženého odporu procházejícím proudem jen nepatrné. Odpor vloženého odporu rheostatem měřen byl přímo po každém pokuse jednotlivém pomocí Siemensova universálního galvanometru, kterážto methoda, jak známo, zakládá se na tak zvaném můstkovém rozvětvení Wheatstona. Vnitřní odpor stroje a drátů přivodících měřen byl na konci celé řady pokusů.

Intensita proudu měřena byla dynamometrem Ganze, ve kterém proud, jak známo, probíhá závity pevnými a jedním závitem pohyblivým, jichž roviny k sobě kolmo jsou postaveny. Závity tyto jsou za sebou spojeny tak, že týž proud pevnou a pohyblivou částí prochází. Účinek elektrodynamický jest zde úměrný, se čtvercem intensity procházející. Jelikož proud procházející byl harmonicky proměnlivým, jest intensita tímto přístrojem měřena

$$i'_s = \frac{i_0}{\sqrt{2}},$$

kdež i_0 značí amplitudu harmonické změny skutečného proudu. Tímto účinkem proudovým pohyblivá část v elektrodynamometru se otočí ze své polohy původní, bude tedy

$$i'_s = K\sqrt{\varphi},$$

kdež φ značí úhel, o který bylo třeba drát skroutiti, aby pohyblivý závit opět v původní své poloze se nacházel, a k značí redukční faktor elektrodynamometru, který se známým způsobem určí z dané intensity proudu stejnosměrného. Redukční faktor tento na přístroji našem

$$K = 1{\cdot}48\ .$$

V následující tabulce uvedena jest řada pokusů provedená způsobem, jak výše uvedeno.

Intensita proudu závity elektromagnetů procházející $= 1{\cdot}51$ *A*, počet obratů za minutu $v = 1300$.

r	r^2	i''_s	$\frac{1}{i'^2_s}$	$\frac{r^2}{30}$	$300\,\frac{1}{i'^2_s}$
24·694	609·6	5·694	0·03084	20·32	9·25
16·288	265·35	8·240	0·014727	8·845	4·42
12·430	154·5	10·254	0·0095134	5·15	2·85
10·060	101·2	12·114	0·0068143	3·34	2·04
8·534	72·83	13·402	0·0055677	2·428	1·67
7·394	54·66	14·8	0·0045654	1·822	1·37

Ve sloupci r nachází se součet odporu rheostatem vloženého a odporu drátů přivodících a induktoru stroje, kterýž $= 0{\cdot}604$, značí tedy r odpor celého obvodu proudového.

Ve sloupci i'_s zaznamenány jsou střední intensity, měřené elektrodynamometrem a vypočtené dle svrchu uvedeného vzorce. V posledních dvou sloupcích znásobeny jsou hodnoty přiměřenými činiteli za účelem grafického znázornění. V přiloženém diagramu (tab. I.) naneseny byly hodnoty $\frac{r^2}{30}$ na osu X a hodnoty $300\,\frac{1}{i'^2_s}$ na osu Y. Z grafického tohoto obrazu jde, že hodnoty uvedené mění se tu po zákonu přímky.

$$y = a\,x + b\,.$$

Hodnoty experimentelně nalezené jen nepatrně liší se od hodnot, které přímka tato spojuje.

Ze shody této lze tedy souditi, že síla elektromotorická vnější v tomto stroji mění se harmonickým způsobem jednoduchým. Možno tedy svrchu uvedené theorie o strojích na proudy střídavé, ve které se předpokládá, že změna vnější síly elektromotorické harmonicky se mění, při tomto případě užiti.

V rovnici přímky

$$y = a\,x + b$$

značí, jak nahoře dovozeno bylo:

$$a = \frac{2}{e_0^2}\,; \qquad b = \frac{\left(\frac{2\,\pi\,L}{T}\right)^2}{\frac{1}{2}\,e_0^2}\,.$$

Určíme si ze dvou pokusů na diagramu tyto konstanty. Dle měřítka na diagramu obdržíme

$$X_1 = 15 \qquad X_2 = 8$$
$$Y_1 = 7 \qquad Y_2 = 4$$

Dle skutečných hodnot jest:

$$X_1 = 450 \qquad X_2 = 240$$
$$Y_1 = 0{\cdot}023 \qquad Y_2 = 0{\cdot}013$$

bude tedy:

$$a = 4{\cdot}762 \times 10^{-5}$$
$$b = 1{\cdot}91 \times 10^{-3}$$

Z hodnot těchto vypočteme

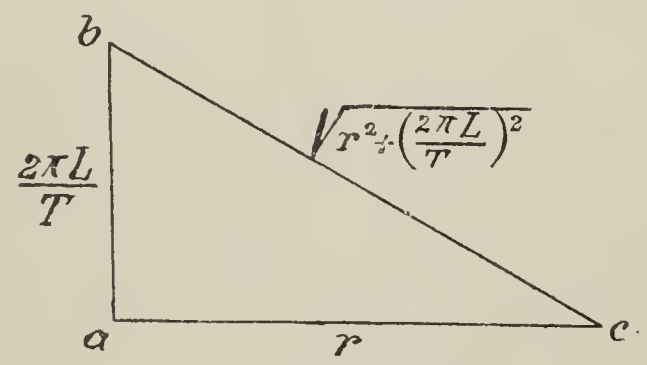
$$e_o = 204{\cdot}9\ ; \qquad \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2 = 40{\cdot}1\ ; \qquad \frac{2\pi L}{T} = 6{\cdot}33$$

a $L = 0{\cdot}02326$ v jednotkách kongressem pařížským přijatých a

$L = 0{\cdot}02326 \times 10^9$ v jednotkách absolutních (cm. gr. sek.)

Amplituda vnější síly elektromotorické $= 204{\cdot}9$ V, člen $\left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2$ určuje změnu skutečného odporu v obvodu proudovém. Zdánlivý odpor

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}$$



Obr. 12.

lze geometricky sestrojiti co přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou skutečný odpor obvodu proudového a tak zvaný odpor indukcí vzniklý. Z úhlu bca lze pak pošinutí měny určiti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi L}{Tr}\ .$$

Dělíme-li amplitudu vnější síly elektromotorické na odpor zdánlivý, obdržíme amplitudu skutečné intensity proudové. —

Charakteristika stroje.

V předcházejícím naznačili jsme střední hodnotu síly elektromotorické, neb střední hodnotu intensity vypočtené ze čtverců jednotlivých hodnot harmonicky proměnných

$$e'_s \quad \text{neb} \quad i'_s$$

a tyto hodnoty vyjádřeny byly:

$$e'_s = \frac{e_o}{\sqrt{2}}\ ; \qquad i'_s = \frac{i_o}{\sqrt{2}}\ ,$$

kdež e_o a i_o příslušné amplitudy harmonické změny značí. — Vypočteme-li

však střední hodnoty z jednoduchých hodnot proměnných, obdržíme střední hodnotu, kterouž označíme e_s a i_s a tyto hodnoty, jak výše uvedeno, rovnají se

$$e_s = \frac{2}{\pi} e_o \quad \text{a} \quad i_s = \frac{2}{\pi} i_o ,$$

kdež opět e_o a i_o amplitudy harmonické změny značí.

Dle předcházejícího bude tedy tato jednoduchá střední hodnota síly elektromotorické skutečné ve stroji, ve kterém vedle vnější síly elektromotorické harmonicky se měnící následkem vlastní indukce i vnitřní síla elektromotorická vzniká.

$$e_s = \frac{2}{\pi} \frac{e_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}} ,$$

kdež zlomek $\frac{e_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi L}{Tr}\right)^2}}$ amplitudu skutečné síly elektromotorické značí.

Jestliže z této rovnice pomocí vztahu

$$e_s = r i_s$$

vyloučíme r, obdržíme:

$$\frac{e_s}{\left(\frac{2}{\pi} e_o\right)^2} + \frac{i_s^2}{\left(\frac{e_o T}{\pi^2 L}\right)^2} = 1$$

co rovnici ellipsy, která nám závislosť střední intensity skutečné a síly elektromotorické stanoví a charakteristikou stroje se zove.

Naneseme-li na osu X střední hodnoty skutečné intensity a na osu Y střední hodnoty skutečné síly elektromotorické, obdržíme ellipsu, jejíž osa na Y značí střední hodnotu vnější síly elektromotorické, a osa na X ležící střední intensitu skutečného proudu pro případ, že $r = 0$.

$\frac{e_o T}{\pi^2 L}$ lze napsati $\frac{\frac{2}{\pi} e_o}{\frac{2\pi L}{T}}$.

Výraz tento stanoví střední intensitu proudu, kterou bychom ve stroji při výše uvedených podmínkách obdrželi, kdyby skutečný odpor obvodu proudového rovnal se nulle.

Osy ellipsy, charakteristiky stroje, lze z výše uvedené řady pokusů určiti. Jelikož

$$e_o = 204{\cdot}9, \text{ bude } \frac{2}{\pi} e_o = 130{\cdot}5,$$

a jelikož $L = 0{\cdot}02326$ v jednotkách kongressem pařížským přijatých, bude

$$\frac{e_o T}{\pi^2 L} = 20{\cdot}6 .$$

Charakteristika stroje, při intensitě magnetisující 1·51 A a při 1300 obratů stroje za minutu, vyjádří se rovnicí

$$\frac{{e_s}^2}{(130{\cdot}5)^2} + \frac{{i_s}^2}{(20{\cdot}6)^2} = 1 .$$

V přiloženém diagramu (tab. 2.) zobrazena jest charakteristika stroje tím způsobem, že na osu X nanešeny jsou střední intensity, a sice tím způsobem, že jeden dílek měřítka rovná se jednotce Amperově, na ose Y nacházejí se střední hodnoty síly elektromotorické, a sice tím způsobem, že $\frac{1}{10}$ jednotky rovná se jednotce Voltově. Ellipsa zobrazena byla na základě daných os 20·6 a 13·05.

Srovnáme-li hodnoty experimentelně nalezené s hodnotami, které z diagramu najdeme, seznáme, že velmi dobře se shodují, jak z následující tabulky na jevo jde.

i_s	e_s (exp.)	e_s (dle diagr.)
5·127	126·6	126·4
7·419	120·83	121·7
9·23	114·75	116·6
10·95	112·28	110·5
12·065	102·98	105·7
13·33	98·52	99·5

Ve sloupcích i_s a e_s jsou příslušné hodnoty experimentelně nalezené zapsány, kdežto poslední sloupec obsahuje hodnoty e_s dle diagramu nalezené. Charakteristika tato vyznačuje působnosť výše uvedeného stroje jen tenkráte, jestliže se svrchu uvedeným podmínkám vyhovuje, je-li totiž magnetické pole vnější téže intensity, prochází-li závity elektromagnetu proud, jehož intensita $= 1{\cdot}51$ A a jestli počet obratů se nemění a rovná se 1300 obratů za minutu. Z předloženého diagramu lze však vyvoditi další důsledky, jak by se charakteristika tato měnila, kdyby intensita pole magnetického se změnila, neb kdyby počet obratů se změnil.

Zvětšíme-li intensitu proudu procházejícího závity elektromagnetů, zvětší se tím počet silokřivek v poli magnetickém a tím tedy se zvětší vnější síla elektromotorická e_o, jelikož

$$e_o = \frac{2\pi N_o}{T} ,$$

kdež N_o maximální počet silokřivek značí, osa ellipsy ve směru Y se zvětší, podobně i osa ve směru X. Zvětšíme-li tedy intensitu proudu magnetisujícího při stejné rychlosti stroje, zvětší se obě osy ellipsy. Zvětšíme-li však počet

obratů, aniž bychom intensitu proudu magnetisujícího měnili, zvětší se osa charakteristiky ve směru Y, avšak osa X zůstane nezměněna, jelikož osa tato, jak výše uvedeno

$$= \frac{\frac{2}{\pi} e_o}{\frac{2\pi L}{T}} = \frac{\frac{4 N_o}{T}}{\frac{2\pi L}{T}} = \frac{N_o}{2\pi L},$$

tedy na době periody jest nezávislá. —

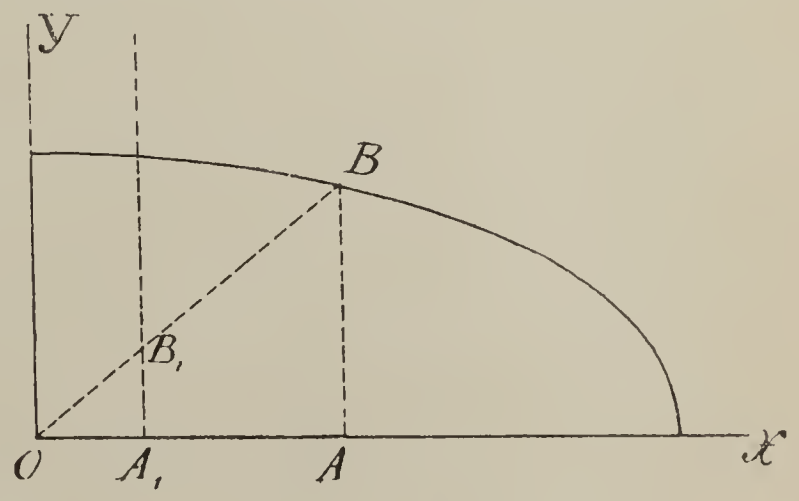
V předcházejícím rozboru předpokládá se, že coëfficient vlastní čili vnitřní indukce intensitou proudu se nemění, L jest tedy hodnotou stálou. Shoda důsledků theoretických s experimentelními výsledky vyznačuje mez, pokud podmínka tato splněna byla.

Jelikož charakteristikou stroje dána jest souvislosť dvou hodnot elektrických, a jelikož Ohmovým zákonem vyznačena jest souvislosť tří základních hodnot elektrických, ze kterých ostatní hodnoty co odvozené lze určiti, jest patrno, že lze z charakteristiky stroje graficky sestrojiti všechny ostatní hodnoty elektrické.

Grafické stanovení hodnot elektrických.

Charakteristikou výše uvedenou dána jest souvislosť střední intensity proudové a síly elektromotorické skutečné

tedy dány i_s a e_s, dle Ohmova zákona jest však $i_s = \frac{e_s}{r}$, kdež r odpor celého obvodu proudového značí, bude tedy $r = \frac{e_s}{i_s}$. Je-li i_s na diagramu rovno OA (obr. 13.) bude $AB = e_s$ a $\frac{e_s}{i_s} = \frac{AB}{OA} = tg\ \alpha$. Lze tedy odpor obvodu proudového určiti tg úhlu, který svírá přímka z počátku souřadnic vedená ku bodu příslušnému na charakteristice. Vztyčíme-li v příhodném bodě A_1 kolmici, bude



Obr. 13.

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A_1 B_1}{OA_1} = r.$$

Jestliže délku OA_1 považujeme za jednotku a měříme-li jí délky $A_1 B_1$ na této kolmici, budou tyto délky značiti nám odpor vyjádřený v jednotkách Ohmových. V našem diagramu jsou hodnoty e_s desetkráte menší než hodnoty skutečné. Jednotka Ampèrova rovná se na diagramu 1 *cm*, kdežto jednotka Voltova se rovná 1 *mm*. Vztyčíme-li tedy kolmici ve vzdálenosti 1 *cm* od počátku souřadnic, značí nám *mm* na kolmici jednotky Ohmovy — na kolmici 10 *cm* vzdálené od počátku souřadnic, rovná se 1 *cm* = jednotce Ohmově. —

Tímto způsobem grafickým lze tedy souvislosť střední intensity a střední síly elektromotorické určiti.

Při strojích elektrických souvislosť hodnot elektrických s odporem obvodu proudového se vyhledává. Mění se odpor ve vedení a žádoucí jest znáti změnu ostatních hodnot elektrických. Chceme tedy v následujícím všechny hodnoty elektrické na stroji co funkce odporu vyznačiti a graficky sestrojiti. Jak uvedeno, lze tedy hodnoty i_s e_s a r z diagramu charakteristiky stanoviti, a pak opět graficky $i_s = f(r)$ a $e^s = f(r)$ zobraziti, ostatní hodnoty odvozené lze pak výpočtem snadno určiti. Spád ve vnějším vedení bude se rovnati odporu vnějšímu, násobenému střední intensitou, bude tedy:

$$\Delta = r_2 i_s .$$

Jelikož odpor induktoru $r_1 = 0{\cdot}21\,\Omega$, vypočteme r_2 dle vztahu:

$$r_2 = r - r_1 .$$

Sledujeme-li průběh těchto hodnot na diagramu (tab. 3.), seznáme, že intensita ubývajícím odporem roste, jako při stroji seriovém na proudy stejnosměrné, avšak při odporu $r = 0$ nestává se nekonečně velkou, ale dostupuje tu maxima. V případě našem blíží se intensita při krátkém spojení 20·6 *A*. Síly elektromotorické a tím i vnější spády ubývají s ubývajícím odporem, a sice v určitých mezích. Síla elektromotorická střední pohybuje se v mezích 130·5 *V* a 0. Práce elektrická v celém obvodu proudovém

$$P = i'_s{}^2 r ,$$

násobíme-li odpory celého obvodu proudového s příslušnými i''_s, t. j. střední hodnotou čtverců intensit, obdržíme práci elektrickou v celém obvodu proudovém. Naneseme-li pak výsledky tyto do diagramu, shledáme, že křivka práci tuto označující s ubývajícím odporem stoupá, při určitém pak odporu dostupuje svého maxima a pak opět klesá. Dosadíme-li do svrchu uvedeného vzorce pro práci

$$i'_s{}^2 = \frac{e_0{}^2}{2\left[r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2\right]} ,$$

obdržíme:

$$P = \frac{e_0{}^2 r}{2\left[r^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2\right]} ,$$

kterýžto výraz bude maximum při měnivém odporu obvodu proudového r, když

$$r = \frac{2\pi L}{T} ,$$

tedy

$$P\,\mathrm{max} = \frac{e_0}{4\,\frac{2\pi L}{T}} ,$$

jelikož v našem případu $\frac{2\pi L}{\pi} = 6{\cdot}33$, nastane maximum práce při odporu $6{\cdot}33\,\Omega$ a $P\,\max = 1658$ Watt.

Srovnáme-li výsledek tento vypočtený s výsledky v diagramu graficky označenými, kde ve směru osy X naneseny jsou odpory tím způsobem, že jednotka délky cm = jednotce Ohmově, a ve směru osy Y naneseny jsou práce v jednotkách Wattových tím způsobem, že jeden dílek rovná se 100 Wattům, shledáme, že právě při odporu $6{\cdot}4\,\Omega$ také maximum nastává, jehož hodnota graficky nalezená velmi dobře se shoduje s hodnotou vypočtenou.

Práci ve vnějším vedení vypočteme dle vzorce

$$P_1 = i'_s{}^2 r_2 ,$$

kdež r_2 vnější čili užitečný odpor značí. Podobně jako při celé práci elektrické jest závislosť práce vnější zobrazena tím způsobem, že ve směru osy X naneseny jsou opětně odpory a ve směru osy Y příslušné práce elektrické, vyjádřené v jednotkách Wattových v 100kráte menším měřítku.

Účinnosť elektrická vyjadřuje se, jak známo, poměrem této práce elektrické vnější ku celé práci elektrické, bude tedy:

$$\gamma = \frac{r_2}{r_1 + r_2} ,$$

označíme-li γ účinnosť elektrickou ve stroji. Násobíme-li výraz tento 100, obdržíme účinnosť v procentech vyjádřenou. Křivka účinnosti (γ) opětně v diagramu jest zobrazena, kdež současně naznačeno, jaká délka při konstrukci za jednotku byla položena.

Vyjádříme-li výraz pro vnější práci elektrickou

$$P_1 = i'_s{}^2 r_2$$

tím, že dosadíme:

$$i'_s{}^2 = \frac{1}{2} \frac{e_0{}^2}{(r_1 + r_2)^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2} ,$$

obdržíme:

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{e_0{}^2 r_2}{(r_1 + r_2)^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2} .$$

Výraz tento dostoupí maximální hodnoty, když

$$r_2 = \sqrt{r_1{}^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2} .$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce předcházejícího, obdržíme max. práci ve vnějším vedení.

$$P_1\,\max = \frac{1}{4} e_0 \frac{1}{r_1 + \sqrt{r_1{}^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} .$$

Podobně obdržíme hodnotu účinnosti elektrické při této max. práci vnější, dosadíme-li nalezený odpor r_2 do hořeního vzorce pro účinnost elektrickou, bude tedy:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}}},$$

kteryžto výraz bude, jak na první pohled shledáme, větší než $\frac{1}{2}$ a v procentech vyjádřeno větší než 50%. Ve strojích seriových na proudy stejnosměrné a při článcích galvanických obdržíme, jak známo, max. působnosť stroje neb článků galvanických, když tak zvaný vnitřní odpor rovná se odporu vnějšímu. Na strojích na proudy střídavé obdržíme max. působnosť, když vnější odpor rovná se zdánlivému odporu vnitřnímu; avšak kdežto na strojích seriových na proudy stejnosměrné a v článcích galvanických účinnosť jen 50% obnáší, jest na strojích na proudy střídavé tato účinnosť větší než 50%.

Na našem stroji jest $r_1 = 0{\cdot}21\ \Omega$, nastane tedy maxim. práce při odporu

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2} = 6{\cdot}333\ ,$$

je-li, jak nahoře určeno bylo,

$$\frac{2\pi L}{T} = 6{\cdot}33\ ,$$

bude maxim. práce vnější

$$P_{1m.} = \frac{204{\cdot}9^2}{4 \cdot 6{\cdot}543} = 1604\ \text{Watt}\ ,$$

jelikož $e_o = 204{\cdot}9\ V$, bude tedy účinnosť při max. vnější práci

$$\gamma = 96{\cdot}79\,\%\ .$$

Tyto výsledky vypočtené dobře se shodují s hodnotami v diagramu nalezenými. Z toho patrno, že ve strojích na proudy střídavé účinnosť při max. působnosti vnější vysokého stupně dostupuje.

V předcházejícím stanovení účinnosti elektrické předpokládalo se, že jen v induktoru energie elektrická se ztrácí a energie ve vnějším vedení se využitkuje; přihlíženo tedy toliko k obvodu proudovému střídavého proudu. K udržování pole magnetického, jak výše uvedeno, užito bylo stroje na proudy stejnosměrné, spotřebuje se tedy v závitech elektromagnetů tohoto stroje na proudy střídavé určitá energie elektrická. Chceme-li účinnosť strojů elektrických na proudy střídavé srovnávati s účinností strojů elektrických na proudy stejnosměrné, třeba tedy ku této ztrátě v závitech elektromagnetů přihlížeti. Na stroji našem jest tato ztráta

$$M = \varrho\, i^2\ ,$$

kdež ϱ odpor v elektromagnetech $= 55\ \Omega$ a i intensita magnetisujícího značí, tato intensita $i = 1{\cdot}51$ a bude tedy

$$M = 125{\cdot}4\ .$$

Přihlížíme-li ku této ztrátě při magnetech, obdržíme pro účinnosť stroje výraz:

$$\gamma' = \frac{r_2 \, i'_s{}^2}{(r_1 + r_2)\, i'_s{}^2 + M}$$

čili

$$\gamma' = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + \frac{M}{i'_s{}^2}}$$

dosadíme-li za i'_s známou hodnotu, obdržíme:

$$\gamma' = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + \frac{2\,M}{e_0{}^2}\left(r^2 + \left(\frac{2\,\pi\,L}{T}\right)^2\right)} .$$

Měníme-li vnější odpor r_2, dostupuje účinnosť tato svého maxima při

$$r_2 = \sqrt{r_1{}^2 + \left(\frac{2\,\pi\,L}{T}\right)^2 + \frac{r_1}{\frac{2\,M}{e_0{}^2}}} .$$

Jelikož v případě našem

$$r_1{}^2 + \left(\frac{2\,\pi\,L}{T}\right)^2 = 40{\cdot}114$$

a

$$\frac{r_1\, e_0{}^2}{2\,M} = 35{\cdot}15 ,$$

bude

$$r_2 = 8{\cdot}675\ \Omega .$$

Při tomto odporu nastane maximum pravé účinnosti elektrické

$$\gamma'_m = 90{\cdot}4\ \% .$$

Dosadíme-li hodnotu tohoto odporu do výrazu pro práci ve vnějším vedení, obdržíme

$$P' = 1530\ \text{Watt.} ,$$

tedy praci, která se při nejvýhodnějším elektrickém využitkování stroje koná, hledíme-li současně ku ztrátě energie elektrické v závitech elektromagnetů. —

V přiloženém diagramu jest opětně pravá účinnosť elektrická zobrazena křivkou (γ^1) v měřitku stejném jako účinnosť dřívější. Z obrazu tohoto jde, že účinnosť tato roste ubývajícím odporem, dostupuje maxima při celkovém odporu $r = 8{\cdot}8$. Práce pak vnější při této max. účinnosti dle diagramu $= 1530\ W$, což s výpočtem velmi dobře se shoduje.

V přiloženém diagramu znázorněna jest i změna úhlu (α), o který se měna skutečného proudu vzhledem na vnější sílu elektromotorickou pošine. Na osu X opětně odpor celého obvodu proudového jest nanesen, ve směru osy Y pak naneseny jsou úhly ve čtyřikráte menším měřítku.

Práci elektrickou lze, jak nahoře bylo dovozeno, vypočítati dle vzorce:

$$P = \frac{E_0\, J_0}{2} \cos\alpha ,$$

kdež E_o amplitudu vnější síly elektromotorické, a I_o amplitudu skutečného proudu značí — a $\measuredangle \alpha$ úhel, o který skutečný proud vzhledem na vnější sílu elektromotorickou jest opozděn, tedy úhel, který při geometrickém zobrazení amplitudy tyto svírají.

Jelikož

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi L}{T r}$$

a maximum práce při odporu $r_m = \frac{2\pi L}{T}$ vzniká, bude při max. práci elektrické

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \,, \quad \text{t. j.} \quad \alpha = 45^0 \,.$$

V případě tomto amplituda skutečné síly elektromotorické a amplituda vnitřní čili vlastní síly elektromotorické se rovnají.

Dle diagramu seznáme, že skutečně při 45^0 max. práce elektrická vzniká a velmi dobře s hodnotou výše vypočtenou se shoduje.

V následujících tabulkách obsaženy jsou hodnoty elektrické, a sice obsahuje tabulka I. hodnoty dle pokusů nalezené a tabulka II. hodnoty na základě charakteristiky stroje graficky stanovené

I. (Výsledky experimentální.)

i_s	e_s	r	i'_s	$r i'^2_s$	$r_2 i'^2_s$	γ	$r i'_s + M$	γ'	α
5·127	126·6	24·69	5·694	800·6	793·7	99·15	926	85·71	$14^0\ 23'$
7·419	120·83	16·288	8·24	1106	1091	98·65	1231·4	88·64	$21^0\ 14'$
9·23	114·75	12·43	10·25	1306	1284	98·31	1462·7	89·26	27^0
10·95	112·28	10·06	12·16	1487·5	1451	97·91	1601·6	90·00	$32^0\ 11'$
12·065	102·98	8·53	13·4	1532·9	1498	97·54	1658·3	90·37	$36^0\ 34'$
13·33	98·52	7·39	14·8	1619·4	1572·7	97·16	1744·8	90·12	$40^0\ 35'$

V tabulce této a sice ve sloupcích i'_s a r obsaženy jsou hodnoty experimentem nalezené, a sice i'_s střední hodnota čtverců intensit. Jak nahoře uvedeno bylo, měřena intensita periodického proudu dynamometrem, kterýž, jak známo, střední hodnoty čtverců proudu periodického měří.

Ve sloupci r obsaženy jsou odpory celého obvodu proudového, které, jak již uvedeno, methodou Wheatstonovou stanoveny byly. Z těchto hodnot základních ostatní elektrické hodnoty výpočtem byly nalezeny.

Hodnoty ve sloupci i_s nadepsaném stanoví střední hodnoty jednoduché periodického proudu, vyjádřené v jednotkách Ampèrových.

Jelikož

$$i'_s = \frac{i_o}{\sqrt{2}} \qquad \text{a} \qquad i_s = \frac{2}{\pi} i_o \,,$$

kdež i_0 amplitudu periodického proudu značí, vypočteme dle vzorce

$$i_s = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} i'_s .$$

Sloupec e_s obsahuje střední hodnoty skutečné síly elektromotorické, vypočtené dle vzorce

$$e_s = r i_s .$$

Ve sloupci nadespaném $r\ i'_s{}^2$ obsahuje se práce elektrická, která se koná v celém obvodu proudovém, kdežto ve sloupci $r_2\ i'_s{}^2$ uvedena jest práce elektrická ve vnějším čili v užitečném vedení, vyjádřena v jednotkách Wattových.

Ve sloupci nadepsaném $r i'_s{}^2 + \mathrm{M}$ připočtena jest ku celé práci elektrické ve stroji práce, která k udržování magnetického pole se spotřebuje

$$M = \varrho i^2 = 125{\cdot}4 ,$$

jak výše vypočteno bylo.

Ve sloupcích γ a γ' obsažena jest účinnosť elektrická stroje, a sice obsahuje γ účinnosť elektrickou v procentech vyjádřenou, nehledíme-li současně ku ztrátě energie elektrické v magnetech; kdežto γ' obsahuje účinnosť elektrickou, když se i k této ztrátě přihlíží.

V posledním sloupci uvedeny jsou úhly, o které měna skutečného proudu harmonického vzhledem na vnější sílu elektromotorickou pošinuta jest.

II.

i_s	e_s	r	i'_s	$r_2 i'_s{}^2$	$r i'_s{}^2$	γ	$r i'_s + M$	γ'	α
5·127	126·4	24·6	5·696	791·3	798·1	99·14	923·5	85·68	14° 25′ 47″
7·419	121·7	16·4	8·24	1099·4	1113·6	98·72	1239	88·74	21° 6′ 2″
9·23	116·6	12·6	10·25	1302	1329·6	97·93	1455	89·5	26° 40′ 26″
10·95	110·5	10·06	12·16	1457	1488	97·90	1613·4	90·33	32° 20′
12·065	105·7	8·74	13·4	1533	1570·8	97·6	1696·2	90·4	35° 54′ 51″
13·33	99·5	7·46	14·8	1589	1635·4	97·19	1760·8	90·3	40° 19′
16·3	80·0	4·94	18·14	1550	1619·5	95·75	1744·9	88·86	52° 1′ 51″
19·61	40·0	2·04	21·78	868·2	967·8	89·7	1093·2	79·4	72° 8′ 13″

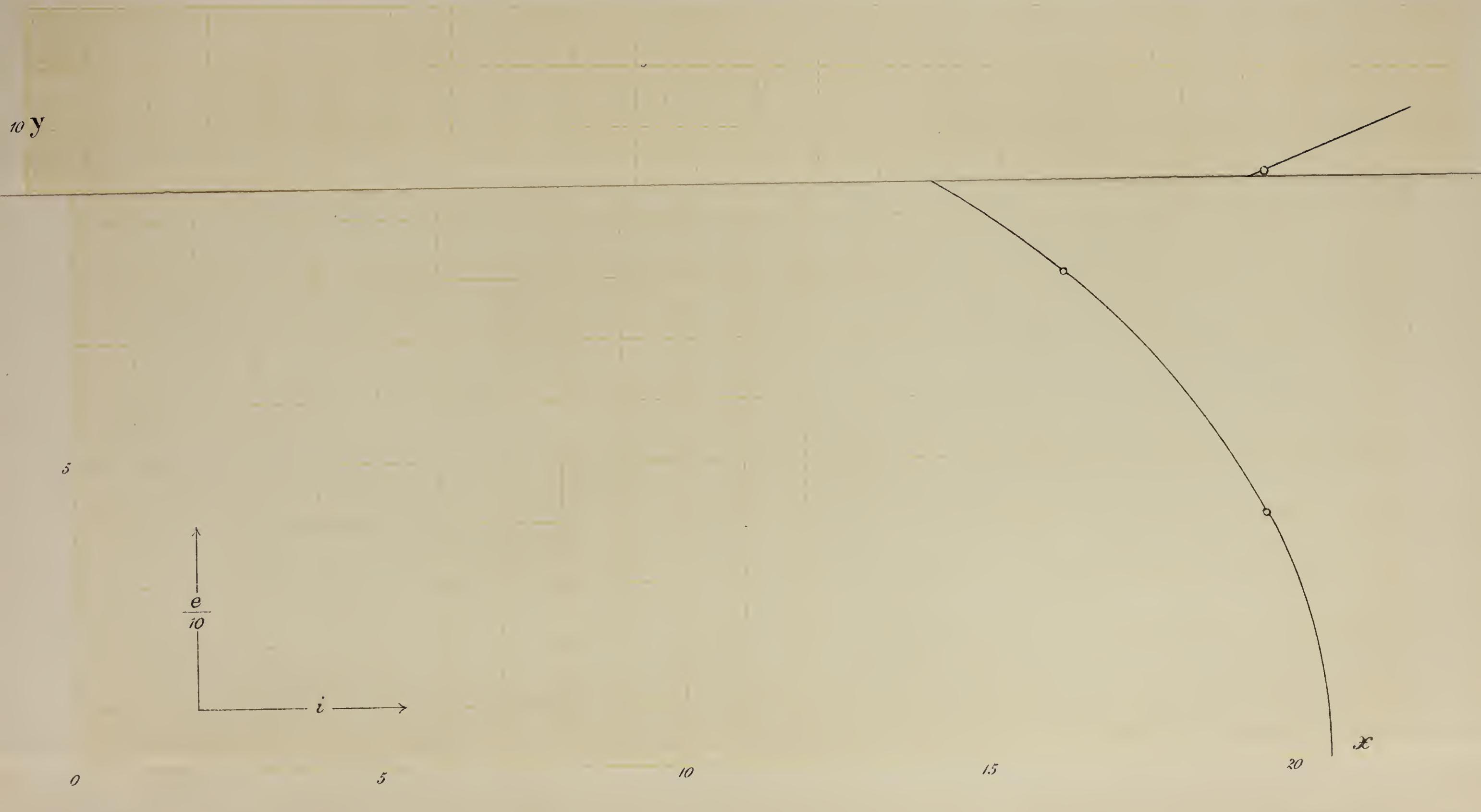
Tato tabulka obsahuje hodnoty elektrické, jak grafickým řešením nalezeny byly. Svrchu uvedené pokusy se strojem uvedeny byly na tvar přímky, a z rovnice přímky stanoveny hodnoty, které pak ku vypočtení os charakteristiky sloužily.

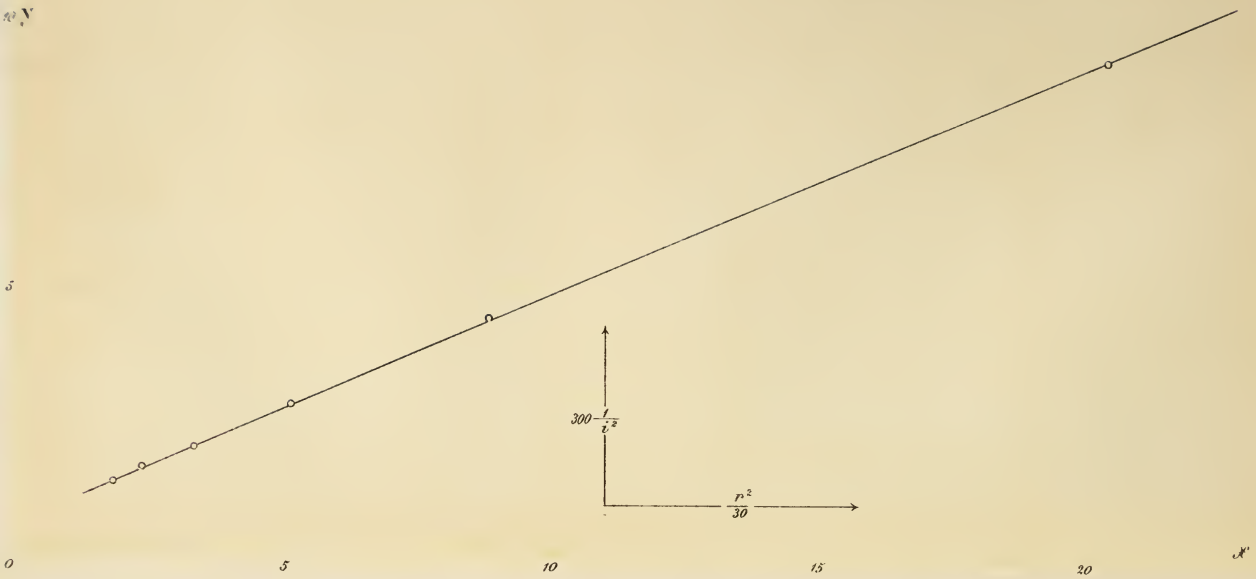
Na základě těchto os sestrojena ellipsa. Ellipsa tato obsahuje střední hodnoty intensity a síly elektromotorické skutečného proudu, co délky na ose X

a V. Příslušný odpor celého obvodu proudového podobně v diagramu se odměří, jak výše uvedeno. Jsou tedy hodnoty i_s, e_s, a r hodnoty, které z diagramu ellipsy, z charakteristiky stroje graficky určeny byly. Ostatní hodnoty, jichž označení jest v úplném souhlasu s označením v tabulce první, vypočteny byly na základě těchto základních, graficky nalezených hodnot elektrických.

Srovnáváním hodnot těchto vychází na jevo, do jaké míry shodují se hodnoty experimentálně nalezené s hodnotami graficky nalezenými. Ze srovnání tohoto jde na jevo, že jednoduché podmínky, které ku theoretickému stanovení působení stroje elektrického za základ byly položeny, a sice: vnější síla elektromotorická mění se harmonicky, a coëfficient vlastní indukce jest hodnotou stálou v těch mezích, ve kterých pokusy provedeny byly, experimentálním výsledkům vyhovují.

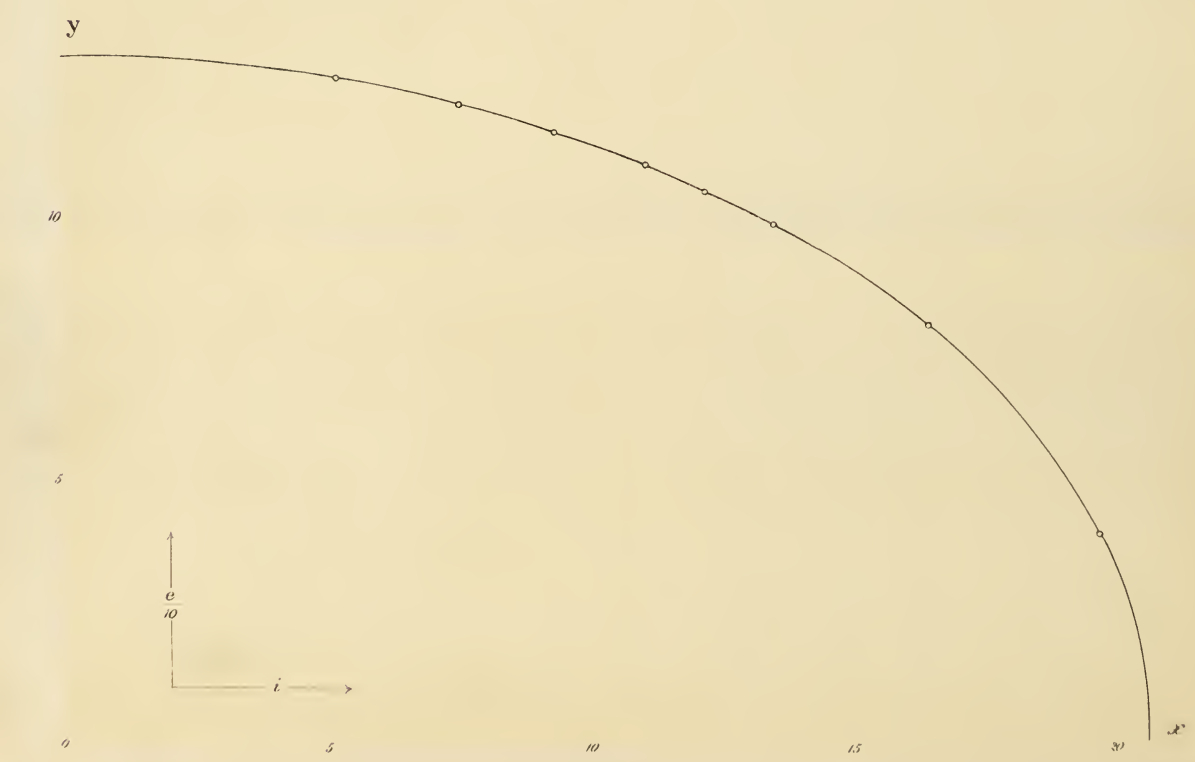
Jest mi konečně milou povinností dosvědčiti, že mi pan Karel Novák, assistent elektrot. ústavu, s kterým jsem společně pokusy s uvedeným strojem provedl, při vypočítávání a zobrazení výsledků experimentálních platně napomáhal.

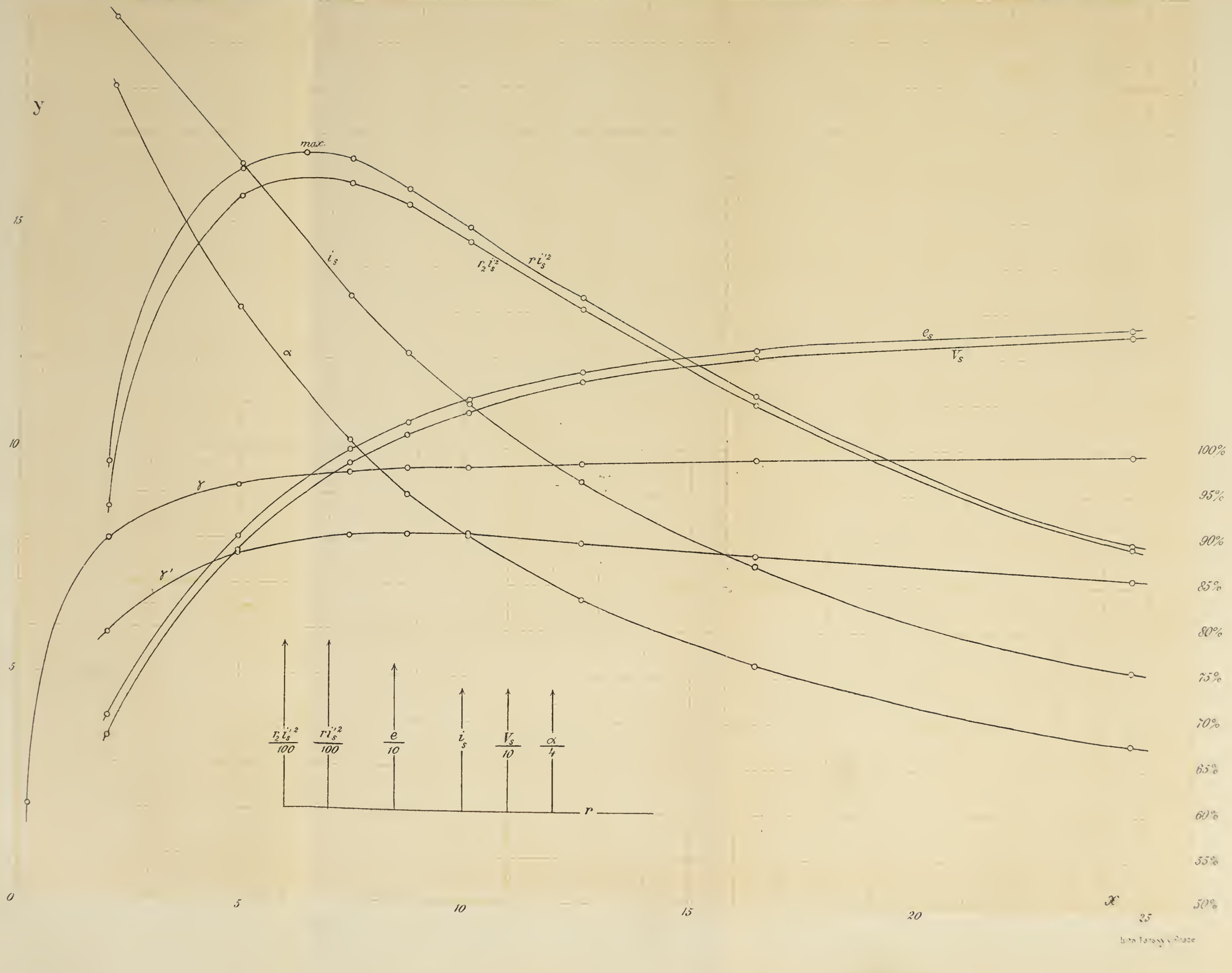

10 y
5
e/10
i
0
5
10
15
20
x

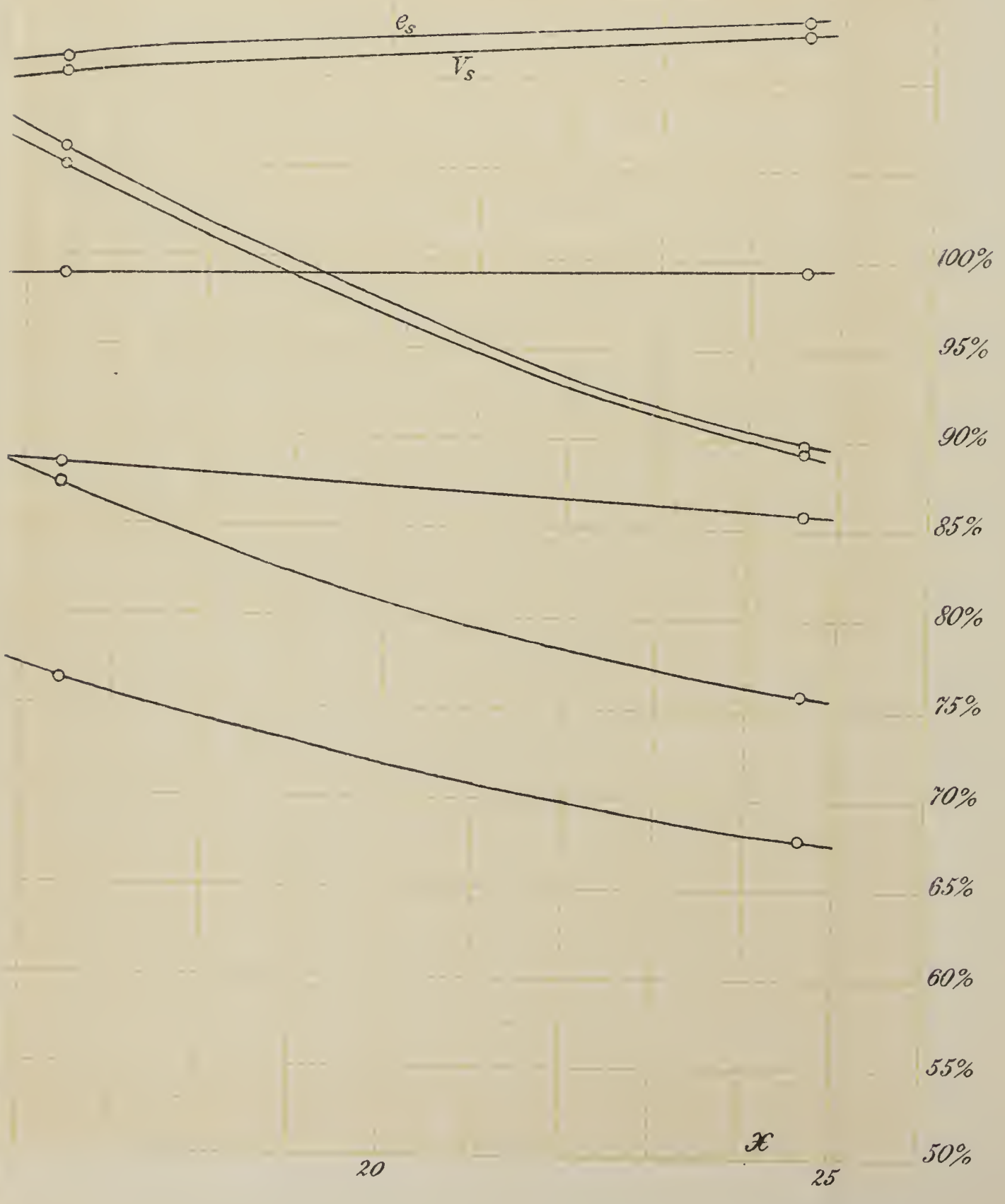


Charakteristika stroje.

Tab. II.




y
max.
i_s
$r_2 i_s'^2$
$r i_s'^2$
e_s
V_s
α
γ
γ'
$\frac{r_2 i_s'^2}{100}$
$\frac{r i_s'^2}{100}$
$\frac{e}{10}$
i_s
$\frac{V_s}{10}$
$\frac{\alpha}{4}$
r
x
0
5
10
15
20
25
100%
95%
90%
85%
80%
75%
70%
65%
60%
55%
50%



Lith. Farský v Praze

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 36.

ANTEDON PYROPA N. SP.

Z PYROPOVÉHO ŠTĚRKU U CHODOULIC.

SEPSAL

ČENĚK ZAHÁLKA.

S TABULKOU O 5 OBRAZCÍCH.

PŘEDLOŽENO DNE 13. KVĚTNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

O zkamenělých Antedonech.

Pozůstatky zkamenělých Antedonů jsou sporé. Nejobyčejnější zbytek jejich jest centrodorsala a vzácnější jsou nálezy, kde vedle centrodorsaly také radialie prvého řádu, po případě i basalie se vyskytují; velmi vzácné pak jsou exemplary, při nichž také buď stopka neb ramena a cirrhy se nalézají. Zkamenělé druhy počínají se objevovati v Juře; pak je nalézáme v křidovém útvaru, v třetihorách a zachovaly se až po dnešní den na rozmanitých místech okeanů.

Z *jurského útvaru* se uvádí:

Antedon pinnata, Goldfuss sp. z vyšší bílé Jury v Solenhofenu = Comatula pinnata Goldf.[1]) = Pterocoma pinnata Agassiz.[2])

Antedon costata, Goldfuss sp. z bílé Jury od Nattheimu = Solanocrinus costatus, Goldf.[3])

Antedon scrobiculata, Münster sp. z bílé Jury u Balingen, ze Streitbergu a j. ve Frankách = Solanocrinus scrobiculatus, Münst.[4]) = Solanocrinus Bronnii Münst.[5])

Antedon aspera, Quenstedt sp. z bílé Jury od Balingen a Streitbergu = Solanocrinus asper, Quenst.[6])

---

[1]) Petrefacta Germaniae I. Str. 203. T. 62. F. 3. — Quenstedt: Petrefactenkunde Deutschlands. I. Ab. IV. Bd. Str. 167. T. 96. F. 20, 21.

[2]) Mém. de la Soc. d. sciences nat. de Neuchâtel I. 1855. Str. 193.

[3]) Petrefacta Germaniae. I. Str. 165. T. 50. F. 7. — Quenstedt: Petref. Deutschl. I. Ab. IV. Bd. Str. 172. T. 96. F. 26—48.
Quenst.: Handbuch der Petrefactenkunde. 1852. T. 51. F. 35, 36.
Der Jura. T. 88. F. 9—15.
H. Carpenter: On the genus Solanocrinus atd. Str. 191—193. T. IX. F. 2.

[4]) Beiträge zur Petrefactenkunde. 1839. I. Str. 89.
Goldfuss: Petrefacta Germaniae. I. Str. 167. T. 50. F. 8.
Quenstedt: Petrefactenk. Deutschl. I. A. IV. B. S. 177. T. 96. F. 52—74.
H. Carpenter: On the genus Solonacrinus atd. Str. 203. T. 10. F. 14—18.
Loriol: Swiss Crinoids. Str. 255.

[5]) Tamtéž: T. 11. F. 7. Quenstedt: Str. 181.

[6]) Petrefactenkunde Deutschl. I. A. IV. B. Str. 182. T. 96. F. 77—90. Der Jura. T. 81. F. 23—33.
H. Carpenter: On the genus Solanocrinus atd. Str. 202. T. 11. F. 19.

Antedon sigillata, Quenstedt sp. z bílé Jury od Nattheimu a Schnaitheimu. = Solanocrinus costatus Goldf.[7]) = Comatula sigillata, Quenst.[8])

Antedon depressa, Carpenter[9]) z bílé Jury od Nattheimu.

Antedon truncata, Carpenter[10]) z bílé Jury od Nattheimu.

Antedon canaliculata, Carpenter[11]) z bílé Jury od Nattheimu.

Antedon complanata, Carpenter[12]) z bílé Jury od Nattheimu.

Antedon d'Orbignyi, Carpenter[13]) z bílé Jury od Nattheimu.

Antedon Tessoni, Carpenter[14]) z Argile de Dives Oxford clay, Vache Noire, Francie.

Antedon decameros, Carpenter[15]) z bílé Jury od Nattheimu.

Z *křidového útvaru* se uvádí:

Antedon Hiselyi, Loriol sp. z Urgonien (svrchní Neocom) od Landeronu (kant. Neuchâtel) = Comatula Hiselyi, Loriol.[16])

Antedon exilis, Lorion sp. z téhož naleziště. = Comatula exilis Loriol.[17])

Antedon Ricordeana, d'Orbigny sp. z Aptien od Gurgy (Yonne) = Decameros Ricordeanus d'Orb.[18])

Antedon depressa, d'Orbigny sp. z Aptien od Gurgy (Yonne) = Decameros depressus d'Orb.[18])

Antedon Schlüteriana, Geinitz sp. z Cenomanu od Plauen = Glenotremites Schlüterianus, Gein.[19])

Antedon rosacea, Geinitz sp. (non Linck) z téhož místa = Glenotremites rosaceus, Gein.[19])

Antedon paradoxa, Goldfuss sp. z Kreidemerglu od Speldorfu u Mühldorfu na Ruhře = Glenotremites paradoxus, Goldf.[20])

Antedon conoidea, Goldfuss sp. z Mucronaten-Kreide na Rujáně = Glenotremites conoideus, Goldf.[21])

---

[7]) Petrefacta Germ. I. Str. 167. T. 51. F. 2a.
[8]) Petref. Deutschl. Str. 176. T. 96. F. 49, 50.
[9]) On the genus Solanocrinus atd. Str. 201. T. 10. F. 12, 13.
[10]) Tamtéž: Str. 194. T. 9. F. 3.
[11]) Tamtéž: Str. 195. T. 9. F. 6.
[12]) Tamtéž: Str. 195. T. 9. F. 9.
[13]) Tamtéž: Str. 196. T. 9. F. 8.
[14]) Tamtéž: Str. 200. T. 10. F. 10.
[15]) Tamtéž: Str. 200. T. 10. F. 11.
[16]) Denkschriften d. allg. schweiz. Gesell. f. d. ges. Natur. 1869. Str. 57. T. 3.
[17]) Tamtéž: Str. 59. T. 4.
[18]) Prodrome de Paléontologie. II. 1850. Str. 121.
[19]) Elbethalgebirge. 1871. I. Str. 92. T. 23.
[20]) Petref. Germ. I. Str. 159. T. 49. F. 9. T. 51. F. 1.
Quenstedt: Petref. Deutschl. Str. 183. T. 96. F. 99.
Geinitz: Elbethalg. Str. 92. T. 23. F. 8—10.
Schlüter: Über einige foss. Comatuliden. Str. 42.
[21]) Petref. Germ. II. Str. 286. T. 160. F. 18.
Schlüter: Zeitschrift d. Deutsch. geolog. Gesell. 1878. Str. 47.

Antedon Retzii, Lungren sp. z Mucronaten-Kreide od Köpinge ve Švédsku = Comaster Retzii, Lundg.[22])

Antedon mystica, v. Hagenow sp. z bílé křídy na Rujáně = Hertha mystica v. Hag.[23])

Antedon Essenensis, Schlüter[24]) z Tourtie (Cenomann) u Essen

Antedon Tourtiae, Schlüter[25]) z téhož naleziště.

Antedon semiglobosa, Schlüter[26]) z Grünsandu od Speldorfu.

Antedon Lettensis, Schlüter[27]) z dolního Senonu (Santon) z pásma Scaphites binodosus od Flamsche (mezi Lette a Coesfeld) ve Westfalsku.

Antedon sulcata, Schlüter[28]) z Mucronaten-Kreide od Köpinge ve Švédsku.

Antedon lenticularis, Schlüter[29]) z Kreidetufu u Maestrichtu.

Antedon concava, Schlüter[30]) z téhož naleziště.

Antedon Lundgreni, Carpenter[31]) z Upper Chalku od Margate.

Antedon sp. z trigoniových a bryozoických vrstev okolí Choroušek.[32])

Z *útvarů třetihorních* uvádí se:

Antedon alticeps, Philippi sp. z mladšího tertieru Sicilského od Palerma = Alecto alticeps, Phil[33])

Antedon Woodwardi, Forbes sp. z Coralline Cragu (svrchní anglický tertiär) od Sutton = Comatula Woodwardi, Forb.[34])

Antedon Ransomi, Forbes sp. z téhož naleziště = Comatula Ransomi, Forb.[34])

Antedon Brownii, Forbes sp. z téhož naleziště = Comatula Brownii, Forb.[35])

Antedon Italica, Schlüter[36]) z Eocenu Monte Spilecco u Bolca, blíže Vicenza.

---

[22]) Om en Comaster och en Aptychus från Köpinge, Öfversicht af Kongl. Vetenskaps. Akad. Förhandligar 1874. No. 3. Str. 61. T. 3. F. 1—13.
Quenstedt: Petref. Deutschl. Str. 183. T. 96. F. 98.
Schlüter: Zeitschrift d. D. geolog. Gesell. Str. 44. T. 2. F. 3—7.

[23]) Jahrbuch f. Mineralogie atd. 1840: Monographie der Rügen'schen Kreide-Verst. Str. 664. T. 9. F. 8.
Quenstedt: Petref. Deutschl. Str. 184. T. 96. F. 101.
Müller: Über den Bau des Pentacrinus caput Medusae. 1843. Str. 28.

[24]) Über einige foss. Comatuliden. Str. 40. T. 1. F. 1—3.

[25]) Tamtéž: Str. 41. T. 1. F. 4—6.

[26]) Tamtéž: Str. 41. T. 1. F. 7—12.

[27]) Tamtéž: Str. 43. T. 2. F. 1, 2.

[28]) Tamtéž: Str. 47. T. 2. F. 8, 9.

[29]) Tamtéž: Str. 46. T. 3. F. 1—3.

[30]) Tamtéž: Str. 48. T. 3. F. 4—7.

[31]) H. Carpenter: On the genus Solanocrinus atd. Str. 213. T. 12. F. 30 a b.

[32]) Frič: Jizerské vrstvy. Str. 121.

[33]) Jahrb. f. Mineralogie etc. 1844. Str. 540. T. 6 B. — Quenstedt: Petref. Deutschl. Str. 185. T. 96. F. 103.

[34]) Monograph of the Echinodermata of the British Tertiaries. Pal. Soc. London 1857. Str. 19, 20. T. 1.

[35]) Tamtéž.
Quenstedt: Petref. Deutschl. 185. T. 96. F. 102.

[36]) Über einige foss. Comatuliden. Str. 48. T. 3. F. 8—10.

Antedon pyropa n. sp.

(Tab. I. Obr. 1.—5.)

Zachován v podobě centrodorsaly. Tato má tvar obráceného jehlance pětibokého s vypuklými pobočnými stěnami. Jehlanec není přímý, nýbrž vrchol jeho pošinut je poněkud ke straně *a b*. Horní plocha je nerovná, poněkud vypuklá a tvoří pětiúhelník se stranami vlnitými, delší než širší. Centrodorsala je skorem tak vysoká jako široká. Šířka její od levé strany ku pravé (od *e* ku *c*) obnáší 3·5 *mm*, šířka od předu do zadu (ku *d*) 3 *mm*, výška 3 *mm*. Otvor centralní jamky jest pětiúhelníkový s křivými okraji a souhlasí co do polohy celkem se stranami horní plochy centrodorsaly. Otvor zaujímá skorem $\frac{1}{3}$ celé šířky horní plochy a jest jako tato delší než širší. Od otvoru centralní jamky vybíhají k rohům horní plochy ložiska pro basalie. Jsou při centrální jamce velmi uzounké a čím dále tím více se rozšiřují. (Obr. 1.) Jich tvar není stejný. Tak se ku příkladu ložisko při straně *d* stejnoměrně rozšiřuje. Ložisko při straně *e* jest až za prostředek svůj velmi uzounké, pouhým okem sotva viditelné a teprve na konci se náhle rozšíří. Tomuto je podobno ložisko při *c*, ukončeno je však kruhovitěji. Zvláštní tvar mají ložiska při straně *a* a *b*. Rozšiřují se k svému středu, dále od středu se opět zužují, ku konci však se opět kruhovitě rozšíří. Ložiska basalií rozkládají se celkem v horní ploše, avšak konce ložiska *c* a *a* jsou prohnuté dolů, ku pobočným hranám centrodorsaly. Okraje ložisek jsou více neb méně vystouplé, zvláště ale vystupují ostře z horní plochy okraje ložiska *b*, jehož konec v rohu pětiúhelníkové plochy horní více nežli ostatní vyčnívají. Rýhy ložisek jsou dosti hluboké. Radialních jamek naše centrodorsala nemá. Po pravé straně každého z pěti ložisek basalií nalézají se blíže centralní jamky podlouhle vejčité vypukliny, v jichž vrcholu je malý (pouhým okem neviditelný) kruhový otvor. Otvor ten jest ústím radialních chodbiček, které sem z centralní jamky přicházejí. Mnohem větší vypukliny viděti jest při levé straně ložisek basalií, které sahají místy až k samému okraji horní plochy. Také tyto mají na svém konci otvor kruhový. Otvor ten není při *b* shora viděti, poněvadž leží již úplně na pobočné straně centrodorsaly. Tyto otvory jsou malé, nejvyšší kloubn plochy cirrh, v nichž ústí chodbičky vycházející z centralní jamky (z dorsalního organu procházela chodbičkou céva do cirrhy). Centralní jamka, v níž nacházel se původně dorsalní organ, jest 0·7 *mm* hluboká a pomalu se zužuje až u samého dna. Na stěnách jejích viděti jest při osvětlení jamky shora deset vypuklých žebírek (obr. 5.), jdoucích shora dolů. Mezi nimi je deset ryh, v nichž nezřetelně jest viděti otvory chodbiček pro cévy jdoucích k cirrhám.

Pobočných stěn jest pět. (Obr. 2, 3, 4.) Jsou mírně vypuklé a oddělené od sebe vyčnívajícími žebírky. Žebírka směřují od rohů horní plochy pětiúhelníkové (tedy od konce ložiska basalií) k dorsalní jamce a jsou uprostřed hlubšími, širšími ryhami opatřeny, kteréžto rýhy se klikatí jako okraje kloub-

ních ploch pro cirrhy. Na každé stěně nalézají se dvě vertikalní řady jamek, kloubních to ploch pro cirrhy. Tvar jejich je rozmanitý; nejhořejší a nejspodnější bývají kruhové, prostřední mají tvar šestiúhelníkový, neb ovalní se šesti úhelníkovým rázem aneb tvaru skorem číslici arabské 8 podobného. Okraje větších kloubních ploch pro cirrhy vyčnívají ostře v podobě hladkých válcovitých žebírek. Kloubní plochy jsou dosti hluboké a mají v nejhlubším místě kruhový otvor, ústí to chodbiček, jimiž procházela céva z dorsalního orgánu do cirrhy. Od nejhlubšího místa kloubní plochy vystupuje u větších kloubních ploch ku pravému i k levému okraji vypuklá hráz (obr. 2., 3.), dělící jaksi kloubní plochu na horní a dolní polovici. Tato vodorovně položená hráz dodává pak některým kloubním plochám tvar arabské 8. Velikosť kloubních ploch je nestejná. Ony nejsvrchnější, jež jsou dílem i v pohledu na horní plochu centrodorsaly viděti (obr. 1., byly již v předu vzpomenuty), jsou nejmenší a pouhým okem těžce viditelny. Vedle nich v druhé vertikalní řadě téže stěny bývají již větší kruhové kloubní plochy, načež rostou ke středu pobočni stěny a pak zase ubývá jejich velikosť k dorsalnímu vrcholu. Polohy kloubních ploch jedné řady alternují všeobecně s polohami kloubních ploch řady druhé nejen na jedné a téže stěně, nýbrž i na řadách sousedních dvou stěn. Méně kde viděti jest, že by kloubní plochy dvou sousedních řad nealternovaly. Počet kloubních ploch jest tento: na stěnách přilehlých k *cd* a *de* (obr. 3.) jsou v každé řadě 4 kloubní plochy; na všech ostatních stěnách (obr. 2.) přilehlých k *ea, ab, bc,* jest v levé řadě po 5, v pravé řadě po 4 plochách kloubních. Dohromady jest tedy kloubních jamek 43.

Dorsalní vrchol jest poněkud šikmo sříznutý a má uprostřed jamku skorem pětibokou. Okraje této jamky jsou lemovány výběžky oněch žebírek, které dělí od sebe pobočné stěny (obr. 4.), částečně i výběžky žebírek, jež děl od sebe dvě vertikalní řady kloubních jamek pro cirrhy u jedné a téže stěny. Jamka dorsalní jest užší nežli jamka centralní a také mělčí (as $\frac{1}{2}$ *mm* hloubky). Stěny jamky této zužují se do vnitř.

Centrodorsala byla původně z vápence, nyní však je v pevný, hnědý limonit proměněná.

Naleziště:

V granátové jámě na pozemcích Chodoulických, při silnici z Chodoulic ku Klapému, v místě, jež sluje »Za dolma«, nalezl jsem Antedon pyropa ve slinitém jílu, vzatého z prostředka pyropového štěrku. Slinitý jíl spolu s pískem granátovým tvoří zde tmel diluvialního pyropového štěrku a pláknutím tohoto slinitého jílu obdržel jsem vedle mnohých jiných zkamenělin také Antedon náš. Granátová jáma měla zde tento profil:

Alluvium.	Černá ornice	0·6 *m*
Diluvium.	Žlutnice	9·0 »
	Pyropový štěrk	0·8 »

Křidový útvar: Mastný slinitý jíl Březenského pásma co základ.

Z této jámy popsal jsem[37]) též největší posud nalezenou zkamenělinu pyropového štěrku: *Scytalia pertusa,* Reuss sp.

Všecky zkameněliny v tomto pyropovém štěrku se vyskytující zaujímají, jak známo, naleziště secunderní a původní naleziště jejich jest zdejší křidový útvar. Tak i náš Antedon pyropa pochází z křidového útvaru a dle hmoty limonitové, v níž je zachován, soudím, že byl původně v slinitém jílu zdejšího pásma Březenského uložen.

Srovnáme-li popsanou centrodorsalu s rody Comatulid, poznáváme, že se shoduje s rodem Antedon, Frém. Poněvadž druhové znaky neshodují se se známými posud druhy Antedonů, dovolil jsem si nazvati tento druh, jejž v pyropových štěrkách diluvialních poprvé jsem nalezl, druhovým jménem »pyropa«.

Zkameněliny, které zprovází náš Antedon pyropa a které jsem rovněž pláknutím slinitého jílu v pyropovém štěrku jam Chodoulických »Za dolma« nalezl, jsou tyto:

Oxyrhina Mantelli, Ag., zuby. (zř.)[38])
Lamna raphiodon, Ag., zuby. (vz.)
Otodus appendiculatus, Ag., zuby. (zř.)
Ammonites. L.
Hamites verus, Frič. (vz.) L.
Baculites Faujasi Lamk. (zř.) L.
Toxoceras. (vz.) L.
Trochus Engelhardti, Gein. (v. h.) L.
Solarium Baculitarum, Gein. (h.) L.
Turbo decemcostatus, v. Buch. (v. h.) L.
Natica vulgaris, Reuss (h.) L.
Scalaria Philipsi, Reuss (vz.) L.
Phasianella lineolata, Reuss (zř.) L.
Turritella acicularis, Reuss (zř.) L.
Mitra Römeri, Reuss (zř.) L.
Aporhais stenoptera, Goldf. (v. h.) L.
Rissoa Reussi, Gein. (v. h.) L.
Cerithium Lužicianum, Gein. (v. h.) L.
Cerithium fasciatum, Reuss (h.) L.
Cerithium binodosum, Röm. (zř.) L.
Inoceramus. Úlomky zámků a misek velkých exemplárů (v. h.) V.
Arca undulata, Reuss (vz.) L.
Siliqua truncatula, Reuss sp. (vz.) L.
Plicatula nodosa, Duj. (h.) L. V. Někdy skořápka vápnitá a jádro limonitové.

---

[37]) Über Isoraphinia texta u. Scytalia pertusa etc. Sitzungsb. d. kais. Akademie d. Wissenschaften. J. 1885. S. 649. T. 2. F. 3—7.

[38]) Zkratky v závorkách značí poměrné množství, v jakém se druhy ty objevují, a sice v. h. = velmi hojně, h. = hojně, zř. = zřídka, vz. = vzácně. Zkratky L. a V. značí, zdali hmota zkamenělin jest z limonitu (L.), aneb vápence (V.); při tom podotýkám, že zuby objevují se v obyčejné podobě, jako ve vrstvách útvaru křidového je nalézáme.

Gastrochaena amphisbaena, Goldf. (zř.) L. V.
Spondylus spinosus, Goldf. (vz.) V.
Ostrea semiplana, Sow. (h.) V.
Exogyra lateralis, Reuss (vz.) L.
Terebratula semiglobosa, Sow. (zř.) V.
Terebratulina striatula, Mant. (h.) L.; často skořápka vápnitá a jádro limonitové.
Rhynchonella plicatilis, var. Cuvieri (v. h.) V.; zřídka z L.
Terebratulina gracilis, Schlb. (v. h.) V., (zř.) L. — Někdy jádro limonitové a skořápka vápnitá.
Magas Geinitzii, Schlb. (h.) L., (zř.) V. — Často skořápka vápnitá a jádro limonitové.
Serpula gordialis, Schl. (zř.) V.
Cidaris sceptrifera, Mant. ostny (v. h.) V., (h.) L.
Cidaris sp. desky a ostny. (h.) V., L.
Micrabatia coronula, Goldf. sp. (h.) L.
Parasmilia centralis, Mant. sp. (zř.) L.

Ostatní koraly z tohoto naleziště přenechal jsem k studiu panu Dr. Fil. Počtovi, jenž poznává v nich:

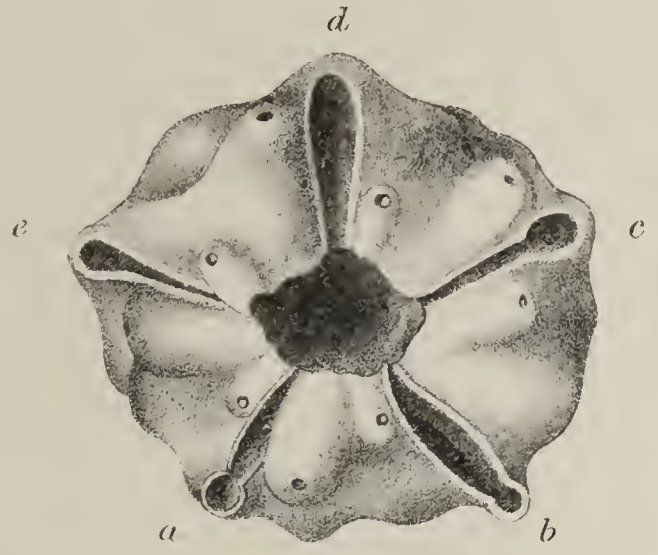
Trochocyathus conulus, Phil. sp. L.
Trochocyathus Harveyanus, M. Edward. L.,
mimo to několik nových druhů rodu Trochocyathus.
Ventriculites angustatus, Röm. (h.) L.
Ventriculites radiatus, Mant. (v. h.) L.
Ventriculites odontostoma, Reuss sp. (h.) L.
Craticularia subseriata, Röm. (v. h.) L.
Leptophragma fragilis, Röm. (zř.) L.
Plinthosella squamosa, Zitt. (vz.) L.
Rhizopoterion cervicornis, Goldf. sp. (v. h.) L., (h.) V.
Scytalia pertusa, Reuss sp. (vz.) V.
Calcispongie neurčitelné (zř.) L.
? Scyphia parvula, Reuss (zř.) L.
Amorphospongia globosa. v. Hag. (h.) V., (zř.) L.

a mnoho jiných posud neurčených, aneb pro špatnou zachovalosť vůbec neurčitelných zkamenělin.

Vysvětlení obrazců na tab. I.

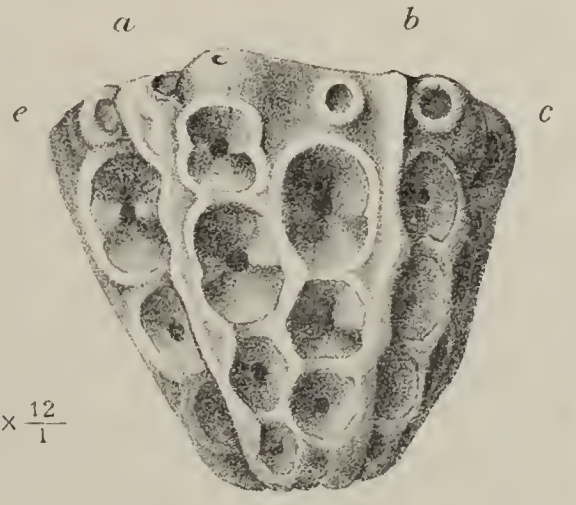
Antedon pyropa n. sp. z pyropového štěrku u Chodoulic »Za dolma«. Původně z Březenských vrstev křidového útvaru. Centrodorsala.

Obr. 1. Pohled shora s centrální jamkou a ložisky pro basalie.
Obr. 2. a 3. Pohled se strany s kloubními jamkami pro cirrhy.
Obr. 4. Pohled zdola s jamkou dorsalní.
Obr. 5. Pohled dovnitř centralní jamky.
Zvětšení 12násobné u všech obrazců.
Kresleno podle 40násobného zvětšení mikroskopem.



× 12/1

1.



× 12/1

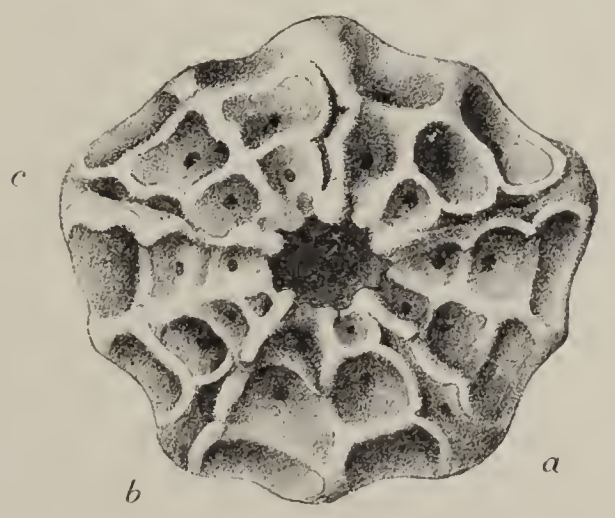
2.

5.

× 12/1

× 12/1

3.



× 12/1

4.

Kreslil dle přír. Č. Zahálka. *Lith. Fanskyj v Praze.*

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 37.

PŘÍSPĚVEK KU POZNÁNÍ RÁZU ZVÍŘENY MOŘSKÉHO JÍLU A NA NĚM ULOŽENÉHO PÍSKOVCE WALBERSDORFSKÉHO V UHRÁCH.

SEPSAL

VLAD. JOS. PROCHÁZKA.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ČERVNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

1. O zvířeně mořského jílu.

Snadno pochopitelné příčiny přiměly, ano i donutily odborníky na prozkumu miocaenu rakousko-uherského súčastněné všímati sobě bedlivě jílu v cihelnách walbersdorfských přístupného a na povětšině krásně zachovalé schránky foraminifer, kalichů korálů, misek a ulit mollusků, schránek ostrakodů, rybích otolithů a mořských ježků bohatého. Zájem pro jíl walbersdorfský byl zvýšen, když domněnka byla vyslovena, že to snad schlier, a neustále byl udržován a živen, když napotomnými resultáty dřívější závěry byly vyvráceny, aniž byly s to, aby vytkli přesně jeho stanovisko vůči jílům faunisticky a stratigraficky zevrubně prozkoumaným.

Přečetše dosavadní pojednání o jeho zvířeně od různých odborníků a porovnavše jich výsledky a úsudky o její rázu, poznáme, že jsou mínění trojího: jedni tvrdí, že ho přičísti sluší na základě zvířeny ku ottnangskému schlieru, kdežto jiní se domnívají, že to není nic jiného, než aequivalent jílu badenského, kdežto zase opět jiní pokládají jeho zvířenu za směsi zvířeny jílu badenského a schlieru ottnangského. Konečně připouští se i domněnka za dosti správnou, že některé jeho živočišné elementy poukazují ku shodě s grundským horizontem.

Vzhledem k významu, jaký jeho zvířeně oprávněně přísluší, doufám, že nebude zbytečno, uvedu-li veškeré názory dosud o její rázu proslovené u krátkém výtahu a v chronologickém pořadí.

První zprávu o tomto jílu a jeho zvířeně sdělil prof. dr. *R. Hoernes.*[1]) Ve svém náčrtku usuzuje jednak z petrografického habitu walbersdorfského sedimentu, jednak že byl v něm našel misky druhu *Pecten denudatus* a několik špatně zachovaných otisků mořských ježků, jakož i úlomky druhů rodů *Anatina* a *Tellina*, shodné s oněmi ottnangského schlieru, že jest pravděpodobno, že walbersdorský jíl náleží horizontu schlieru ottnangského.

Za několik měsíců po uveřejnění oné zprávy vydal se dr. *Th. Fuchs*[2]) do walbersdorfských cihelen a shledal, že tamější jíl se schlierem není ani

---

[1]) *R. Hoernes.* Ein Vorkommen des Pecten denudatus und anderer Schlier-Petrefacte im ausseralpinen Theile des Wiener-Beckens. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1884, str. 373.

[2]) *Th. Fuchs.* Über die marinen Tegel von Walbersdorf mit Pecten denudatus. Verh. der k. k. geolog. Reichsanst. 1884, str. 373.

po stránce petrografické ani faunistické shodný, ba že od tohoto liší se tak jako jíl badenský, s nímž ho ztotožňuje. Zvířenu pak poznává jako badenskou a po druzích pro schlier ottnangský význačných nenachází ani stopy.

Asi po roce prof. dr. *F. Toula*[3]) navštívil Walbersdorf. Zjistiv tam pro schlier ottnangský významné druhy jako *Pecten denudatus, Anatina Fuchsi, Brissopsis ottnangensis* vyjádřil se ve své práci určitě, že walbersdorfský jíl přísluší horizontu schlieru ottnangského.

K názoru odchylnému od dřívějších dospěl *E. Kittl.*[4]) Jeho výsledky a úsudky mají tím větší cenu, jelikož zakládají se na pozorování zvířeny, již sám byl našel v tamějších jílech. *Kittlovi* se také povedlo rozřešiti záhadu, kterak že *Th. Fuchs* ve walbersdorfských jílech nasbíral zvířenu totožnou se zvířenou badenského jílu. Přesvědčiť se totiž, že *Th. Fuchs* skoupil veliké množství skořápek z lokalit dolnorakouských, badenské a t. d. od cihlářů, kteří přišli odtud do cihelny walbersdorfské, přinesše s sebou zásobu ulit a misek mollusků z cihelen badenských, möllersdorfských a t. d. Tato okolnosť byla mu výstrahou a přinutila ho zároveň k jedině správnému sbírání zkamenělin v tamějším jílu a k důkladnému prohlédnutí oněch skořápek, jež mu nabídli dělníci ku koupi. Takovým způsobem podařilo se mu dosíci materiálu do těch dob nejbohatšího. Porovnav ho se zvířenou badenských jílů okolí vídeňského, jílů ostravských a schlieru ottnangského, dospěl *E. Kittl* k názoru, že zvířenu walbersdorfského jílu nelze zařaďovati ani do obvodu zvířeny badenské ani schlieru ottnangského, nýbrž že jest třeba, aby jí bylo vymezeno přechodní stanovisko mezi oběma, protože představuje směsi složenou ze zástupců obou těchto typů.

Ve své druhé zprávě o zvířeně jílu walbersdorfského dr. *R. Hocrnes*[5]) přiznává se sice, že názor *E. Kittlův* je správný a že mu tudíž ničeho vyčítati nelze, ale myslí, že třeba bráti zřetel i k druhům, jako na př. *Cerithium lignitarum* a *Pyrula rusticula*, a že přičísti jim třeba důležitosť as takovou, jaká se jim dostává vzhledem k jich velikému individuelnímu množství v píscích grundských. Tím sobě vysvětlíme, jak že mohl s lehkou myslí vysloviti myšlénku, když od oněch druhů toliko po jednom exempláři v cihelnách walbersdorfských byl našel, že zmíněné druhy svědčí pro příslušnosť walbersdorfských jílů ku horizontu grundskému.

Jak ze všeho zde pověděného je patrno, nebylo dosud ustáleného názoru o rázu walbersdorfské zvířeny a o tom, které facies ji přičísti je. Názory tuto uvedené buďto se na vzájem vyvracejí anebo sobě částečně odporují.

Tato nejistota a kolísavosť jako i naléhavá nutnosť konečně rozřešiti a správně zodpověděti otázku, zdali opravdu přichází pravý schlier se zvířenou ottnangskou ve středu zaalpského miocaenního zálivu a jestli, jaký je vztah

---

[3]) *F. Toula.* Über den marinen Tegel von Walbersdorf bei Mattersdorf in Ungarn. Verh. der k. k. geolog. Reichsanst. 1885, str. 245.

[4]) *E. Kittl.* Über den miocaenen Tegel von Walbersdorf. Annal. des k. k. Hofmuseum 1886, I. svaz.

[5]) *R. Hoernes.* Versteinerungen aus dem miocaenen Tegel von Walbersdorf. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanst. 1891, str. 131.

mezi ní a zvířenami badenských jílů a slínů bathymetricky vyšších niveaux než jílů těchto, přiměla dvorního radu *D. Stura*, se zevrubným výzkumem geologickým vídeňského okolí zaměstnaného, podnítiti opětný prozkum faunistických okolností walbersdorfských jílů bez ohledu na výsledky předešlých prozkumů.

Za tím účelem odebral se 14. září 1890 doprovázen dr. *A. Bittnerem* do walbersdorských cihelen, na které exkursi i pisatel těchto řádek byl súčastněn, jemuž zpracování tam nasbíraného a od dělníků skoupeného fossilního materiálu bylo přenecháno.

Po příkladu dolnorakouských cihlářských dělníků i zdejší nabízeli nám zkameněliny ku koupi. Zkušenostmi *E. Kittlovými* poučeni, brali jsme zřetel ku zbarvení a velikosti nabízených misek, ulit atd., pátrajíce pilně po skořápkách cizích, zbytku to snad oněch, jež dělníkům zbyly ze zásoby dolnorakouské. Po důkladném a nepřetržitém sledování této okolnosti a vyčerpavše zásobu, přesvědčili jsme se, že po dolnorakouských zkamenělinách tuto žádných známek již není, že dělníci je patrně zahodili, přesvědčivše se, že je více nezpeněží, a sbírali toliko zkameněliny, jak jim při zimním kopání se byly namanuly.

Majíce vědomí, že fossilní materiál z walbersdorfských jílů byl skutečně nalezen toliko v těchto a potěšeni jsouce slibem dělníků, že v zimě, kdy jíl se kope a k jarním a letním pracím připravuje, budou pilně sbírati skořápky, opouštěli jsme cihelny.

Mohutnosť jílů walbersdorfských v té době odhadnouti ještě nelze. Jsou sice hluboko skopány, leč prokopány nejsou. Co o ní lze nyní říci, je asi to, že je značná. Ve stráni u první walbersdorfské cihelny možno pak i vypozorovati, že jíl pokrývá vrstva pískovce a pískovcových skal na skořápky zejména gasteropodů a lamellibranchiatů bohatých (o které zvířeně později tuto bude promluveno), na nichž leží mohutná vrstva žlutnice.

Jíl ve stráni je ve své hořejší polovině žlutě, v dolní tmavošedě zbarven. Je-li tento čerstvý, je až tmavý, vyschlý nabývá barvy světlopopelavé. Žlutý jíl od popelavého po petrografické stránce se neliší. Jsouce plaveny nezanechávají kromě živočišných schránek ničeho. Jich minerálná hmota rozpouští se ve vodě úplně. Po slídě nacházíme nepatrných stop, vyskytne-li se vůbec, není nikdy tak hojná jako v pravém schlieru. Čím více do hloubky, tím je jíl walbersdorfský badenskému jílu na pohled podobnější. Zbarvení hořejší části na žluto není jílu původní a třeba je odvoditi od prosakování vody železité, tudíž od processu druhotního. Tím, že tento jíl do hloubky nabývá vzezření jílu badenského, není ještě doložen názor, že by zde badenský jíl podstýlal schlier ottnangský, jak dr. *E. Tietze*[6]) se domnívá. Poslednímu mínění odpírá zvířenný ráz spodních těchto lavic jílu waldbersdorfského, v nichž, jak budiž i tuto podotknuto, přicházíme na zvířenu od oné vyšších lavic nerozdílnou.

Jednak pískovec uložený na žlutě zbarvený jíl, jednak poměr tohoto ku spodnímu šedému, jednak že jíl nabývá do hloubky vzezření poněkud odchyl-

---

[6]) *E. Tietze*. Die Versuche einer Gliederung des unteren Neogaen in den österreichischen Ländern, 2. Folge. Zeitschrift der deutschen geologisch. Gesellsch. 1886, str. 85.

ného od vyschlého jílu hořejší části, donutily bráti zřetel netoliko k molluskům a korálům, ale zároveň i k mikrofauně.

Především běželo o to, aby stanoveno bylo, zda a do jaké míry jsou zvířeny oněch různě zbarvených lavic spříbuzněny a odchylny a zda zvířena žlutého jílu souhlasí s onou dolního šedého.

Aby bylo vyhověno poslední okolnosti a předešlo se všelikým pochybnostem, jaké vzbuzují úsudky činěné na základě mikrofauny, jež bylo třeba bráti z předu v úvahu, byl plaven jíl toliko ze skořápek vyškrabaný a hleděno k tomu, aby živočišné schránky vyplavené ze žlutého jílu nebyly smíchány s oněmi jílu šedého. K dotvrzení všeho toho byl plaven kus jílu šedého ze spodní lavice a jeho zvířena kontrolována se zvířenou šedého jílu vyškrabaného ze skořápek temně zbarvených.

Následující seznam obsahuje vedle makrofauny tehdy skoupené a nasbírané i mikrofaunu způsobem dříve popsaným obdrženou. Aby zabráněno bylo pochybnostem, pojal jsem do seznamu v kolonně žlutého jílu mikrofaunu vyplavenou z jílu schránek *Solenomya Doderleini*, *Pholadomya sp. Pecten denudatus* a jader mořského ježka *Brissopsis ottnangensis*. V kolonně pak jílu šedého jest vepsána zvířena vyplavená z jílu různých skořápek a zvířena zmíněného kusu.

		Vyplaveno ze					
		žlutavého					šedo-modrého
		jílu skořápek					
		Brisopsis Ottnangensis	Solenomya Doderleini	Pholadomya sp.	Pecten denudatus	různých druhů	kus z dolní vrstvy zářezu
	Foraminifera.						
1	Biloculina ringens Lam.	.	.	1	.	.	.
2	» affinis d'Orb.	.	.	.	.	.	1
3	» depressa d'Orb.	.	.	2	2	2	.
4	» depressa d'Orb. var. platystoma Rss.	.	.	.		2	.
5	Spiroloculina excavata d'Orb.	1	.	1	2	.	.
6	» canaliculata d'Orb.	.	.	.	1	.	.
7	» tenuis Čžiž. sp.	.	.	1	.	.	.
8	Miliolina seminulum Linné. sp.	2	22	38	8	26	32
9	» Bucheana d'Orb.	.	1	.	.	.	1
10	» secans d'Orb.	.	.	.	.	1	.
11	» Partschii d'Orb.	.	6	5	3	5	4
12	» pulchella d'Orb.	.	.	2		.	1
13	» foeda Rss.	2	4	11	2	.	2
14	» sp.	.	.	.	.	1	.
15	» consobrina d'Orb.	.	.	.	.	1	.
16	Cornuspira angigyra Rss.	.	.	.	.	1	.
17	Textularia carinata d'Orb.	42	28	41	29	46	43
18	» sagittula Defr.		1	1	4	7	6
19	» gramen d'Orb.	.	.	.	.	.	3
20	» cf. subangulata d'Orb.	.	.	.	.	.	1
21	» abbreviata d'Orb.	.	.	.		.	1
22	» agglutinans d'Orb.	.	.	4	.	5	11
23	» budensis Hantk.	.	1	.	.	.	.
24	» sp.	.	.		4	.	.
25	Clavulina communis d'Orb.	20	13	28	9	12	6
26	Bulimina pyrula d'Orb.	20	18	12	40	43	31

		Vyplaveno ze					
		žlutavého					šedo-modrého
		jílu skořápek					
		Brisopsis Ottnangensis	Solenomya Doderleini	Pholadomia sp.	Pecten denudatus	z různých druhů	kus z dolení vrstvy zářezu
27	Bulimina pupoides d'Orb.	5	.	26	1	.	.
28	» ovata d'Orb.	6	.	.	.	.	.
29	» Bucheana d'Orb.	11	2	.	8	1	.
30	Chilostoma ovoidea Rss.	3	8	23	13	2	.
31	Nodosaria laevigata d'Orb.	.	.	.	.	2	.
32	» nodifera Neugeb.	.	4	.	.	.	.
33	» cappelifera Neugeb.	.	5	.	6	1	5
34	» hispida d'Orb.	.	.	.	.	1	
35	» trichostoma Rss.	1	3	1	6	7	6
36	» tenuis Neugeb.	.	.	1	.	.	.
37	» filiformis d'Orb.	.	1	.	2	.	
38	» communis d'Orb.	.	.	.	1	2	.
39	» pauperata d'Orb.	1			.	.	1
40	» apporoximata Rss.	.	.	.	.	1	
41	» guttifera d'rOb.	1	2	.	.	.	2
42	» Adolphina d'Orb.	1	1				.
43	» scabra Rss.	.	4	.	2	6	.
44	» cf. fissocostata Gümb.	.	.	.	.	1	.
45	» sp.	.	.	3	.	.	.
46	» sp.	.	.	.	.	1	.
47	Frondicularia inequalis Costa	.	.	.	.	.	1
48	Marginulina variabilis Neugeb.	.	2	3	5	3	2
49	» deformis Neugeb.	.	.	.		1	.
50	» glabra d'Orb.	.			.	1	1
51	Cristellaria orbicularis d'Orb.	.	1	1	3	.	.
52	» cf. clypeiformis d'Orb.		.	.	.	.	1
53	» intermedia d'Orb.	.	.	1	1	.	
54	» depauperata Rss.	.		1	.		
55	» arcuata d'Orb.	.	1	.	.	.	.
56	Polymorpha rugosa d'Orb.	.	.	1	.	.	.
57	» austriaca d'Orb.	.	.	5	5	3	7
58	» inequalis Rss.	.	1	1	1	1	.
59	» problema d'Orb.	3	2	1	.	.	
60	Uvigerina pygmea d'Orb.	72	32	40	60	89	44
61	» sp.	22	5	.	.	.	
62	Globigerina regularis d'Orb.	13	18	31	1	13	16
63	» bulloides d'Orb.	6	4	7		.	.
64	» bulloides d'Orb. var. triloba Rss.	5	75	13	49	.	.
65	» biloba d'Orb.	.	1	1	.	2	28
66	» concinna Rss.	.		.		2	7
67	Orbulina universa d'Orb.	1	10	5	8	3	5
68	Pullenia sphaeroides d'Orb. sp.	38	6	10	11	1	3
69	Sphaeroidina bulloides d'Orb.	22	9	.	18	18	9
70	Truncatulina lobatula d'Orb.	10	10	18	11	12	7
71	» Dutemplei d'Orb.	48	34	36	29	19	16
72	» Haidingeri d'Orb.	.	3	1	1	.	
73	» Ungeriana d'Orb.	30	8	30	12	21	8
74	Epistomina Partschiana d'Orb. sp.	7	9	14	10	18	10
75	» Partschiana d'Orb var. nana Rsš.	10	39	19	25	38	15
76	Pulvinulina Hauerii d'Orb. sp.	.	4	3	1	1	.
77	» sp.	.	.	.		6	.
78	Rotalia Soldanii d'Orb.	3	.	3	2	1	
79	Nonionina communis d'Orb.	13	17	16	10	22	35
80	» umbilicatula Montag. sp.	53	14	30	28	8	4
81	» fallax Čžiž.	.	.	.		1	.
82	» tuberculata d'Orb.		1	1	.		.
83	» nov. form.	.	.	.	.	1	.

		Žlutavý	Šedomodrý
		jíl	
	Anthozoa.		
84	Ceratotrochus multispinosus Mickt. sp.	.	19
85	» multeserialis M. Edw. et H. . . .	.	8
	Vermes.		
86	Serpula contortoplicata Rss.	.	5
87	» sp.	.	1
	Echinodermata.		
88	Brissopsis, Ottnangensis R. Hoern.	59	4
89	Echinus cf. Hungaricus Laube.	1	1
	Lamellibranchiata.		
90	Corbula gibba Olivi	5	35
91	Tellina ottnangensis R. Hoern.	7	1
92	Solenomya Doderleini May.	28	12
93	Pectunculus pilosus Linné	.	1
94	Chama gryphina Lam.	.	1
95	Arca Turonica Duj.	.	1
96	Nucula spec.	4	1
97	Pecten denudatus Rss.	19	7
98	» comitatus	5	5
99	Pholadomya spec.	5	7
100	Ostrea cochlear Poli.	2	5
	Gasteropoda.		
101	Ringicula buccinea Desh.	.	6
102	Mitra (Callithea) cupressina Brocc.	.	1
103	Terebra (Acus) fusiformis M. Hoern.	.	1
104	Buccinum (Zeuxis) restitutianum Forst.	.	15
105	» (Caesia) vulgatissimum May.	.	1
106	» (Hima) granulare Bors.	.	1
107	Onisca sp.	.	1
108	Cassis (Cassidea) cypraeiformis Bort.	.	2
109	Cassidaria (Galeodea) cingulifera R. H. u. A. . .	2	5
110	Chenopus (Aporrhais) pes pelecani Phil.	.	4
111	» » alatus Eich.	4	16
112	Murex (Trophon) vaginatus Jan	1	26
113	Pyrula (Ficula)? cingulata Bronn.	1	.
114	» (»)? geometra Borson.	1	.
115	Fusus Hössi Partsch.	.	1
116	Cancellaria Saccoi R. H. u. A.	.	1
117	Pleurotoma (Drillia) Allionii Bell	1	6
118	» » obtusangula Brocc.	.	1
119	» (Dolichotoma) cataphracta Brocc. . .	1	2
120	Turritella turris Bast.	.	1
121	Scalaria scaberrima Michti.	.	1
122	Natica helicina Brocc.	3	60
123	» sp.	.	2
124	» redempta Michti.	1	.
125	Chemnitzia Reussi M. Hoern.	.	3
126	Adeorbis Woodi M. Hoern.	.	1
127	Turbonilla sp.	.	1
128	Dentalium tetragonum Brocc.	1	4
129	» entalis Linné	.	2

		Žlutavý			Šedomodrý		
		jíl					
	Ostracoda.						
130	Cythereis asperrima Rss.	1	.	4	2	6	6
131	» nov. form.	.	2	8	2	9	5
132	Cytheretta compressa Münst.	.	3	6	1	1	2
133	» abscissa Rss.	.	6	2	2	1	
	Balanidae.						
134	Balanus sp. (Scutum)		1			.	
	Pisces.						
135	Otolithus (Gadus) cf. elegans Koken.		10			1	
136	» » nov.-form.		3			1	
137	» (Macrurus) nov.-form.		1			.	
138	» » nov.-form.		.			4	
139	» » nov.-form.		1			2	
140	» (Berycidarum) moravicum nov.-form. .		5			2	
141	» (? gen.) spec.		1			.	
142	» (Gobius) moravicus nov.-form.		2			.	

V měsíci březnu m. r. navštívil pan dvorní rada *D. Stur* za účelem opětného prozkumu walbersdorfského okolí tamější cihelny; i byl radostně překvapen tamními dělníky, kteří nabízeli mu své bohaté zásoby krásných skořápek, misek mollusků, polyparií korálů, schránek mořských ježků, rybích otolithů atd. Materiál tento, jak následující seznam dosvědčuje, je na druhy měkkýšů nejbohatší ze všech, jež tam dosud byly nasbírány.

Po skořápkách jílů dolnorakouských nebylo v něm i tentokráte ani stopy. Převážná většina jeho exemplářů byla nasbírána v nejspodnějších lavicích zářezu, ve žlutém jílu shledán toliko malinký počet druhů.

Do tohoto seznamu jsem pojal pouze makrofaunu, nikoliv mikrofaunu, maje za to, že ráz této byl vystižen dosti ostrými znaky v seznamu předešlém. I tentokráte odděleny jsou schránky žlutě zbarvené od tmavých a uvedena zvířena žlutého i šedivého jílu.

Úmyslně jsem seznamy walbersdorfských kořistí zkamenělin uvedl o sobě, a to hlavně i z toho důvodu, abych podal důkaz, že zvířena jílu žlutého neliší se praničím od zvířeny jílu tmavého, kterýžto rozdíl by poukazoval k tomu, že tu máme dvě faunisticky rozdílné vrstvy jílu.

		Žlutavý	Šedo-modrý
		jíl	
	Anthozoa.		
1	Ceratotroclus multiserialis Michti sp.	.	1
2	» multispinosus M. Edw. et H.	8	52
3	» nov. form.	.	1
4	Flabellum Roissyanum M. Edw.	.	2
5	» siciliense (non M. Edw. et H.) A. E. Reuss.	.	1
	Vermes.		
6	Serpula contortoplicata Rss.	.	8
	Echinodermata.		
7	Brissopsis Ottnangensis R. Hoern.	.	12
	Bryozoa.		
8	Creusia Hoernesi Rss.	.	1
9	Ceriopora globosa Rss.	.	1
10	Lepralia violacea Johnst.	.	1
	Lamellibranchiata.		
11	Corbula gibba Olivi.	4	64
12	» carinata Duj.	2	.
13	Mactra triangula Rss.	.	3
14	Lucina Dujardini Desh.	.	1
15	» leonina Bast.	.	1
16	Tellina ottnangensis R. Hoern.	.	16
17	Leda clavata Calc.	1	.
18	Venus multilamella Lam.	.	3
19	Dosinia cf. orbicularis Agass.		1
20	Cardita rudista Lam.	.	1
21	» Partschi Goldf.	.	2
22	» Jouanneti Bast.	1	.
23	» cf. Transylvanica M. Hoern.	1	.
24	» cf. crassicosta Lam.	.	1
25	Solenomya Doderleini Mayer	5	16
26	Pholadomya sp.	5	17
27	Pectunculus pilosus Linné	.	1
28	Pecten denudatus Rss.	.	5
29	» comitatus Font.	.	9
30	» sp.	.	1
31	» cristatus Brocc.	.	1
32	Ostrea cochlear. Poli	3	7
	Gasteropoda.		
33	Conus (Leptoconus) antediluvianus Brug.	.	7
34	Oliva (Utricula) flammulata Lam.	.	1
35	Ancillaria glandiformis Lam.	.	1
36	Eratopsis Barrandei R. Hoern. et A.	.	1
37	Ringicula buccinea Desh.	.	69
38	Mitra (Callithea) cupressina Brocc.	.	3
39	» » cf. Michelotti M. Hoern.	1	.
40	Terebra (Acus) fusiformis M. Hoern.	.	8
41	Buccinum (Niotha) Schönni R. Hoern. u. A.	1	3
42	» (Zeuxis) restitutianum Font.	.	7
43	» (Hima) granulare Bors.	.	10
44	Dolium sp.	.	1
45	Cassis (Semicassis) saburon Lam.	.	5
46	Cassidaria (Galeodea) cingulifera R. Hoern u. A.	.	16

		Žlutavý	Šedo-modrý
		jíl	
47	Chenopus (Aporrhais) pespelecani Phil.	.	9
48	» » alatus Eichw.	3	233
49	Trilon (Simpulum) Tarbellianum Grat.	.	1
50	» (Sassia) Apenninicum Sassi.	.	4
51	Murex (Pteronotus) Swainsoni Mickti	.	1
52	» (Trophon) vaginatus Jau.	.	159
53	Typhis fistulosus Brocc.	.	3
54	Fusus cf. Austriacus R. Hoern. u. A.	.	11
55	» crispus Borson.	.	1
56	» Valenciennesi Grat. sp.	2	.
57	» (Chrysodomus) glomus Géné.	.	2
58	Fasciolaria sp.	.	2
59	Turbinella (Latirus) labellum Bonn.	.	1
60	Cancellaria Bonellii Bell.	.	8
61	» Saccoi H. u. A.	.	13
62	Pleurotoma rotata Brocc.	.	72
63	» Annae R. Hoern. u. A.	.	5
64	» (Surcula) Lamarcki Bell.	.	1
65	» (Drillia) Allionii Bell.	.	60
66	» » modiola Jau.	.	99
67	» (Raphitoma) harpula M. Hoern.	.	4
68	» (Clavatula) granulato-cincta Münst.	.	1
69	» (Clinura) trochlearis M. Hoern.	.	175
70	» (Rouaultina) Marthae R. Hoern u. A.	.	8
71	» (Dolichotoma) cataphracta Brocc.	.	44
72	» sp.	.	3
73	Cerithium lignitarum Eichw.	.	1
74	» vulgatum Brug. var.	.	2
75	» rubiginosum Eichw.	1	.
76	» cf. dolium Brocc. var.	1	.
77	» sp.	1	.
78	Turritella vermicularis Brocc. var.	.	1
79	» Riepeli Partsch.	.	1
80	» bicarinata Eichw.	.	2
81	Mathildia quadristriata	.	1
82	Scalaria scaberrima Michti.	.	1
83	Natica helicina Brocc.	.	450
84	Turbonilla Reussi M. Hoern.	.	1
85	Bulla sp.	.	7
86	Dentalium tetragonum Brocc.	.	1
	Cephalopoda.		
87	Nautilus (Aturia) Aturi Bast.	2	39
	Crustacea.		
88	Krabí klepeta	.	1
	Pisces.		
89	Carcharias megalodon Agass. (zub)	.	1
90	Oxyrhina xiphodon Agass. (zub)	.	1
91	Megalolepis cf. latus Kramb. (otisk)	.	2
92	Otolithus (Merclucius) nov. form.	.	1
93	« (Merlangus) cf. cognatus Koken.	.	10
94	» (Gadus) cf. elegans Koken.	.	7
95	» » nov. form.	.	6
96	» (Gobius) moravicus nov. form.	.	2

		Žlutavý	Šedo-modrý
		jíl	
97	Otolithus (Macrurus) nov. form.	4	65
98	» » nov. form	.	2
99	» » nov. form.	.	6
100	» » nov. form.	.	1
101	» » nov. form.	.	1
102	» (Berycidarum) moravicus nov. form.	4	13
103	» » Koken nov. form.	.	5
104	» (? gen.)	.	1
105	» (? gen.)	.	1
106	» (? gen.)	.	1

Jak z předešlých a ze souhrnného seznamu viděti lze, jest walbersdorfský jíl na zkameněliny poměrně velmi bohat, nezůstávaje za jíly dolnorakouskými. Souhrnný počet zde uvedených druhů obnáší 205, z nichž připadá na foraminifery 83, na korály 6, na vermes 2, na echinodermy 2, na mechovky 3, lamellibranchiaty 26, gasteropody 65 a rybí otolithy 18 druhů. Množství, v jakém se tyto druhy vyskytují, lze považovati asi povšechně za shodné s jíly badenskými. Velikosť a tloušťka skořápek gasteropodů a lamellibranchiatů souhlasí nápadně s oněmi jílu möllersdorfského. Jen povrchně porovnáme-li zmíněné schránky, na příkl. druhů *Conus antediluvianus, Ringicula buccinea*, *Cassidaria cingulifera*, *Chenopus alatus* atd., přesvědčíme se o tom a shledáme i zbarvení skořápek úplně shodné.

Krásně zachované a bohaté na druhy jsou *foraminifery* walbersdorfského jílu. Největší počet druhů vykazují rody: *Nodosaria, Textularia, Miliolina, Cristellaria, Polymorphina, Bulimina* a skupina *Rotalina*, nejhojněji se vyskytují druhy: *Miliolina seminulum*, *Textularia carinata*, *Clavulina communis*, *Bulimina pyrula*, *Cheilostoma ovoidea, Nodosaria trichostoma, Marginulina variabilis*, *Polymorphina austriaca, Uvigerina pygmea*, *Globigerina regularis*, *Gl. bulloides var. triloba, Pullenia sphaeroides, Sphaeroidina bulloides, Truncatulina lobatula*, *Dutemplei, Ungeriana, Pulvinulina Partschiana*, *Nonionina communis*, *umbilicata, dodávajíce* této zvířeně rázu, jaký ode dávna je znám z jílů badenské facies. Nemohu než přisvědčiti názoru *F. Karrerovu*,[7]) že zvířena walbersdorfského jílu je od badenské a ottnangské k nerozeznání a podotýkám toliko, že na základě zde uvedených fakt lze ji považovati za aequivalentní těchto.

Korály walbersdorfské zastoupeny jsou dosud toliko šesti druhy. Přibéřou-li se k nim ony dva druhy, jež *Kittl* ve svém pojednání o walbersdorfském jílu uvádí, je odtud celkem 8 druhů známo. Malé sice množství, leč dosti velké, aby i na něm byla vypozorována shoda, jaká je mezi zvířenou walbersdorfskou a onou jílů facies badenské. To, co všem korálovým zvířenám hlubokého moře zvláštního rázu dodává, je i této vlastní. Převaha to ojedinělých korálů nad trsovými a řídkosť korálových trsů zhusta rozměrů nepa-

[7]) *E. Kittl* l. cit. str. 20.

trných. Pět z uvedených druhů: *Ceratotrochus multispinosus*, *C. multiserialis*, *Flabellum Roissyanum, F. siciliense (non M. Ddw. et M. Reuss)* přichází v jílech badenských as tak hojně jako zde, toliko *C. multispinosus* činí odchylku svým nápadným množstvím individuí, souhlase v tom s jílem boračským, jehož zvířena až na lokální své odchylky je s badenskou shodná a rovněž množstvím polyparií zmíněného druhu se vyznamenává.

Velká stratigrafická důležitosť přikládá se i druhu *Brissopsis ottnangensis*, zdali oprávněně, o tom lze opravdu pochybovati, a to tím více, čím menší jsou naděje, že se podaří nalézti v badenských jílech zachované schránky ježků mořských, s jichž ostny, ambulakralními deštičkami atd. tak zhusta se setkáváme. Všímal jsem sobě z moravských a dolnorakouských jílů vyplavených částek schránky mořských ježků, jejich teninkých plošek ambulakralních i ostnů štíhlých. Porovnával jsem i tyto s oněmi *Brissopsis ottnangensis* a doznávám, že jsem nebyl s to, abych vypozoroval nějakých specifických rozdílů.

Mechovky jsou ve walbersdorfském jílu zastoupeny druhy jak v jílu facies badenské tak i ve slínech steinabrunnenských obyčejnými. Společné mají s mechovkami jílů to, že se vyskytují po různu a zřídka, tvoříce malé kolonie.

Jednak poměrné bohatství na druhy, jednak hojnosť těchto individuí, dodává mlžům jílu walbersdorfského nemalé důležitosti. Zajímavé jest i jejich sdružení. Tři různé elementy jsou tu zastoupeny: druhy badenské vedle steinabrunnenských a schlierových. První dvě skupiny těší se značnému množství druhů, jsouce na individua chudé; poslední skupina čítá málo druhů, leč tyto vyznačují se poměrně velkou hojností individuí.

Do nedávna byly druhy *Pecten denudatus* a *Solenomya Doderleini* považovány za velmi významné pro schlier. Mnohdy dostačilo, aby byla jich přítomnosť konstatována a ta která usazenina zařaděna byla ku schlieru. Tento význam pobledl, když byl *A. Bittner*[8]) připoměl, že přicházejí netoliko ve schlieru, ale také zároveň i v badenském jílu. Nebude nezajímavo zmíniti se, že *Pecten denudatus* tolikéž v západomoravském miocaenu ve facii badenského jílu *(Řepka)* a v kralickém slínu u Náměstě ve značném individuelním množství byl zjištěn.

Pokud se pak druhu *Solenomya Doderleini* týče, víme, jak již *A. Bittner*[9]) ve své známé práci uvádí, že přichází rovněž v jílu badenském. K tomuto sluší ještě podotknouti, že sbírky říšského geologického ústavu přechovávají po léta pěkný úlomek *Sol. Doderleini* nalezený ve světlošedém jílu na východním boku kopce *Kalvarie* u městyse *Jaroměřic* v severozápadní Moravě, v jílu, který po rázu své zvířeny je badenskému velmi příbuzný. Z toho je patrno, že výminečný význam těchto dvou druhů odpadá, jelikož je dokázáno, že neomezují se více toliko na jíly facies schlieru. Po odečtení těchto druhů zůstává z mlžů pouze druh *Tellina ottnangensis*, který pro schlier svědčí. Připočteme-li pak k němu ještě druh *Anatina Fuchsi* ve walbersdorfském jílu Kittlem ob-

---

[8]) F. Karrer. Hochquellenleitung, pag. 187., Viz. *Bittner*. Über das Alter des Tüfferer Mergels und über die Verwendbarkeit von Orbiloiden zur Trennung der 1. und 2. Mediterranstufe. Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanst. 1885, pag. 225.

[9]) *A. Bittner*. Noch ein Beitrag zur neueren Tertiarliteratur. Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt 1886. 36. svaz. str. 47.

jevený, nabudeme úhrnně dva druhy z lamellibranchiatů, jež by opravňovaly jeho zařadění ku facies ottnangského schlieru. Přihlédneme-li ale k ostatním mlžům, nemůžeme neviděti, že povšechný jejích ráz ottnangskému sice odpovídá, ale že mnohem těsněji přimyká se k badenskému, od něhož ho opět poněkud oddalují druhy *Lucina leonina*, *Cardita crassicosta, Cardita Jouanneti, Cardita transylvanica* a *Arca Turonica.*

Velmi důležitou jeví se býti okolnosť zajisté ne nahodilá, nýbrž v podstatě věci samé jsoucí, že nyní po sedmém vykořistění zvířeny walbersdorfské nebylo a není po gasteropodech schlierových ani slechu. I tentokráte není mi zaznamenati ani nejmenší stopy po zmíněných druzích, jak povědomo, ve schlieru ottnangenském a sedimentech mu aequivalentních hojných. Především je míti na paměti, že všechny druhy gasteropodů odtud dosud známé jsou zástupci zvířeny facies badenské. V souhlase s tím jest bohatosť individuí druhů: *Ringicula buccinea, Buccinum restitutianum, Chenopus alatus, Pleurotoma Allionii, Pleurotoma cataphracta, Natica helicina* a také i velikost jejích ulit a tloušťka stěn. Názor tento podporuje dále i významná okolnosť, že druhům *Chenopus pes pelecani* a *Ch. alatus* táž hojnosť individuí ve walbersdorfském jílu připadá, jako na př. v badenském jílu. Lokální ráz zvířeny gasteropodové tohoto jílu jeví se vedle zvláštního sdružení různých druhů i v hojnosti a rozvoji druhů *Typhon vaginatus*, zvláště *Pleurotoma trochlearis,* z nichž zejména tento dosud byl znám z několika jenom nalezišť v nepatrném počtu individuí.

Tentokráte byla toliko jedna ulita druhu *Cerithium lignitarum* v cihelnách nalezena, a sice ve tmavém dolním jílu, nikoliv druh *Pyrula rusticula.* Že již z toho lze usuzovati, že druhy tyto ve walbersdorfském jílu právě tak jsou řídké jako v jílech badenské facies, o tom netřeba pochybovati. Víme-li pak, že druh *Pyrula rusticula* v 3 exemplářích v jílu badenských cihelen, v 6 v jílu sooském byl zjištěn, a že druhu *Cerithium lignitarum* 7 exemplářů z badenského jílu, 22 ze sooského, 4 z vöslavského a 1 z jaroměřického ve sbírkách řišského geologického ústavu vídeňského jest deponováno, přisoudíme jim pro walbersdorfský jíl zajisté význam podřízený, nikoliv čelný, jak dr. *R. Hoornes* se domnívá.

Pterepody nepodařilo se zjistiti ani na místě, ani ve vyplaveninách. Zdá se, že tato okolnosť poukazuje k tomu, že pteropodi omezují se na jistý horizont zářezu walbersdorfského, kde jsou dle udání *Kittlova* velmi hojni jak na druhy, tak i na individua, kdežto v jiných polohách jsou velmi řídcí.

Pokud se *ostrakodů* týče, tu třeba podotknouti, že jsou na druhy nevalně bohaty; pouze 4 druhy obyčejné v jílech jak facies badenské, tak i steinabrunnenské a poměrně dosti hojné na individua byly vyplaveny.

Za to dosti hojný je hlavonožec *Aturia Aturi*, jak se zdá v tmavém jílu hojnější než ve žlutavém.

Velmi hojny jsou ve walbersdorfském jílu rybí otolithy a otisky ryb dosti dobře zachované s otolithy v přirozené poloze lze tam sbírati. Dle dosavadních zkušeností jest tam rod Macrurus nejbohatší na druhy; ostatní rody vyskytují se po různu, jsouce toliko jedním druhem zastoupeny. Výjimku činí *otolithus Berycidarum,* v rakousko-uherském miocaenu z otolithů nejrozšíře-

nější, a budiž tuto podotknuto, pro něj nejvýznačnější. S jeho druhy setkáváme se téměř na všech nalezištích jílu facies badenské a i steinabrunnenské. Význam otolithů pro důkladnější poznání faunistických poměrů miocaenu rakouského, jak mně již nyní sděliti lze, poněvadž mám z různých nalezišť miocaenních 109 rozličných druhů k popisu připraveno, jest značný a poskytuje velmi mnoho zajímavého. Zde budiž ještě podotknuto, že druhy rodů Macrurus, Berycidarum, Merlangus omezují se na jíl hlubokého moře se zvířenou mollusků a korálů facies badenské.

Konečně třeba připomenouti malých kulovitých trsů *Nullipora ramosissima* dosti hojných.

K vůli snadnějšímu porovnání rázu zvířeny walbersdorfské s hlavními typy rakouského miocaenu facies badenské, grundské a schlieru budiž zde uvedena malá přehledná tabulka, jejíž čísla v kolonně walbersdorfské udávají počet druhů odtud známých, v ostatních kolonnách pak vyjadřují množství druhů té které lokality s naším nalezištěm společných.

	walbersdorfským	Počet druhů společných										
		se schlierem ottnangským	s jílem									s pískem grundským
			ostravským	badenským	sooským	vöslavským	möllersdorfským	boračským	lažánským	jaroměřickým		
Anthozoa	7	.	.	2	1	1	3	3	2	1	.	
Lamellibranchiata	26	7	4	10	6	6	7	3	5	7	11	
Gasteropoda	65	10	5	50	43	42	32	40	29	19	33	
Pisces (otolithy)	18	3	.	.	.	1	1	1	6	.	.	

Kdyby vůbec nic jiného o naší zvířeně známo nebylo než toliko její poměr, vyznačený množstvím druhů společných s lokalitami tuto připomenutými, nemohli bychom býti v pochybnostech, které skupině z nich je příbuznější. Že ji nepřísluší přičísti ottnangskému schlieru, toho důkazem je již okolnosť, že má s ním toliko 20 druhů společných. Ještě patrnější rozdíl jako mezi ní a ottnangskou zvířenou je mezi onou a zvířenou schlieru ostravského, s nímž sdílí pouze 9 druhů. Pouhé porovnání těchto čísel s oněmi, jež naznačují v tabulce množství společných druhů se zvířenou badenského, sooského, vöslavského, möllersdorfského, boračského, lažánského a jaroměřického jílu, utvrdí nás v mínění, jež jsme nabyli za studia jednotlivých skupin walbersdorfské fauny, a sice v tom, že by bylo velmi pochybeno, kdyby při zařaďování této zvířeny více se dbalo tak zvaných význačných druhů než povšechného rázu a detailů jednotlivých její skupin. Rozhodně by pochybil, kdo by chtěl na základě přítomnosti druhu *Pecten denudatus* a *Solenomya Doderleini* walbersdorfskou zvířenu prohlásiti za identickou se zvířenou schlieru ottnangského. Názor jeho by měl tu cenu, jako onen, jehož někdo nabyl přičítaje druhům

Cerithium lignitarum a *Pyrula rusticula* obzvláštní důležitosť a jenž byl nucen vysloviti domněnku, že jíl walbersdorfský spadá do horizontu grundského. Pokud se dotýče druhů *Tellina ottnangensis* a *Anatina Fuchsi*, je třeba vyčkati času, až bude dokázáno, že rozdíly, jež je dělí od druhů příbuzných, povstaly opravdu během dob a že nebyly vyvolány fysikálními okolnostmi lokality. Kdyby měly zmíněné již druhy a *Aturia Aturi* opravdově té stratigrafické důležitosti, jaká jim byla přiřknuta, pak bychom byli zajisté před záhadou, již rozřešiti sotva kdy by se povedlo. Bylo by vůbec nepochopitelno, kterak že tyto druhy ve schlieru povždy hojné a rovněž i ve walbersdorfském jílu na individua bohaté tuto toliko se zvířenou facies badenské přicházejí, nikoliv s onou pro schlier charakteristickou.

Z toho ze všeho přirozeně následuje, že správné je, přičtena-li bude zvířena walbersdorfská nejbližšímu sousedstvu facies badenské, od jejíž zvířen ji toliko přítomnosť oněch druhů a jich individuelní hojnosť oddaluje, vtiskujíc ji, chceme li tomu — na jakés střední stanovisko. Na věci samé se rozhodně ničeho nezmění, označena-li bude jako zvířena z elementů jílů badenských a schlieru smíšená, anebo pojmenována-li bude zvířenou přechodní. Správné by však rozhodně nebylo, kdybychom ji chtěli zařaditi do obvodu typu ottnangského schlieru. Kdo by přece tak učinil, doznal by tím, že přisuzuje tak zvaným významným druhům větší váhu, než povšechné povaze a rázu jednotlivých součástek zvířeny vůbec.

Neméně jest zajímavý poměr této zvířeny ku grundské. Jednak značný počet shodných a společných druhů, jednak hojnosť těchto činí ji úvahy hodnou. Že shoda mezi nimi je, popříti nelze, nikoliv však toho dosahu, aby na její základě mohlo býti souzeno, že jíl walbersdorfský náleží horizontu grundskému. V naprostém odporu s tímto soudem jest ráz zvířeny korálové, trsovými druhy zastoupené, který tvoří její podklad, kdežto naproti tomu ojedinělí koráli docela do pozadí jsou zatlačeni. Co platí o korálech platí i o gasteropodech, lamellibranchiátech a mikrofauně. Shledáme sice jednotlivé grundské druhy společné zvířeně walbersdorfské, nikoliv celkový ráz, který je od této nápadně odchylným.

Poznámky k tabulkám na stranách následujících. V kolonně badenského, sooského, vöslavského a möllersdorfského jílu vepsaná čísla kromě v závorkách jsou vypsána ze seznamu známé a důležité práce dvorního rady *D. Stura:* Beiträge zur Kenntniss der stratigraphischen Verhältnisse der marinen Stufe des Wiener Beckens. Jahrb. d. k. k. geolog. Reichsanst. 1870. Seznam zvířeny ostravského jílu jest uveden dle *E. Kittla:* Die Miocaenablagerungen des Ostrauer Karliner Steinkohlenrevires und deren Fauna. Annal. des k. k. Hofmuseums in Wien 1877, schlieru ottnangského dle dra. *R. Hoernese:* Die Fauna des Schliers von Ottnang. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. 1875. str. 392, — jílu boračského, lažánského, jaroměřického a grundského písku dle materiálu chovaného v palaeontologických sbírkách říšského geolog. ústavu vídeňského.

[1]) Dle materiálu sbírek c. k. říšského geologického ústavu vídeňského.

[2]) Dle *M. Hoernesa.* Die fossilen Mollusken des Tertiär-Beckens von Wien I. a II. díl.

[3]) Dle *R. Hoernesa a Auingra.* Die Gasteropoden der Meeresablagerungen der I. u. II. Mediteranstufe. 1—7. svazek.

[4]) Dle *A. Rzehaka.* Erläuterungen zur geolog. Karte der Umgeburg von Brünn, vydané A. Makowskym a A. Rzehakem.

		Walbersdorf		Schlier ottnangský	Jil								Grundský písek
		žlutavý	modrošedý		ostravský	badenský	sooský	vöslavský	möllersdorfský	boračský	lažánský	jaroměřický	
		jíl											
	Anthozoa.												
1	Ceratotrochus multiserialis Michti. sp.		9	.	.	(1)[1]	.	.	.	51	.	.	.
2	» multispinosus M. Edw. et. H.	8	71		.	.	.	.	(2)[1]	154	1	5	.
3	» cylindriformis nov. spec.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.
4	» walbersdorfensis nov. sp.		1	.		.	.	.	.	.	.	.	.
5	Flabellum Roissyanum M. Edw. .	.	2	.	.	(10)[1]	(4)[1]	(2)[1]	(3)[1]	64	1	.	.
6	» siciliense (non M. Edw. et. H.) Reuss.	.	1	.	.	.	.	.	(2)[1]	.	.	.	.
	Vermes.												
7	Serpula contortoplicata Rss.		13	.	.	.	.	.		.	.	.	.
8	» sp.	.	1	.		.	.	.	.	.	.	.	.
	Echinodermata.												
9	Brissopsis ottnangensis R. Hoern.	59	16	600	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	Echinus cf. hungaricus Laube . . .	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Bryozoa.												
11	Creusia Hoernesi Rss.	.	1	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.
12	Ceriopora globosa Rss.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.
13	Lepralia violacea Johnst.		1	.		.	.	.	.	.	.	.	.
	Lamellibranchiata.												
14	Corbula gibba Olivi.	9	99	12	1	131	220	90	4	24	50	20	20
15	» carinata Duj.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7
16	Pholadomya sp.	10	24			.	.	.	.	.	.	.	.
17	Mactra triangula Rss.		3	18			.	.	.	.	.	.	3
18	Tellina ottnangensis R. Hoern. . . .	7	17	680	3	.	.	.	.		.	.	.
19	Venus multilamella Lam.	.	3	.		(4)[1]	(3)[1]	(8)[1]	24	1	.	2	80
20	Dosinia cf. orbicularis Agass. . . .	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	Chama gryphina Lam.	.	1	.	.	(1)[1]	.		.	.	.	.	.
22	Lucina leonina Bast.		1				.	.	.	.		.	.
23	» Dujardini Desh.	.	1	248	.			(s)[2]	.		1		24
24	Solenomya Doderleini Mayer . . .	33	28	104	3	(1)[1]	.	.	.	.	.	1	
25	Cardita cf. crassicosta Lam.	.	1	.	.	.	.	.		.	.	.	5
26	» rudista Lam.	.	1	.		(h)[2]	.	.	(h)[2]	.	.	4	.
27	» Partschi Goldf.	.	2	.	.	(1)[1]	1	20	8		.	26	100
28	» Jouanneti Bast.	1	.	.		.	.	.	.	.		.	1
29	» transylvanica M. Hoern. . .	1	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.
30	Nucula sp.	4	.	.		.			.		.	.	.

[5]) Dle *A. Bittnera*. Noch ein Beitrag zur neuen Tertiärliteratur. Jahrbuch d. k. k. geol. Reichsanst. 1884, str. 47.

[6]) Dle *Fel. Karrera*. Hochquellenleitung, str. 187.

[7]) Dle *E. Kittla*. Die Miocaenablagerungen des Ostrauer-Karviner etc.

[8]) Dle *A. E. Reusse*. Die fossil. Entomostraceen d. oesterr. Tertiärbeckens. Haidinger Naturwissensch. Abhandl. 1849, 3. svaz.

		Walbersdorf		Schlier ottnangský	Jil								Grundský písek
		žlutavý	modrošedý		ostravský	badenský	sooský	vöslavský	möllersdorfský	boračský	lažánský	jaroměřický	
		jil											
31	Leda clavata Calcar.	1	.	17	.	(ss)[2]	.	.	.	.	2		
32	Pectunculus pilosus Linné	.	2	.	.	(1)[1]	1	1	(s)[2]	.	1	5	100
33	Arca Turonica Duj.	.	1	.	.	.	.		.	.	.	.	4
34	Pecten cristatus Brocc.	.	1	.		9	4	4	6	.	.	.	2
35	» denudatus Rss.	19	12	112	.	(2)[6]	.	.	.	.	.	.	.
36	» comitatus Font.	5	14	.	.	.	.	.	.	.		.	.
37	» sp.	.	1	.	.	.	.	.	.		.	.	.
38	Ostrea cochlear Poli.	5	12	.	12	.	(1)[1]	.	3	12	60	20	.
	Gasteropoda.												
39	Conus (Leptoconus) antediluvianus Brug.	.	7	4	1	(11)[1]	46	55	(13)[1]	30	3	1	10
40	Oliva (Utricula) flammulata Lam. .		1	.	.	(2)[1]	.	(1)[1]	.	.	.	.	.
41	Ancillaria glandiformis Lam.	.	1	.	.	(2)[1]	19	24	2	11	.	.	27
42	Eratopsis Barrandei R. Hoer. u. A. . .	.	1	.	.		.		.		.	.	.
43	Ringicula buccinea Desh. .	.	75	1	.	791	720	145	2	283	7	6	3
44	Mitra (Callithea) cupressina Brocc. .		4			4	50	40	(7)[1]	.	1	1	1
45	» » cf. Michelotti M. Hoern.	1		.	.	(5)[1]	1	(2)[1]	(1)[3]	2	3	.	
46	Terebra (Acus) fusiformis M. Hoern.	.	9	.	.	1	3	.	.		.	.	.
47	Buccinum (Niotha) Schönni R. Hoern. u. A.	1	3	.	.	(54)[1]	(10)[1]	(40)[1]		.	(+)[3]	.	130
48	» (Zeuxis) restitutianum Font.	.	22	.	.	81	425	83	2	506	60	40	16
49	» (Caesia) vulgatissimum May.	.	1	.	.	(15)[1]	.	(h)[3]	.		(+)[4]	.	.
50	» (Hima) granulare Bors. . .	.	11	.	.	(1)[3]	.	.	(22)[1]	3	.	7	.
51	Dolium sp.	1		.	.		.	.	.	.	.	.	.
52	Onisca sp.	1		.	.		.	.			.	.	.
53	Cassis (Semicassis) Saburon Lam. . .		5	111	.	1	70	134	1	1	3	.	20
54	» (Cassidea) cypraeformis Bors. .	.	2	.	.	(2)[1]	.	.	.	.	.	.	2
55	Cassidarix (Galeodea) cingulifera R. Hoern. u. A.	2	21	.	.	.	(4)[1]	(8)[1]	.	.	.	.	5
56	Chenopus (Aporrhais) pes pelecani. Phil.		13	.	.	(7)[1]	(3)[1]	(2)[1]	.	223	5	13	33
57	» (Aporrhais) alatus Eichw. .	7	249	1?	1?	22	(20)[1]	10[1]	(9)[1]	1	1	.	24
58	Triton (Simpulum) Tarbellianum Grat.	.	1	.	.	(3)[1]	1	3	.	1	.	2	1
59	» (Sassia) Apenninicum Sassi . .		4	.	.	5	6	1	1	2	.	6	3
60	Murex (Pteronotus) Swainsoni Michti.	.	1	.	.	(4)[1]	(+)[3]	(+)[3]	1	31	.	1	.
61	» (Trophon) vaginatus Jan. . . .	1	185	.	.	1	(+)[3]	3	7	.	(+)[3]	.	.
62	Typhis fistulosus Brocc.		1	.		4	75	36	(3)[1]	8		.	.
63	Fusus crispus R. Hoern. u. A. . . .	.	.	.		4	2	.	3	3	(1)[3]	.	(2)[3]
64	» crispoides R. Hoern. u. A. . .		.	.	.	11	16	14	4	1	9	.	+)[3]
65	» Hössi Partsch.	.	1			(1)[1]	120	45	2	2	4	2	8
66	» Valenciennesi Grat. sp. . . .	2	.	1	.	(2)[1]	(+)[3]	5		.	1	2	2
67	» (Chrysodomus) glomus Géné. .	.	2	.	.	(+)[3]	1	(+)[3]	.	.	.	.	3
68	Fasciolaria sp.		2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	Turbinella (Latirus) labellum Bonn. .	.	1	.	.	3	(+)[3]	.	(1)[3]	62	.	.	.
70	Cancellaria Bonellii Bell.	.	8			(1)[1]	3	9[1]	.	9	1		.
71	» Saccoi R. Hoern. u. A. . .		14	.		(5)[1]	7	6	(3)[1]	3	4	1	.
72	Pleurotoma rotata Brocc.	.	72	.	3	2	118	25	(13)[1]	9	(+)[3]	.	.
73	» Annae R. Hoern. u. A. . .	.	5	12	.	10	4140	5235	6	30	(+)[3]	7	.
74	» (Surcula) Lamarcki Bell.	.	1			(19)[1]	.			60	.		.
75	» (Drillia) Allionii Bell. .	1	66	.	.	49	2801	2736	38	99	65	(+)[3]	.
76	» » obtusungula Brocc.	1	1	.	.	(38)[1]	62	94	(12)[1]	6	(+)[6]	(+)[3]	.
77	» » modiola Jan. .		99	.		(64)[1]	44	3	2	.	.	.	.
78	» (Clavatula) granulato-cincta Münst.		1	.		(5)[1]	2	2	2	.	.	.	.

		Walbersdorf		Schlier ottnangský	Jíl								grundský písek
		žlutavý jíl	modrošedý jíl		ostravský	badenský	sooský	vőslavský	möllersdorfský	boračský	lažánský	jaroměřický	
79	Pleurotoma (Clinura) trochlearis M. Hoern.		175	.	3	.	.	.	.	.	(+)[2]	.	.
80	» (Rouaultina) Marthae R. Hoern. u. A.		8	.	.	24	991	1550	1	47	(+)[4]	8	.
81	» (Dolichotoma) cataphracta Brocc.	.	44	26	2	(5)[3]	136	227	1	3	24	2	10
82	» (Raphitoma) harpula M. Hoern.		4	.	.	3	(9)[2]	(s)[2]	(s)[2]	1	.	.	.
83	» sp.	.	3	.	.	.			.	.	.	.	.
84	Cerithium vulgatum Brug. var.		2	.	.		(1)[1]	.	.	1	.	.	.
85	» cf. dolium Brocc. var.	1		.		.	.	.	.	.	.	.	(s)[3]
86	» rubiginosum Eichw.	1	.	.		(10)[1]	.	.	.		.	.	2
87	» lignitarum Eichw.	.	1	.		(7)[1]	(22)[1]	(4)[1]	.		1	.	109
88	» sp.	1		.	.		.	.		.	.	.	.
89	Turritella Riepeli Partsch	.	1		.	(5)[1]	.	1	1	1	.	.	4
90	» vermicularis Brocc. var.	.	1	.		(1)[1]	1	(3)[1]		.	.	.	2
91	» turris Bast.		1			(3)[1]	35	100	33	3	.	.	300
92	» bicarinata Eichw.		2	.		1	12	103	2	14		.	.
93	Mathilda quadristriata		1	.	.	.	.	.	.	40	1		.
94	Adeorbis Woodi M. Hoern.	.	1	3		(ss)[3]	.	.	.	2	.	.	4
95	Scalaria scaberrima Michti.		2	.		.	.	(ss)[3]	(ss)[3]	4	.	.	5
96	Turbonilla sp.	.	1	.	.				.	1	.	.	.
97	Natica redempta Michti.	1		.	.	(11)[1]	3	15		2		.	20
98	» helicina Brocc.	3	510	1127	.	105	2120	2574	23	800	11	47	21
99	» sp.	1	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.
100	Chemnitzia Reussi M. Hoern.	.	4		.	(ss)[3]	.	.	.	1	(+)[6]	.	2
101	Bulla sp.	.	7		.	.	.		.	.		.	.
102	Dentalium tetragonum Brocc.	1	5	2	.	(3)[1]		.		2	100	4	1
103	» entales Linné.	.	2	.	.	(ss)[3]	(6)[1]			1	.	.	9
	Cephalopoda.												
104	Nautilus (Aturia) Aturi Bast.	2	12	195	6		.	.	.	.	.	.	.
	Ostracoda.												
105	Cythereis asperrima Rss.	5	14	.		(s)[8]	.	.	(h)[3]	.	2	.	.
106	» nov. spec.	11	16	.	.		.	.	.	.	.	.	.
107	Cytherella compressa Münst.	8	4	.	.	.	.	(s)[8]		.	.	.	.
108	» abscissa Rss.	3	3	.	.	.	.	(ss)[9]	(ss)[3]	.	.		.
	Balanidae.												
109	Balanus sp. (Scutum)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Brachyura.												
110	Krabí klepeta	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
	Fisces.												
111	Carcharias megalodon Agass (zub)	.	1	.		.	.	.	.	.	1	.	.
112	Oxyrhina xilophodon Agass. (zub)		1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
113	Megalopsis cf. latus Kramb. (otisk)	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
114	Otolithus (Merclucius) nov. form.		1	.		.	.	.	.	.	.	.	.
115	» (Merlangus) nov. form.	.	10	.	.	.		.	.	.	.	.	.
116	» (Gadus) cf. elegans Koken.	10	8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
117	» » nov. form.	3	7		.	.	.		.	.	.	.	.

		Walbersdorf		Schlier ottnangský	Jíl								Grundský písek
		jíl žlutavý	jíl modrošedý		ostravský	badenský	sooský	vöslavský	möllersdorfský	boračský	lažánský	jaroměřický	
118	Otolithus (Macrurus) nov. form. . .	5	65	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.
119	» » nov. form. . .		2	.	.	.	.		.	.	3	.	.
120	» » nov. form. . .	1	6	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
121	» » nov. form. . .	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
122	» » nov. form. . .	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
123	» (Berycidarum) moravicus nov. form.	9	15	1	.	.	.	.	1	3	60	.	.
124	» » Kokeni nov. form. .	.	5	2	.	.	.	.	.		200		.
125	» » pulcher nov. form. . .	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.		.
126	» (? Gen.)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
127	» (? Gen.)		1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
128	» (? Gen.)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
129	» (Gobius) moravicus n. form.	2	2	.	.	.	.		.	.	.	.	.
	Plantae.												
	Nullipora ramossissima Rss. . . .		4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

2. Zvířena vápnitého pískovce uloženého na jílu.

Balvany pískovcové, písek a štěrk, jak opětně zjištěno, uloženy jsou na jílu v obvodu walbersdorfské cihelny. Poprvé promlouvá *Th. Fuchs* [1]) o těchto zajímavých sedimentech, popisuje slabou vrstvu písku a štěrku obsahující konkrece a hojné zkameněliny. Tyto shledal v píscích a ve štěrku dosti dobře zachované, ale ve zmíněných konkrecích pouze ve způsobu jader a otisků. Toliko 17 druhů povedlo se mu přesně určiti.

Rovněž *E. Kittl* [2]) dotýká se ve své zprávě walbersdorfské zvířeny těchto sedimentů a praví o její rázu, že mnohé okolnosti tomu nasvědčují, že jest od jílové rozdílna a že náleží moři mělčímu.

I dr. *R. Hoernes* [3]) vzpomíná pískových a úlomkových mass walbersdorfských a uvádí odtud pět různých druhů.

Za našeho pobytu v první walbersdorfské cihelně našli jsme velký pískovcový balvan na rozhraní jílu a žlutnice. Dělníci otázáni byvše, odkud balvan se tam dostal, pravili, že ho na místě byli vykopali. Jak patrno, přináleží tudíž vrstvě, o které bylo právě mluveno.

Zmíněný balvan byl složen z hrubozrnného písku, do něhož byla vložena větší zrna, ano i malé, otřené valounky křemenné. Stmeleny byly tyto součástky vápnem nepříliš pevně, tak že snadno podařilo se vyloupnouti valounek anebo

[1]) *Th. Fuchs*. loc. cit. str. 375.
[2]) *E. Kittl*. loc. cit. str. 23.
[3]) *R. Hoernes*. loc. cit. str. 131.

zkamenělinu. Těmito byl přeplněn. O individuelní hojnosti a o rozmanitosti zvířeny jej skládající učiníme sobě přibližnou představu, pozříme-li na následující seznam a přibéřeme-li v úvahu, že druhy onoho seznamu a množství jich individuí pochází z dvou kusů zvící lidské hlavy.

Jak dle tuto uvedeného seznamu lze usuzovati, jest zvířena pískovce a vůbec vrsty na jíl uložené poměrně značně bohata jak na rody, tak i na druhy. Povšechným svým rázem tíhne ku zvířenám zachovaným v mořských pískovcích, píscích, jež tvoří přechod ku pravému litavskému vápenci. Ona má, jak popříti nelze, mnoho společných znaků se zvířenou písků forchtenavských; do jaké míry je s ní spříbuzněna, nyní ještě nelze určitě říci. Na základě předchozího seznamu lze bezpečně usuzovati, že přináleží steinabrunnenskému typu, a sice do příbuzenstva zvířen pískovců tak zv. turritellových, tudíž do obvodu sedimentů bathimetricky vyššího niveau než zdejší anebo badenský jíl. K tomu poukazuje nápadně netoliko velké individuelní množství jednotlivých druhů, jako *Turritella turris, Lucina columbella*, ale i — a na to třeba klásti největší váhu — povšechný charakter této zvířeny vůbec. Tomuto povšechnému rázu nevymyká se ani povaha foraminifer, naopak ona s ním těsně souvisí.

S jílem má toliko 8 různých druhů společných: *Cardita Partschi, Pectunculus pilosus, Ostrea cochlear, Ancillaria glandiformis, Ringicula buccinea, Cerithium rubiginosum*, *Turritella turris* a *T. bicarinata.*

Pokud se pak zachovalosti schránek v seznamu vyjmenovaných týče, tu třeba připomenouti, že se neliší od oněch slínů a jílů a že zejmena co do velikosti a tloušťky stěn jsou shodny se schránkami slínů steinabrunnenských.

Foraminifera

1. Miliolina auberiana d'Orb. var. Ungeriana 5
2. Alocolina melo Fichtel et Moll. sp. . 1
3. Peneroplis planatus Fichtel et Moll. . 1

Vermes.

4. Serpula sp. 1

Lamellibranchiata.

5. Tellina planata Linné 2
6. Dosinia lincta Pult. 1
7. » Adansoni Phil. 1
8. Cytherea Pedemontana Agass. . . . 1
9. Cardium sp. 1
10. Lucina columbella Lam. 20
11. » ornata Agass. 1
12. Cardita Partschi Goldf. 4
13. Pectunculus pilosus Linné 2
14. Pecten sp. 2
15. Ostrea cochlear Poli 1

Gasteropoda

16. Conus (Leptoconus) Brezinae R. Hoern. u. A. 1
17. Ancillaria glandiformis Lam. 4
18. Ringicula buccinea Desh. 1
19. Buccinum (Uzita) nodosoplicatum Hilb. 8
20. Triton (Simpulum) affine Desh. . . . 1
21. Cerithium pictum Bast. 18
22. » rubiginosum Eichw. . . . 8
23. Turritella turris Bast. 60
24. » Archimedis Brong. 1
25. » bicarinata Eichw. 1
26. Turbo rugosus Linné 1
27. Monodonta angulata Eichw. 1
28. Trochus quadristriatus Dubois. . . . 8
29. » patulus Brocc. 1
30. Caecum cf. trachea Mont. 1
31. Rissoa Montagui Payr. 1
32. » Lachesis Bast. 1
33. Paludina immutata Frauenfl. 1
34. Bulla truncata Adams 1
35. » Lajonkaireana Bast. 1

RESUMÉ.

Ein Beitrag zur Kenntniss der Fauna des marinen Tegels und des diesen überlagernden Sandsteines von Walbersdorf.

Von **Vlad. Jos. Procházka.**

Der obgenannte Tegel erfreut sich seit dem Jahre 1884, seit derselbe und dessen Fauna durch Prof. Dr. *R. Hoernes* in der Literatur Erwähnung gefunden hat, eines lebhaften Interesses seitens der Geologen. Und dies mit Recht, denn er verdient dies nicht allein zu folge seiner Fauna, sondern auch mit Rücksicht auf seine stratigraphische Stellung, und zwar in palaeontologischer Beziehung insoferne, als er neue und interessante Arten liefert, in stratigraphischer, als man durch die Kenntnis seiner organischen Einschlüsse auf Thatsachen geführt wird, die in die vermeintliche Abgrenzung des Schliers gegen die Gebilde der sogenannten zweiten Mediterranstufe gewaltige Breschen schlagen. Allein nicht nur durch dieses ist dieser Tegel im Stande unsere volle Aufmerksamkeit in Anspruch zu nehmen, sondern es vermag auch die über seine Thierwelt bereits bestehende Literatur viel des Interessanten zu liefern. Dieselbe belehrt uns in erster Linie über die Wandlungen, welche in den Anschauungen über seinen Charakter und seine Zugehörigkeit sich vollzogen haben, bis sie in ihr jetziges Stadium getreten sind. Sie lässt aber auch die Ursache dieser Unbeständigkeit deutlich erkennnen, indem es sich herausstellt, dass die Wandlungen in den Ansichten in dem bis jetzt nicht hinreichend grossen Fossilienmateriale ihren Grund finden.

Eben dieser Umstand gab die Veranlassung zu einer neuerlichen Untersuchung, welche durch Herrn Hofrath *D. Stur* angeregt wurde. Herrn Hofrath *D. Stur* verdanke ich die Gelegenheit das hier besprochene Fossilienmaterial bearbeitet zu haben. Dasselbe wurde theils von den dortigen Ziegelschlägern gekauft, theils durch Schlämmen gewonnen.

Nur jene Gehäuse sind beachtet worden, von denen sichergestellt wurde, dass sie aus dem dortigen Tegel stammen. Die kleinen Molluskenschalen und die Microfauna der vorangehenden Verzeichnisse wurde theils durch Schlämmen des aus den grösseren Molluskengehäusen herausgekratzen Thones, theils der aus der Ziegelei mitgebrachten Thonstücke erhalten. Auf diese Weise ist hinreichende Vorsorge getroffen worden, dass keine Vermengung dieser Fossilien mit fremdartigen Elementen stattfinde.

In dem Aufschlusse von Walbersdorf sieht man eine obere gelbliche und eine untere dunkle Lage von Tegel mit Fossilien, deren Gehäuse sich durch eben dieselben Farbenunterschiede von einander abheben. Faunistische Diffe-

renzen bestehen, wie darüber die auf pag. 6. u. 12. angeführten Verzeichnisse genügenden Aufschluss geben, zwischen ihnen nicht. Die Farbe der oberen Lage ist lediglich auf den Eisengehalt des dieselbe durchsickernden Wassers zurückzuführen. Geschlämmt, gibt der Tegel ausser einer grossen Menge von ausgezeichnet erhaltenen Schalen keinen Rückstand. Glimmerblättchen sind selten, falls sie auftreten, kommen sie vereinzelt vor. Mit der Tiefe scheint der Tegel plastischer und seine Farbe dunkler zu werden, sein sonstiger petrographischer Charakter bleibt jedoch unverändert; getrocknet ist er ziemlich hart, aschgrau, jedoch vom echten Schlier wesentlich verschieden, obschon er diesem weitaus näher steht als dem Tegel von Baden.

Sein Fossilienreichthum darf wohl, wie aus dem Uebersichtsverzeichnisse (pag. 17.) hervorgeht, als ein verhältnismässig bedeutender bezeichnet werden. In Bezug auf die Individuenhäufigkeit der in ihm eingeschlossenen Formen weicht er von dem Tegel von Baden etc. nicht ab. Im Ganzen wurden diesmal 205 Arten festgestellt, von welchen 83 auf die Foraminiferen, 6 auf die Korallen, 2 auf die Vermes, 2 auf die Echinodermen, 3 auf die Bryozoen, 26 auf die Lamellibranchiaten, 65 auf die Gasteropoden und 18 auf die Fisch-Otolithen entfallen.

Die Foraminiferen sind arten- und individuenreich. Ihre Wichtigkeit besteht einerseits in dem Artenreichthume der Gattungen: *Nodosaria, Textularia, Miliolina, Cristellaria, Polymorphina, Bulimina* und der Gruppe *Rotalina,* andererseits in der Individuumhäufigkeit der Arten: *Miliolina seminulum, Textularia carinata, Clavulina communis, Bulimina pyrula, Cheilostoma ovoidea, Nodosaria trichostoma, Marginulina variabilis, Polymorphina austriaca, Uvigerina pygmea, Globigerina regularis, Gl. bulloides var. triloba, Pullenia sphaeroides, Sphaeroidina bulloides, Truncatulina lobatula, Dutemplei, Ungeriana, Pulvinulina Partschiana, Nonionona communis, umbilicata.* Auf Grund dessen muss ich mich bereits der von F. Karrer über die vorliegende Foraminiferenfauna ausgesprochenen Ansicht anschliessen.

Die Anthozoen — nur 6 Formen — sind vorwiegend Einzelnpolyparien; Stockbildner sind ausserordentlich selten und von geringen Dimensionen. In Folge der grossen Häufigkeit der Form *Ceratotrochus multispinosus* stimmt die Korallenfauna dieses Thones mit jener des Tegels von *Borač* überein.

Von den Echinodermen ist die Form *Brissopsis ottnangensis* ziemlich häufig. Es sei erwähnt, dass ihre Ambulacralplatten und Stacheln mit jenen vollkommen übereinstimmen, welche in den Schlämmrückständen der Tegel der Badenerfacies so häufig anzutreffen sind.

Bryozoen sind durch Formen vertreten, die sowohl in dem Tegel der Badener, als auch in jenem der Steinabrunner Facies vereinzelt vorkommen und dort kleine Colonien bilden.

Unter den 26 Formen der Lamellibranchiaten finden sich Elemente der Badener, Steinabrunner und Schlierfauna vor. Die ersteren zwei zeigen sich reich an Arten, die Formen der letzteren sind durch ihre Individuenhäufigkeit auffallend.

Der Umstand, dass die für den Schlier bezeichnenden Gasteropodenformen in *Walbersdorf* bis nun nicht entdeckt wurden, kann kaum als Zufall bezeichnet

werden, um so weniger, als bereits thatsächlich Resultate nicht einer, sondern sieben verschiedener faunistischer Ausbeuten des dortigen Tegels vorliegen.

Ostracoden sind selten, arm an Formen, und diese gehören der Gruppe jener Formen an, die sich in der Tegel-, Mergel-, Sand- und Leithakalkfacies gleicher Häufigkeit erfreuen.

Aturia Aturi scheint in den unteren Lagen häufiger zu sein als in den oberen.

Von den Pteropoden konnte weder in der Ziegelei noch in den Schlämmrückständen der von dort mitgebrachten Thonstücke eine sichere Spur entdeckt werden.

Häufig sind dagegen die Fisch-Otolithen der Gruppe *Macrurus* und *Berycidarum,* dafür werden die Vertreter der Gruppen *Merlucius, Merlangus, Gadus* und *Gobius* selten angetroffen.

Nullipora ramossissima bildet kleine, kugelförmige Stöcke, denen man ziemlich häufig begegnet.

Fassen wir nun alles das, was wir über diese Fauna im Augenblicke wissen, zusammen, so ergibt sich, dass sie eine echte Tiefseefauna ist, welche der Schlierfauna sehr nahe steht; im ganzen erweist sie sich jedoch weitaus verwandter mit der Badener Fauna. Mit der ersteren verbindet sie in erster Linie der Einschluss der sogenannten Schlierformen, welche inzwischen ihre alte Bedeutung fast ganz eingebüsst haben; an die letztere schliesst sie sich nicht nur durch den Gesammthabitus, sondern auch durch die Details der an ihrer Zasammensetzung betheiligten Thiergruppen an. Indessen wäre es nicht thunlich, wollte man sie in den Bereich des einen oder des anderen von diesen Typen stellen. Aus den eben angeführten Gründen ist es über allen Zweifel erhaben und diesmal durch genügend stichhältige Beweise erhärtet, dass sie, wie dies bereits *E. Kittl* erkannte, eine Mittelstellung zwischen den beiden letzterwähnten Faunentypen einnimmt. Das Auftreten von *Cardita crassicostata*, *Car. Jouannoti, Car. transylvanica* und *Arca Turonensis* weist nun darauf hin, dass dieselbe einem bathymetrisch etwas höherem Niveau als die echte Badener Fauna angehört.

Von dieser Fauna wesentlich verschieden ist jene, welche einem Sandsteinblocke entstammt, der der von Dr. Th. *Fuchs* entdeckten, dem Tegel direct aufliegeden schwachen Sand- und Schotterschichte angehört. Wie gross der Unterschied zwischen den Faunen dieser beiden Lagen ist, lehrt die Betrachtung des auf pag. 29. angeführten Verzeichnisses. Wir ersehen aus demselben, dass die darin verzeichnete Fauna mit jener des Tegels nicht mehr als 8 Formen theilt, ferner dass die Vergesellschaftung sowohl der Lamellibranchiaten als auch der Gasteropoden, namentlich die Individuenhäufigkeit einiger Arten, wie z. B. *Turritella turris, Lucina columbella*, und das jedenfalls auffalende Zurücktreten der Foraminiferen auf eine sandige Facies hindeutet. Diese charakteristischen Merkmale beweisen nicht nur das Gesagte, sondern sie geben ausserdem noch genügende Beweise an die Hand, um mit Sicherheit zu erkennen, dass die in Rede stehende Sand- und Schotterschichte einem bathymetrisch höheren Niveau entspricht als der Walbersdorfer Tegel. Mit Rücksicht darauf verdient diese Schotterschichte in den Bereich der Steinabrunner Facies, und zwar in die nächste Nähe der durch ihren besonderen Reichthum an Turritellen ausgezeichneten Turritellensandsteine gestellt zu werden.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 38.

O NORMALIÍCH

PLOCH DRUHÉHO STUPNĚ

DLE JEJICH KŘIVEK ROVINNÝCH.

NAPSAL

FRANT. MACHOVEC.

PŘEDLOŽENO DNE 24. ČERVNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Úvahy přípravné.

1. Budiž φ_2 středová plocha 2. stupně, Δ čtyrstěn tvořený jejími rovinami souměrnosti α', α'', α''' a nekonečně vzdálenou rovinou α^{IV}, dále a', a'', a''', a^{IV} vrcholy těmto rovinám protilehlé, tedy a^{IV} střed plochy a a', a'', a''' nekonečně vzdálené body jejích os souměrnosti. Pronik roviny $\alpha^{(k)}$ s plochou φ_2 označíme $A_2^{(k)}$, kteroukoli s plochou φ_2 konfokálnou plochu $\varphi_2^{(n)}$, řadu těchto ploch $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ a $F_2^{(k)}$ fokálnou kuželosečku v rovině $\alpha^{(k)}$. Libovolná rovina ω mějž s plochou φ_2 společnou kuželosečku K_2 a bod v za pol vzhledem k této ploše. O ploše tvořené normálami plochy φ_2 v bodech křivky K_2 budeme pojednávati.

2. Poly r, r', r'' .... (krátce $\Sigma r^{(n)}$) každé roviny ϱ vzhledem ke všem plochám $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ jsou na přímce $R \perp \varrho$. Tuto přímku nazveme polárou roviny ϱ vzhledem k $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ a bod $r^{(n)}$ polem této přímky pro plochu $\varphi_2^{(n)}$ Všem rovinám prostoru přísluší ∞^3 polár R tvořících osový komplex každé z ploch $\Sigma\varphi_2^{(n)}$. Reciproké poláry V, V', V'' ... (krátce $\Sigma V^{(n)}$) každé přímky R tohoto komplexu vzhledem ke všem plochám $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ jsou v příslušné k té přímce rovině polárné ϱ a každá z nich, na př. $V_1^{(n)}$, obsahujíc poly roviny, která prochází přímkou R kolmo k $V^{(n)}$, vzhledem ke všem plochám $\Sigma\varphi_2^{(n)}$, jest paprskem komplexu.

Myslíme-li si přímku R jakožto osu svazku rovin, jsou poly těchto rovin vzhledem na př. ku ploše $\varphi_2^{(n)}$ na reciproké poláře $V^{(n)}$ přímky R, a kolmice z těchto polů na příslušné k nim roviny polární spuštěné jsou přímky komplexu náležející rovině ϱ. Z toho jde, že tyto přímky obalují parabolu V_2, která dotýká se všech rovin $\alpha^{(k)}$ a os kuželosečky společné rovině ϱ a ploše $\varphi_2^{(n)}$. Opakujíce tytéž úsudky pro poláru $V^{(k)}$ přímky R vzhledem k jiné ploše $\varphi_2^{(k)}$ z řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ poznáváme, že parabola V_2 jest křivkou obalovou os všech kuželoseček společných rovině ϱ a plochám $\Sigma\varphi_2^{(n)}$.*)

Přímky R a $V^{(n)}$ budeme jmenovati na vzájem reciprokými paprsky (osami) komplexu vzhledem ku ploše $\varphi_2^{(n)}$, jejich poly vzhledem k téže ploše reciprokými poly a rovinu každou z nich kolmo ke druhé procházející reciprokou rovinu polárnou této osy vzhledem ku ploše $\varphi_2^{(n)}$.**)

---

*) Srovnej »Geometrie der Lage« von Dr. Th. Reye, II. Abth., 23. Vortrag.

**) Viz mé pojednání »Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes etc.« (Zpr. král. české spol. nauk z r. 1886).

3. Každým bodem m roviny ϱ jsou možny dvě tečny paraboly V_2; tyto tečny jsou polárami přímky R k určitým dvěma plochám řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$, a polárné roviny bodu m pro tyto plochy procházejí přímkou R. Naopak, vytkneme-li kterékoli dvě plochy ze řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$, přísluší k nim dvě určité tečny paraboly V_2, a roviny polárné jejich společného bodu pro vytčené dvě plochy procházejí přímkou R. Z toho a z 2. vychází na jevo, že osový komplex lze pokládati za souhrn přímek sdružených se všemi body prostoru vzhledem ke kterýmkoli dvěma plochám ze řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$.

4. Mysleme si všecky roviny procházející bodem v. Ke každé z nich náleží jistá polára R obsažená v komplexu a ∞^2 množství těchto přímek tvoří určitý system. Poly všech rovin ϱ svazku v vzhledem ke každé z ploch $\Sigma\varphi_2^{(n)}$, na př. $\varphi_2^{(k)}$, jsou v rovině polárné $\omega^{(k)}$ bodu v pro tuto plochu. Přidružíme-li ve dvou takových rovinách, na př. ω a $\omega^{(n)}$, na vzájem body, které jsou poly téže roviny svazku v, budou tím rovinné soustavy ω a $\omega^{(n)}$ uvedeny v souvislosť kollineárnou, a vytčený system přímek R bude tvořen spojnicemi bodů sdružených. Bude tedy řádu prvního a třídy třetí, druhé nebo první dle toho, neprochází-li rovina ω žádným, nebo prochází-li jedním nebo dvěma z bodů $a^{(k)}$, čili dle toho, není-li bod v v žádné, nebo v jedné nebo ve dvou rovinách $\alpha^{(k)}$. Budeme zprva předpokládati, že rovina ω neprochází žádným z bodů $a^{(k)}$.

Poněvadž rovinám svazku, který má za osu přímku $a^{IV}v$, přísluší ve všech plochách $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ poly nekonečně vzdálené, jsou ve vytčené kollineárné souvislosti soustav ω a $\omega^{(n)}$ přímky nekonečně vzdálené spolu sdruženy, t. j. kollineárnosť tato jest affinitou.

5. Dle 3. budou procházeti každou přímkou R tohoto systemu (4) roviny polárné bodu v pro dvě plochy řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$, tak že jej lze pokládati za složený z přímek společných vždy dvěma rovinám polárným $\Sigma\omega^{(n)}$ bodu v pro plochy řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$. Myslíme-li si z bodu v kolmici $V^{(k)}$ na rovinu $\omega^{(k)}$, bude tato přímka paprskem komplexu; její reciproké poláry pro všecky plochy $\Sigma\varphi_2^{(n)}$ budou obalovati parabolu (2) $R_2^{(k)}$ v rovině $\omega^{(k)}$, a každá z těchto polár bude přímkou našeho systemu; každá z nich bude totiž polárou jisté roviny ϱ procházející přímkou $V^{(k)}$. V každé takové rovině ϱ bude bodem v kromě přímky $V^{(k)}$ procházeti ještě jedna tečna $V^{(i)}$ této rovině příslušné paraboly V_2; k této tečně bude náležeti určitá plocha φ_2^{i} (3), a rovina polárná $\omega^{(i)}$ bodu v pro tuto plochu bude protínati rovinu $\omega^{(k)}$ v poláře roviny ϱ.

Všecky přímky V, V', V'', ... (krátce ΣV^n), jakožto paprsky komplexu procházející bodem v, budou tvořiti plochu kuželovou z_2 komplexu, již lze pokládati za útvar polárný svazku tečen paraboly $R_2^{(k)}$ pro plochu $\varphi_2^{(k)}$ (2, 4).

V následujícím vyšetřování budeme označovati poláru přímky $V^{(k)}$ pro plochu $\varphi_2^{(n)}$ znakem $R^{k,n}$. Z předeslaného jest zřejmo, že táž přímka jest polárou přímky V^n pro plochu φ_2^{k}, tak že $R^{k,n} \equiv R^{n,k}$. Dle toho bude polára přímky V^k pro plochu φ_2^{k} označena $R^{k,k}$ a R^k polára přímky V^k pro plochu φ_2, čili polára přímky V pro plochu φ_2^{k}.

6. Se svazkem rovin v ose V^k bude sdružena pro plochu φ_2 řada polů na tečně R^k paraboly R_2 v rovině ω a v rovině ω^n podobným způsobem řada polů na tečně $R^{k,n}$ paraboly $R_2{}^n$; obě tečny budou v rovině ω^k. V affinitě rovinných soustav ω a ω^n bude tedy s paprskem komplexu jedné roviny sdružen paprsek komplexu roviny druhé, a oba tyto paprsky budou v rovině polárné bodu v vzhledem k určité ploše řady $\Sigma\varphi_2{}^n$. Poněvadž obě paraboly R_2 a $R_2{}^n$ dotýkají se přímky $\overline{\omega\,\omega^n}$ (5), bude plocha obalová společných rovin tečných těchto parabol, čili dle předešlého plocha obalová polárných rovin $\Sigma\omega^n$ bodu v vzhledem ke plochám $\Sigma\varphi_2{}^n$ třídy třetí.

Přidružíme-li na vzájem body dotyčné každé z těchto rovin tečných s oběma parabolami R_2 a $R_2{}^n$, budou řady těchto bodů uvedeny v souvislosť projektivnou. Body spolu sdružené jsou při tom poly tečné roviny plochy $\varkappa_2$ pro plochy φ_2 a $\varphi_2{}^n$ (4). Poněvadž v obecném případě žádná z těchto rovin nesplývá s některou rovinou α^k, jsou každé dva spolu sdružené body parabol R_2 a $R_2{}^n$ od sebe různé, a plocha obalová společných rovin tečných těchto parabol jest tedy řádu čtvrtého. Budeme tuto pro následující vyšetřování důležitou plochu označovati φ_4. O zvláštních případech, které nastávají, je-li bod v v některé z rovin α^k, pojednáme později.

Počítáme-li přímku $\overline{\omega\,\omega^n}$ k rovině ω nebo $\omega^{(n)}$, přísluší k ní v druhé rovině přímka, v níž se tato rovina dotýká plochy φ_4. Každá z rovin $\Sigma\omega^n$, na př. ω^k, má kromě této přímky dotyčné s plochou φ_4 společnou parabolu $R_2{}^k$, která se oné přímky dotýká v bodě křivky vratu plochy φ_4.

7. K jasnějšímu názoru budiž ještě vytčeno, že system paprskový z odst. 4. lze vytvořiti pomocí jediné plochy naší řady, na př. plochy φ_2.

Všem bodům roviny ω odpovídají jakožto roviny polárné vzhledem k $\Sigma\varphi_2{}^n$ všecky roviny svazku v. Myslíme-li si z každého bodu roviny ω kolmici na příslušnou rovinu polárnou, tvoří tyto kolmice náš system, čili jinými slovy: tento system tvořen jest paprsky osového komplexu, které mají své poly pro plochu φ_2 v rovině ω. Vytkneme-li v rovině ω libovolnou osu R^k, jsou všecky paprsky systemu, mající na ní své poly, v reciproké rovině polárné ω^k této osy pro plochu φ_2 (2, 5 a 6).

8. Rovina $\omega^{(k)}$ má poláru $V^{(k)} \perp \omega^{(k)}$ (odst. 2, 4). Její reciproká polára $R^{k\,k}$ vzhledem k $\varphi_2{}^{(k)}$ jest v rovině $\omega^{(k)}$. Všecky osy mající poly své vzhledem ku ploše $\varphi_2{}^{(k)}$ na přímce $R^{k,k}$ jsou kolmy k rovinám svazku $V^{(k)}$ a náležejí tedy rovině $\omega^{(k)}$ obalujíce parabolu $R_2{}^{(k)}$, která se, jak patrno, přímky $R^{k,k}$ dotýká v jejím polu pro plochu $\varphi_2{}^{(k)}$. Každým paprskem $R^{k,n}$ roviny $\omega^{(k)}$ prochází kromě této roviny ještě jedna rovina tečná $\omega^{(n)}$ plochy φ_4 (5) různá od $\omega^{(k)}$, pouze pro přímku $R^{k,k}$ obě tyto roviny splynou. Z toho jde, že přímky $R^{k,k}$ jsou přímkami plochy φ_4.

Bod $t^{(k)}$, v němž přímka $R^{k,k}$ dotýká se paraboly $R_2{}^{(k)}$ čili bod křivky vratu plochy φ_4 jest dle předešlého polem přímky $R^{k,k}$ pro plochu $\varphi_2{}^k$. Poněvadž však bod v jest polem přímky $V^{(k)}$ pro touž plochu a přímky $V^{(k)}$ a $R^{k,k}$ jsou reciprokými polárami pro tuto plochu, jest bod $t^{(k)}$ reciprokým

polem bodu v pro plochu $\varphi_2^{(k)}$. Máme tudíž tento výsledek: Plocha φ_4 jest místem reciprokých polár přímek $V^{(k)}$ plochy $\varkappa_2$ vzhledem k plochám $\varphi_2^{(k)}$ k těmto přímkám příslušným, a její křivka vratu obsahuje reciproké poly středu v této plochy kuželové vzhledem ke všem plochám řady $\Sigma\varphi_2^{(n)}$.

9. Pro další vyšetřování jest důležito prozkoumati vzájemnou polohu paraboly R_2, křivky H_2 řádu 2., v níž plocha $\varkappa_2$ proťata jest rovinou ω, a křivky K_2 (odst. 1.). Poněvadž plocha $\varkappa_2$ jest polárným útvarem paraboly R_2 pro plochu φ_2, jest H_2 polárou paraboly R_2 vzhledem ke K_2; jest to tedy hyperbola obsahující střed křivky K_2 a nekonečně vzdálené body jejích os, jakož i body b', b'', b''' a b^{IV}, v nichž společné tečny křivek R_2 a K_2 křivky K_2 se dotýkají. Z prvnější vlastnosti následuje, že jí lze vepsati nekonečné množství polárných trojúhelníků křivky K_2.

Dokážeme, že prochází též body c', c'', c''' a c^{IV}, v nichž vytčené společné tečny T', T'', T''' a T^{IV} dotýkají se paraboly R_2.

Vytkneme-li totiž na H_2 libovolný bod x a určíme jeho poláru vzhledem ke K_2, protíná tato polára křivku H_2 v bodech y a z, které s bodem x tvoří polárný trojúhelník křivky K_2 vepsaný křivce H_2 a tudíž obepsaný parabole R_2.

Blíží-li se bod x na H_2 některému z bodů b, blíží se jeho polára příslušné tečně T, bod y bodu b a tudíž přímka xy tečně hyperboly H_2 v bodě b. Poněvadž ale bod z jest polem strany xy a parabola R_2 polárou hyperboly H_2 pro plochu φ_2, musí býti bod z na R_2, t. j. ztotožňuje se s příslušným bodem c.

Z toho vychází na jevo, že hyperbola H_2 jest totožna s kuželosečkou procházející osmi dotyčnými body společných tečen křivek K_2 a R_2, a parabola R_2 s kuželosečkou dotýkající se osmi tečen křivek K_2 a H_2 v bodech jim společných.

Dále jest zřejmo, že tečny v bodech f, společných křivkám R_2 a K_2, ke křivce K_2 jsou zároveň tečnami hyperboly H_2 a že jejich body dotyčné s touto křivkou jsou poly tečen paraboly R_2 v bodech f vzhledem ke křivce K_2.

Sestrojíme-li ve dvou z bodů b, na př. b' a b'', normály křivky K_2, a označíme-li bod jim společný s, jest křivkou obalovou přímek kolmo sdružených s paprsky svazku s (v rovině ω) vzhledem ke křivce K_2 parabola, dotýkající se os křivky K_2 a jejích tečen v bodech b' a b'', t. j přímek T' a T''. Jest tudíž tato parabola totožná s naší parabolou R_2 a následkem toho bod s bodem, v němž přímka V proniká rovinu ω. Bodem s, který dle souvislosti křivek R_2 a H_2 náleží této poslední, procházejí potom i normály křivky K_2 v ostatních dvou bodech b. Hyperbola H_2 jest tedy známou hyperbolou Apolloniovou, příslušnou ke křivce K_2 a bodu s.

Polára R bodu s pro křivku K_2, čili polára přímky V vzhledem ku ploše φ_2, jakož i normály R^q a $R^{q'}$ křivky K_2 v bodech d a d_1, v nichž přímka R křivku K_2 proniká, jsou též tečnami paraboly R_2. Přímky R^q a $R^{q'}$ jsou normálami plochy φ_2 v bodech d a d_1, poněvadž tečné roviny plochy φ_2 v těchto bodech procházejí přímkou $V \perp \omega$.

10. Normalie plochy φ_2 dle křivky K_2 tvořena jest paprsky komplexu osového, které mají pro plochu φ_2 své poly na K_2. Z odst. 2. jest zjevno, že tyto paprsky jsou polárami rovin tečných τ plochy φ_2 dle křivky K_2. Všecky tyto roviny obalují plochu kuželovou τ_2, která se plochy φ_2 dotýká dle křivky K_2. Kterýkoli bod křivky K_2 označíme $r^{i,k}$, tečny paraboly R_2 jím procházející $R^{(i)}$ a $R^{k)}$, jejich reciproké roviny polárné $\omega^{(i)}$ a $\omega^{(k)}$, a konečně přímku jim společnou čili normálu plochy φ_2 v bodě $r^{i,k}$ poznamenáme ve shodě s odst. 5. $R^{i,k}$. Dle toho bylo by body d a d_1 (odst. 9.) označit r^q a $r^{q'}$; pro krátkosť ponecháme pro tyto body označení d a d_1, a body podobného významu v rovině $\omega^{(k)}$ poznamenáme $d^{(k)}$ a ${d_1}^{(k)}$.

Normalie dle kuželosečky, jejíž rovina neprochází žádným vrcholem čtyrstěnu Δ.

11. Dle odst. 4. jest normalie v tomto případě obsažena v systemu paprsků 1. řádu a 3. třídy. Poly všech rovin tečných plochy τ_2 (odst. 10.) vzhledem ke kterékoli ploše řady $\Sigma {\varphi_2}^{(n)}$, na př. vzhledem ku ploše ${\varphi_2}^{(k)}$, jsou na křivce 2. řádu ${K_2}^{(k)}$ obsažené v rovině $\omega^{(k)}$ a náležející normalii. Přidružíme-li v kterýchkoli dvou takových křivkách, na př. v K_2 a ${K_2}^{(n)}$, na vzájem ty body, které jsou poly téže roviny τ pro plochy φ_2 a ${\varphi_2}^{(n)}$, budou obě kuželosečky spolu sdruženy projektivně. Přímky $R^{i,k}$ určené body k sobě příslušnými budou náležeti normalii, a poněvadž každá z rovin τ plochy τ_2 má pro plochy φ_2 a ${\varphi_2}^{(n)}$ různé poly, jest normalie stupně čtvrtého. Označíme ji ψ_4.

Každá z rovin $\Sigma \omega^{(n)}$, na př. $\omega^{(k)}$, má s touto plochou kromě křivky ${K_2}^{(k)}$ ještě společné dvě přímky, totiž spojnice bodů, v nichž přímka $\overline{\omega\,\omega^{(k)}}$ protíná K_2, s body roviny $\omega^{(k)}$ s nimi sdruženými, totiž s body $d^{(k)}$ a ${d_1}^{(k)}$ společnými křivce ${K_2}^{(k)}$ a přímce $R^{k,k}$, v níž rovina $\omega^{(k)}$ dotýká se plochy φ_4 (odst. 6.). Z toho následuje, že každá z rovin $\Sigma \omega^n$ jest dvojnásobnou rovinnou tečnou plochy ψ_4.

Z předeslaných úvah vyplývají tyto vlastnosti plochy ψ_4:

α) Jest výtvarem dvou projektivných v affinných soustavách rovinných obsažených kuželoseček. Kuželosečky tyto jsou polárami plochy τ_2 dotýkající se plochy φ_2 dle řídicí křivky K_2 vzhledem ke kterýmkoli dvěma plochám řady $\Sigma {\varphi_2}^{(n)}$.

β) Každá tečná rovina plochy φ_4, čili každá z rovin $\Sigma \omega^{(n)}$, jest její dvojnásobnou rovinnou tečnou.

γ) Všecky kuželosečky $\Sigma {K_2}^{(n)}$ plochy ψ_4 jsou buď ellipsy, nebo hyperboly, nebo paraboly, t. j. vždy téhož druhu jako řídicí křivka K_2.

δ) Středy všech těchto kuželoseček jsou na přímce O k rovině ω kolmé. Jsou totiž středy tyto, jakožto poly nekonečně vzdálených přímek rovin $\omega^{(k)}$ vzhledem k příslušným křivkám ${K_2}^{(k)}$ v affinných rovinných sousta-

vách ω, ω', ω'' .... body stejnolehlými a leží tudíž na paprsku komplexu, který má pro plochu φ_2 za pol střed křivky K_2. Poněvadž ale polárná rovina tohoto bodu pro plochu φ_2 jest stejnosměrná s rovinou ω, jest přímka O k této rovině kolma.

ε) Tečny křivek $\Sigma K_2^{(n)}$ v bodech spolu sdružených náležejí hyperbolickému paraboloidu, jehož přímky druhé soustavy jsou paprsky komplexu mající své poly vzhledem ku ploše φ_2 na příslušné tečně křivky K_2.

ζ) Sdruženým průměrům křivky K_2 přísluší v ostatních rovinách $\Sigma\omega^{(n)}$ sdružené průměry křivek $\Sigma K_2^{(n)}$; zvláště pak s osami křivky K_2 sdruženy jsou v těchto rovinách sdružené průměry křivek $\Sigma K_2^{(n)}$. — Poněvadž osy křivky K_2 jsou paprsky komplexu, jsou přímky s těmito osami sdružené v jejich reciprokých rovinách polárných, tak že lze tvrditi: Roviny procházející osami křivky K_2 kolmo k její rovině protínají každou rovinu tečnou $\omega^{(k)}$ plochy φ_2 ve sdružených průměrech kuželosečky $K_2^{(k)}$ náležející ploše ψ_4.

η) S asymptotami křivky K_2 sdruženy jsou v ostatních rovinách $\Sigma\omega^{(n)}$ asymptoty křivek $\Sigma K_2^{(n)}$.

ϑ) Tyto asymptoty tvoří dva hyperbolické paraboloidy, jejichž přímky druhé soustavy jsou paprsky komplexu osového, které mají své poly pro plochu φ_2 na asymptotách křivky K_2.*) Nekonečně vzdálené přímky této soustavy jsou přímkami plochy ψ_4, jsou to poláry rovin tečných plochy τ_2, které procházejí středem a^{IV} ploch $\Sigma\varphi_2^{(n)}$.

Dokážeme, že tyto hyperbolické paraboloidy jsou rovnostranné. Paprsky komplexu mající poly na některé asymptotě křivky K_2 jsou kolmy na roviny polárné těchto bodů pro plochu φ_2. Tyto roviny tvoří svazek, jehož osou jest polára asymptoty vzhledem ku ploše φ_2. Poněvadž ale tato polára jest s asymptotou stejnosměrna, jsou ony paprsky k asymptotě kolmy, t. j. hyperbolický paraboloid jimi tvořený jest rovnostranný.

12. Tak jako plocha ψ_4 tvořena jest paprsky komplexu, které mají své poly pro plochu φ_2 na kuželosečce K_2, jest plocha φ_4 složena z paprsků majících poly pro touž plochu na parabole R_2. Každé dvě soumezné přímky této plochy, majíce poly své na některé tečně paraboly R_2, tedy na paprsku komplexu, jsou různosměrné a tudíž plocha φ_4, jak jest nám již známo, jest plochou různosměrek. S plochou kuželovou $\varkappa_2$ jest v téže souvislosti, jako plocha ψ_4 s plochou τ_2. Z toho následuje, že osy parabol $R_2^{(k)}$ jsou stejnosměrny s jistou rovinou, neboť každá obsahuje nekonečně vzdálený pol tečné roviny plochy $\varkappa_2$ dle přímky $a^{IV}v$ vzhledem ku příslušné ploše $\varphi_2^{(k)}$, a tyto poly jsou na přímce.

---

*) Srovnej Dr. G. Peschky »Beitrag zur Theorie der Normalenflächen« (Sitzungsber. d. k. Ak. der Wissenschaften in Wien, B. 81) a »Neue Eigenschaften der Normalenflächen für Fl. 2. Grades längs ebener Schnitte«. (Sitzungsber. der k. Akad. der Wissenschaften in Wien, B. 85), kteráž pojednání skoro bez proměny otištěna jsou ve 4. sv. jeho spisu: »Darstellende und projective Geometrie« str. 183—254.

13. Budiž $R^{(k)}$ kterákoli tečna paraboly R_2, $t^{k,k}$ její bod dotyčný a $r^{k,i}$, $r^{k,j}$ body, v nichž protíná křivku K_2. Paprsky komplexu $R^{k,k}$, $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$, mající v těchto bodech své poly, jsou v reciproké rovině polárné $\omega^{(k)}$ přímky $R^{(k)}$; v první z nich tato rovina dotýká se plochy φ_4, druhé dvě náležejí ploše ψ_4. Přímky $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$ mají s přímkou $R^{k,k}$ společné body d^k a $d_1{}^k$, dotýkajíce se v nich plochy φ_4 (11.). Dokážeme, že i naopak přímka $R^{k,k}$ dotýká se v těchto bodech plochy ψ_4.

Bodem $t^{k,k}$ procházejí dvě soumezné tečny křivky R_2; jejich reciproké roviny polárné ω^k, ${}^1\omega^k$ mají společnou přímku $R^{k,k}$ a obsahují dva páry soumezných přímek plochy ψ_4, t. j. $R^{k,i}$, ${}^1R^{k,i}$ a $R^{k,j}$, ${}^1R^{k,j}$. Oba tyto páry jsou proťaty přímkou $R^{k,k}$, která tudíž jest tečnou plochy ψ_4 v bodech d^k a $d_1{}^k$.

Plochy φ_4 a ψ_4 dotýkají se dle jisté křivky, která jest místem bodů d^k, $d_1{}^k$.

14. Řád této křivky lze takto určiti:

Křivky K_2 a R_2 mají čtyři společné body $f^{(n)}$. Paprsky $F^{(n)}$ mající v nich pro plochu φ_2 své poly jsou přímkami obou ploch φ_4 a ψ_4. V každé z těchto přímek obě plochy se protínají a mimo ně nemohou míti jiných přímek společných, poněvadž poly jejich musily by býti společnými body křivek K_2 a R_2. Z toho jde, že zbývající část útvaru jim společného jest řádu 12., ale poněvadž obě plochy v tomto útvaru vzájemně se dotýkají, jest křivka dotyku řádu 6. Křivku tuto, o níž brzy poznáme, že s každou rovinou $\Sigma\omega^{(n)}$ má skutečně 6 společných bodů, budeme označovati C_6.

15. Budiž $R^{i,k}$ kterákoli přímka plochy ψ_4 a $r^{i,k}$ její pol. Tímto bodem procházejí dvě tečny R^i a R^k paraboly R_2 a tedy přímkou $R^{i,k}$ dvě z rovin ω, t. j. ω^i a ω^k dotýkající se této paraboly v bodech $t^{i,i}$ a $t^{k,k}$. Přímky $R^{i,i}$ a $R^{k,k}$ plochy φ_4 protínají přímku $R^{i,k}$ v bodech d^k a d^i, v nichž tato přímka dotýká se plochy φ_4 (11, 14). Každá přímka plochy ψ_4 jest tedy dvojnásobnou tečnou plochy φ_4. Roviny tečné plochy φ_4 v těchto bodech, t. j. roviny ω^k a ω^i, jsou obecně různé, jen pro každou z přímek $F^{(k)}$ splynou. Z této poslední okolnosti vychází na jevo, že křivka C_6 dotýká se těchto přímek. Dokážeme později, že body dotyku náležejí křivce vratu plochy φ_4.

16. Kterákoliv rovina ω^k ze soustavy $\Sigma\omega^{(n)}$ protíná plochu ψ_4 v křivce $K_2{}^{(k)}$ a ve dvou přímkách $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$, plochu φ_4 pak v parabole $R_2{}^{(k)}$ a ve dvou soumezných přímkách $R^{k,k}$, ${}^1R^{k,k}$. Přímky $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$ protínají $K_2{}^{(k)}$ ve čtyřech bodech d^k, $d_1{}^k$, e^i a e^j, z nichž první dva, náležející též přímce $R^{k,k}$, jsou body dotyčnými roviny $\omega^{(k)}$ s plochou ψ_4, druhé dva pak, jakož i bod ι^k oběma přímkám $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$ společný, jsou na dvojné křivce plochy ψ_4.

Parabola $R_2{}^{(k)}$ dotýká se přímek $R^{k,i}$ a $R^{k,j}$ v bodech d^i a d^j, náležejících křivce C_6 (14) a přímky $R^{k,k}$ v bodě $t^{(k)}$ křivky vratu plochy φ_4. Rovina $\omega^{(k)}$ dotýká se křivky C_6 v bodech d^k, $d_1{}^k$ a protíná ji v bodech d^i a d^j, má s ní tedy 6 společných bodů (14). Křivky $K_2{}^{(k)}$ a $R_2{}^{(k)}$ mají čtyři společné body, v nichž přímky $F^{(k)}$ protínají rovinu ω^k.

16. Každá z rovin ω^i a ω^k procházejících přímkou $R^{i,k}$ (15) má s plochou ψ_4 kromě této přímky ještě jednu společnou přímku, totiž paprsek, který

má pol v bodě, v němž tečny R^i a R^k křivku K_2 po druhé protínají. Z toho vyplývá, že na každé přímce plochy ψ_4 jsou dva a tudíž v každé rovině $\omega^{(k)}$ tři body dvojné křivky této plochy. Křivka dvojná jest tedy, jak v odst. 19. ještě přesněji poznáme, řádu třetího.*) Budeme ji označovati C_3. Pro každou přímku $F^{(k)}$ jsou obě roviny ω^k a ω^i jí procházející nekonečně blízké a tudíž i body křivky C_3 na ní ležící. Křivka C_3 dotýká se tedy přímek $F^{(k)}$. V každé z těchto rovin ω splynou body d^k, d^i a t^k, dále $d_1{}^k$, c^i a c^j; má tudíž tato rovina v bodě d^k s C_6 tři, v bodě $d_1{}^{(k)}$ dva společné body a v bodě d^j ji protíná. Zároveň poznáváme, že křivka C_6 dotýká se přímek $F^{(k)}$ v bodech křivky vratu (15). Body tyto označíme zvláště g', g'', g''', g^{IV}.

17. Přímky plochy ψ_4 mající poly v bodech $b^{(k)}$, v nichž společné tečny $T^{(k)}$ křivek R_2 a K_2 této se dotýkají, označíme krátce $B^{(k)}$; reciproké roviny polárné oněch tečen $\omega_{b'}$, $\omega_{b''}\ldots$, druhé pak roviny ze soustavy $\Sigma\omega^{(n)}$ přímkami $B^{(k)}$ procházející $[\omega_{b'}]$, $[\omega_{b''}]$, ... a druhé přímky jim a ploše ψ_4 společné $[B']$, $[B'']$, ...

Přihlédněme k jedné ze společných tečen, na př. k T'. S křivkou K_2 má společné dva soumezné body b', ${}^1b'$, z čehož jde, že rovina $\omega_{b'}$ obsahuje dvě soumezné přímky B', ${}^1B'$ plochy ψ_4. Každá z rovin $\omega_{b^{(k)}}$ jest tedy torsální rovinou plochy ψ_4.

Bod $e_{b'}$ společný přímkám B', ${}^1B'$ jest pro plochu ψ_4 bodem kuspidálným (vrcholem); s ním, jak hned ze zevrubnějšího jeho určení poznáme, splynou i příslušné k přímkám B', ${}^1B'$ body d^i a d^j.

Každým ze soumezných bodů b', ${}^1b'$ prochází ještě jedna tečna paraboly R_2. Tyto soumezné tečny protínají se v bodě paraboly R_2, a paprsek mající tento bod za pol musí protínati obě přímky B', ${}^1B'$ a poněvadž s nimi není v rovině, prochází jejich společným bodem $e_{b'}$. Týž paprsek stanoví na B', ${}^1B'$ body d^i a d^j, které tedy s bodem $e_{b'}$ splynou.

Torsální rovina $\omega_{b'}$ má s křivkou C_6 v bodě $d_{b'}$, k němuž jest bod ${}^1d_{b'}$ na přímce ${}^1B'$ soumezný, čtyři a v bodě $e_{b'}$ dva nekonečně blízké společné body. Křivka C_6 dotýká se v posledním bodě přímky B'.

Každá z rovin torsálních dotýká se tedy křivky C_6 dvakráte; v bodech kuspidálných má s ní dotyk stupně 1. a v bodě příslušné torsální přímky, ve kterém proťata jest přímkou plochy φ_4, náležející této rovině torsální, dotyk stupně 3. Křivka C_3 prochází body kuspidálnými a majíc mimo to na každé z přímek $B^{(k)}$, ${}^1B^{(k)}$ ještě jeden bod, dotýká se každé torsální roviny.

Plochy φ_4 dotýká se v bodech náležejících přímkám $F^{(k)}$ (14) a tudíž protíná ji v bodech kuspidálných plochy ψ_4.

Z odst. 9. vyplývá, že torsální přímky protínají poláru roviny ω, t. j. přímku V.

*) Analytický důkaz toho obsažen jest v pojednání Koutného »Die Normalenflächen der Flächen 2. Ordnung längs ebener Schnitte derselben« (Sitzungsber. der k. Akad. der Wissenschaften in Wien, 75. sv. 1877). Viz též dříve uvedené práce Peschkovy.

18. Promítejme přímky plochy ψ_4 z některého bodu dvojné křivky C_3, na př. z bodu c^q, v němž normála R^q obsažená v rovině ω protíná po druhé křivku K_2. Body křivky K_2 promítají se z tohoto bodu paprsky snovu 1. st., který jest s řadou těchto bodů projektivný, a body kterékoli křivky $K_2{}^x$ snovem kuželovým 2. řádu, který jest s řadou $K_2{}^x$ a tudíž i s řadou K_2 a se snovem svrchu vytčeným projektivný. Poněvadž při projektivnosti řad K_2 a $K_2{}^x$ bodu d^q křivky K_2 přidružen jest bod křivky K_2 ležící na přímce $d^q c^q$, jest tato přímka v obou snovech samodružná, z čehož následuje, že roviny určené spolu sdruženými přímkami obou snovů, t. j. roviny, jimiž se přímky plochy ψ_4 promítají z bodu c^q, obalují plochu kuželovou 2. st.; označíme ji $\varepsilon_2{}^q$. Podobně přísluší k bodu $c^{q'}$ plocha kuželová $\varepsilon_2{}^{q'}$. Oba kuželové snovy tečných rovin ploch $\varepsilon_2{}^q$ a $\varepsilon_2{}^{q'}$ jsou v poloze perspektivní k řadě bodů křivky K'_2, čímž uvedeny jsou spolu v souvislosť projektivnou. Z toho následuje, že plocha ψ_4 může býti pokládána za výtvar projektivných snovů rovin tečných dvou ploch kuželových 2. st.

19. Na základě úvah odst. 18. lze body roviny ω přidružiti reciproce k rovinám prosnovu c^q tak, že každému bodu křivky K_2 přidružena jest rovina, jíž se přímka plochy ψ_4 jím procházející z bodu c^q promíhá. Každé tečně R^k paraboly R_2 bude v prosnovu c^q odpovídati přímka, jíž se z bodu c^q promítá bod c^k, společný normálám R^{ki} a R^{kj} plochy φ_2 v bodech, v nichž tuto plochu přímka R^k protíná. Z toho vyplývá, že křivka C_3 promítá se z každého svého bodu plochou kuželovou 2. řádu, již označíme γ_2, a že tedy dvojná křivka C_3 plochy ψ_4 jest řádu třetího.

Přidružíme-li přímku $c^q c^k$ plochy γ_2 k přímce R^k snovu tečen paraboly R_2, bude snov přímek plochy kuželové $\gamma_2{}^q$ projektivně vztažen ke snovu tečen paraboly R_2; bodům této paraboly budou odpovídati tečné roviny křivky C_3 procházející bodem c^q.

Podobně můžeme rovinnou soustavu ω vztahovati reciproce k prosnovu $c^{q'}$, načež oba prosnovy c^q a $c^{q'}$ budou v souvislosti kollineárné, přidružíme-li na vzájem jejich roviny odpovídající témuž bodu roviny ω. Výtvarem těchto prosnovů bude system paprskový 3. řádu a třídy 1., v němž plocha ψ_4 jest obsažena.*)

20. Vlastnosti dosud vyvinuté znova se objasní a nové se poznají, přihlédneme-li ku prostorovému svazku rovin o středu v a ku plochám kuželovým $\varkappa_2$ a τ_2.

Polára kterékoli tečné roviny $\tau^{i,k}$ plochy τ_2, tudíž i plochy φ_2, jest přímkou $R^{i,k}$ plochy ψ_4. Poly všech rovin $\tau^{i,k}$ vzhledem ke každé ploše $\varphi_2{}^m$ z řady $\Sigma\varphi_2{}^n$ jsou v rovině $\omega^{(m)}$ na kuželosečce $K_2{}^m$ plochy ψ_4; zvláště pak jsou průseky plochy ψ_4 s rovinami $\alpha^{(k)}$ polárné útvary plochy τ_2 vzhledem k fokálným kuželosečkám v těchto rovinách.

---

*) Srovnej: Reye »Geometrie der Lage« II. Abth., 15. Vortrag.

Rovina ω^m má s plochou ψ_4 kromě křivky K_2^m společné dvě přímky R^{im} a R^{km}, poláry rovin τ^{km} a τ^{im} kolmých k rovině ω^m. Tyto roviny procházejí přímkou $V^m \perp \omega^m$ plochy $\varkappa_2$, která jest polárou roviny ω^m.

Poněvadž rovina ω^m jest polárnou rovinou bodu v pro plochu φ_2^m, musí reciproké poláry přímek $R^{i,m}$ a $R^{k,m}$ vzhledem k této ploše procházeti bodem v, a poněvadž každá z nich obsahuje pol jedné z rovin $\tau^{k,m}$ a $\tau^{i,m}$ pro plochu $\varphi_2^{(m)}$, musí ony reciproké poláry býti v těchto rovinách. Uvážíme-li dále, že reciproké poláry paprsků komplexu jsou zase paprsky komplexu a že všecky paprsky komplexu procházející bodem v náležejí kuželi $\varkappa_2$ komplexu, jest zřejmo, že přímky R^{im} a R^{km} jsou reciprokými polárami přímek V^i a V^k, v nichž roviny τ^{im} a τ^{km} plochu $\varkappa_2$ po druhé protínají, vzhledem ke ploše φ_2^m. Bod e^m křivky dvojné C_3, společný přímkám R^{im} a R^{km}, jest následkem toho polem roviny $V^k\ V^i$, již krátce označíme ε^m, pro plochu φ_2^m.

Pol roviny τ^{im} pro plochu φ_2^m jest jednak na přímce R^{im}, jednak na křivce K_2^m, jest to tedy jeden z bodů jim společných; podobné platí o polu roviny τ^{km} vzhledem k téže ploše. Přímka těmito dvěma poly určená jest polárou přímky V^m pro plochu φ_2^m a tudíž paprskem komplexu. Z toho jde, že ony dva poly jsou body d^m a d_1^m křivky C_6 a vytčená polára přímky V^m přímkou $R^{m,m}$ polohy φ_4, v které se této plochy dotýká rovina ω^m.

Každou z přímek V^i a V^k jest možná ještě jedna rovina tečná plochy τ_2; jmenujme tyto roviny τ^{ip} a τ^{ir}. Jejich poly pro plochu φ_2^m jsou i na křivce K_2^m i na přímkách R^{im} a R^{km}, jsou to tedy body e^i a e^k dvojné křivky C_3.

21. Poly rovin tečných $\varkappa$ plochy $\varkappa_2$ vzhledem ke ploše $\varphi_2^{(m)}$ jsou v rovině ω^m na parabole R_2^m; jejich poláry jsou přímkami plochy φ_4. Rovina ω^m má s plochou φ_4 kromě paraboly R_2^m ještě společné dvě nekonečně blízké přímky $R^{m,m}$, ${}^1R^{m,m}$, poláry rovin tečných plochy $\varkappa_2$, které jsou kolmy na ω^m. Poněvadž obě tyto roviny procházejí přímkou V^m plochy $\varkappa_2$, jsou nekonečně blízké a tudíž i jejich poláry $R^{m,m}$, ${}^1R^{m,m}$. Tím potvrzuje se znova, že přímky $R^{k,k}$ jsou reciprokými polárami přímek V^k pro plochy φ_2^k (8).

Přímka $R^{m,m}$ dotýká se paraboly R_2^m v bodu $t^{(m)}$, který jest polem roviny $\varkappa^m$ (tečné roviny plochy $\varkappa_2$ dle přímky V^m) pro plochu φ_2^m, čili reciprokým polem bodu v pro touž plochu (8).

Rovina tečná $\varkappa^i$ má pro tuto plochu pol náležející parabole R_2^m i poláře přímky V^i, t. j. přímce $R^{i,m}$; jest to tedy bod d^i; podobně jest polem tečné roviny $\varkappa^k$ bod d^k.

Výsledky odstavce 18. a 19. shrnuty jsou v této větě:

Myslíme-li si každou přímkou V^m plochy $\varkappa_2$ tečné roviny τ^{im} a τ^{km} ke ploše τ_2, jsou poláry přímek V^i a V^k, v nichž tyto roviny plochu τ_2 podruhé protínají, vzhledem ke ploše φ_2^m přímkami plochy ψ_4, poly oněch tečných rovin body, v nichž křivka C_6 roviny ω^m se dotýká, a pol roviny ε^m určené přímkami V^i a V^k bodem e^m dvojné křivky C_3.

Druhé tečné roviny plochy τ_2 procházející přímkami V^i a V^k mají pro touž plochu φ_2^m za poly ostatní dva body e^i a e^k křivky

dvojné, které jsou v rovině ω^m; konečně tečné roviny plochy $\varkappa_2$ dle přímek V^m, V^i a V^k mají za poly bod t^m křivky vratu plochy φ_4 a body d^i a d^k, v nichž se přímky $R^{i,m}$ a $R^{k,m}$ plochy φ_4 po druhé dotýkají.

22. Budiž zase τ^{im} kterákoli rovina tečná plochy τ_2, a V^i, V^m přímky, v kterých protíná plochu $\varkappa_2$. Každou z těchto přímek prochází ještě jedna rovina tečná ke ploše τ_2; tyto roviny označíme τ^{in} a τ^{mr} a jejich další přímky s $\varkappa_2$ společné V^n a V^r.

Dle odst. 21. jest

polem roviny τ^{im} pro $\varphi_2{}^i$ bod d^i, v němž přímka R^{im} dotýká se ψ_4,
» » » » $\varphi_2{}^m$ » d^m, » » » » » » po druhé,
» » » » $\varphi_2{}^n$ » c^i přímky $R^{i,m}$ a křivky dvojné,
» » » » $\varphi_2{}^r$ » c^m » » » » .

Ze souvislosti přímek V^k s plochami $\varphi_2{}^{(k)}$ vyplývá rovnosť dvojpoměrů

$$(V^i, V^m, V^n, V^r) = (d^i, d^m, e^i, e^m).$$

Poláry přímek V^i a V^m pro plochu φ_2 jsou tečny R^i a R^m paraboly R_2, protínající se v bodě r^{im} křivky K_2; poláry přímek V^n a V^r pro touž plochu jsou druhé tečny R^n a R^r paraboly R_2 vedené z bodu r^{in} a r^{mr}, v nichž přímky R^i a R^m křivku K_2 po druhé protínají. Jest tudíž

$$(V^i, V^m, V^n, V^r) = (R^i, R^m, R^n, R^r)$$

a tím i

$$(R^i\ R^m\ R^n\ R^r) = (d^i\ d^m\ e^i\ e^m).$$

V tomto výsledku obsažena jest věta:

Sestrojíme-li z některého bodu r^{im} křivky K_2 tečny R^i a R^m na parabolu R_2 a z bodů r^{in} a r^{mr}, v nichž tyto tečny křivku K_2 po druhé protínají, druhé tečny R^n a R^r oné paraboly, jest dvojpoměr bodů d^i, d^m, e^i, e^m na přímce R^{im} plochy ψ_4 roven dvojpoměru tečen R^i, R^m, R^n a R^r.

K témuž výsledku lze takto dospěti: Označme $t^{i,i}$ a $t^{m,m}$ body dotyčné tečen R^i a R^m s parabolou R_2 a příslušné k nim paprsky komplexu R^{ii} a R^{mm}.

Paprsek R^{in} protíná přímku R^{im} v bodě e^i,
» R^{mr} » » » » e^m,
» R^{ii} » » » » d^i,
» R^{mm} » » » » d^m.

Označíme-li r^{ir} bod společný přímkám R^i a R^r, jest

$$(r^{im}, r^{in}, r^{ir}, r^{ii}) = (R^{im}, R^{in}, R^{ir}, R^{ii}),$$

poněvadž přímky v pravo napsané jsou tečnami paraboly $R_2{}^i$, jíž se i přímka R^i dotýká. Uvážíme-li, že tato parabola dotýká se přímky R^{im} v bodě d^m, a dále, že paprsek, mající svůj pol v bodě r^{ir}, protíná přímku R^{im} v témž bodě jako přímka $R^{m,r}$, t. j. v bodě e^m, obdržíme nejprve

$$(R^{im}, R^{in}, R^{ir}, R^{ii}) = (d^m, e^i, e^m, d^i).$$

Poněvadž vzhledem k parabole R_2 jest

$$(r^{im},\ r^{in},\ r^{ir},\ r^{ii}) = (R^m,\ R^n,\ R^r,\ R^i),$$

bude

$$(R^m,\ R^n,\ R^r,\ R^i) = (d^m,\ e^i,\ c^m,\ d^i),$$

čímž vyslovená dříve věta znova jest dokázána.

23. Z výsledků nabytých v odstavcích 20.—22. snadno lze odvoditi vlastnosti obsažené v odst. 15. a 17. Ukážeme nejprve, jak na základě odst. 20. poznáme vzájemnou polohu útvarů náležejících plochám φ_4 a ψ_4 a rovinám torsálným.

K rovině ω_b přísluší přímka V_b procházející bodem b, společná plochám $\varkappa_2$ a τ_2. Pro tuto přímku stanou se nekonečně blízkými

a) roviny τ^{im} a τ^{km},
b) přímky V^i a V^k,
c) roviny τ^{ip} a τ^{kr},
d) » $\varkappa^i$, $\varkappa^k$ a ε^m.

Z *b*) poznáváme opětně, že přímky $R^{i,m} \equiv B$ a $R^{k,m} = {}^1B$ v tomto případě jsou k sobě nekonečně blízké v rovině ω_b. Jejich průsečník e_b jest polem roviny ε^m vzhledem k příslušné ploše $\varphi_2{}^b$ a poněvadž tato rovina sjednocuje se dle *d*) s rovinami $\varkappa^i$ a $\varkappa^k$, splynou s tímto bodem i body d^i a d^k. Z *a*) vychází na jevo, že body d_b a ${}^1d_b$, v nichž přímka C plochy φ_4 protíná přímky B a ${}^1B$ a zároveň kuželosečku $K_2{}^{(b)}$, jsou nekonečně blízké, že tedy v těchto bodech přímka C dotýká se této kuželosečky. Konečně z *c*) vyplývá, že i body e^i a e^k, v nichž přímky B a ${}^1B$ kuželosečku $K_2{}^{(b)}$ po druhé protínají, se sjednocují. Tyto body jsou různé od bodu c_b, poněvadž rovina ε^m, jejímž polem tento bod jest, nesjednocuje se s rovinami v *c*) vytčenými.*) Parabola $R_2{}^{(b)}$ prochází bodem e_b dotýkajíc se v něm přímky B, poněvadž rovina ε^m jest rovinou tečnou plochy kuželové $\varkappa_2$.

24. Podobně poznáme, jakou vzájemnou polohu mají útvary ploch φ_4 a ψ_4 v rovině ω_f, která dotýká se plochy φ_4 dle některé z přímek F.

V tomto případě bude rovina $\tau^{im} = \tau_f$ rovinou tečnou plochy τ_2 dle přímky vf a zároveň rovinou tečnou plochy $\varkappa_2$ dle určité přímky V_f, která v tomto případě zastupuje přímku $V^{(m)}$ z odst. 20. Přímky V^i a V^k budou nekonečně blízkými přímkami plochy $\varkappa_2$, a rovina ε^m bude nekonečně blízka k rovinám τ^{km} a τ^{ip}, a konečně roviny $\varkappa^m$ a $\varkappa^i$ nekonečně blízké k rovině τ^{im}; pouze roviny $\varkappa^k$ a τ^{kr} se nesjednotí se žádnou z předcházejících rovin.

---

*) Pojednal jsem o tomto předmětu, o němž bylo lze jednati již v odst. 17., až na tomto místě, poněvadž tu vzájemnosť útvarů B, C_3, $K_2{}^{(b)}$ a $R_2{}^{(b)}$ jasněji vystupuje. Že v této příčině opatrnosti nezbývá, jest zřejmo z pojednání Peschkova. Vzájemnosť prvních tří útvarů chybně jest popsána větou: »Die Berührungsebenen der Normalenfläche längs ihrer vier Torsallinien schneiden die Fläche nach Kegelschnitten, welche die betreffenden Torsallinien in jenen Punkten berühren, in welchen diese auch von der Doppelcurve der Normalenfläche berührt werden.« (Darst. und proj. Geometrie, IV. sv., str. 192.) Z našeho vyšetřování jest zřejmo, že ani křivka $K_2{}^b$ ani křivka C_3 nedotýkají se torsálných přímek.

Z toho následuje, že body d^m, d^i a t^m budou nekonečně blízké, ale pouze bod d^m bude na křivce $K_2{}^f$, kdežto ostatní dva body budou náležeti parabole $R_2{}^f$; bude se v nich dotýkati přímky F. Rovněž i body $d_1{}^m$, e^i a $e^m = e^f$ stanou se nekonečně blízkými, ale jen dva z nich, t. j. $d_1{}^m$ a e^i, jsou na křivce $K_2{}^f$. Tečna této křivky v bodě $d_1{}^m$ (čili e^i) jest polárou průsečnice rovin τ^{ip} a τ^{km}, t. j. přímky $v\,g$, v níž rovina $\tau^{k,m}$ dotýká se plochy τ_2, vzhledem ke ploše $\varphi_2{}^f$. Konečně bude křivka $K_2{}^f$ procházeti bodem e^k, a parabola $R_2{}^f$ bude se dotýkati v bodě d^k druhé přímky plochy ψ_4 obsažené v rovině ω^f.

Ustanovme tečnu křivky $K_2{}^f$ v bodě e^i, čili dle předešlého poláru přímky $v\,g$ pro plochu $\psi_2{}^f$.

Dokážeme nejprve, že bod g jest na tečně R_f paraboly R_2 v bodu f. Přímka $f\,g$ jest polárou bodu h, v němž přímka V^m protíná rovinu ω, vzhledem ke křivce K_2; poněvadž bod h náleží hyperbole H_2, musí býti jeho polára $f\,g$ tečnou paraboly R_2, tedy tečnou v bodě f čili totožná s přímkou R^f.

Přímka $v\,g$ protíná tedy přímku R_f v bodě g a tudíž její polára vzhledem ke ploše $\varphi_2{}^{(f)}$ musí protínati poláru přímky R^f pro touž plochu, t. j. přímku V. Tím dospěli jsme k výsledku: Tečny čtyř křivek $K_2{}^f$ v bodech e^f protínají poláru V roviny ω.

25. Výsledek tento jest zvláštním případem vlastnosti obecnější. Hleďme určiti tečny kterékoli křivky $K_2{}^m$ v bodech d^m a $d_1{}^m$. Body tyto jsou poly rovin τ^{im} a τ^{km} pro plochu $\varphi_2{}^m$. Označíme-li g^{im} a g^{km} stopy přímek, v nichž tyto roviny dotýkají se plochy τ_2, na rovině ω, bude přímka $g^{im}\,g^{km}$ tečnou R^m paraboly R_2 a reciproké poláry přímek $v\,g^{im}$ a $v\,g^{km}$ pro plochu $\varphi_2{}^m$ tečnami křivky $K_2{}^m$ v bodech d^m a $d_1{}^m$. Poněvadž přímky $v\,g^{im}$ a $v\,g^{km}$ protínají přímku R^m, budou jejich poláry pro plochu $\varphi_2{}^m$ protínati poláru této přímky, t. j. přímku V. Tím dospěli jsme k větě:

»Poly přímek $R^{m,m}$ plochy φ_4 vzhledem ke kuželosečkám $K_2{}^m$ plochy ψ_4 jsou na poláře V roviny ω.«

Jest patrno, že věta vyslovená v odst. 24. z této věty vyplývá.

Pro roviny torsální body d^m a $d_1{}^m$ splynou a polem přímky $R^{m,m} \equiv C$ jest tedy její bod dotyčný s kuželosečkou $K_2{}^b$. Tím poznáváme:

Polára V roviny ω protíná čtyři přímky torsální v týchž bodech, v kterých je protínají přímky, v nichž se roviny torsální dotýkají plochy φ_4. (Srv. odst. 9. a 17.*)

26. Roviny $\tau^{i,m}$, $\tau^{k,m}$ a ε^m tvoří trojhran vepsaný ploše $\varkappa_2$, a roviny $\varkappa^k$, $\varkappa^i$ a $\varkappa^m$ trojhran onomu trojhranu a zároveň ploše $\varkappa_2$ obepsaný. Z toho jde, že přímky $\varkappa^i\,\tau^{k,m}$, $\varkappa^k\,\tau^{i,m}$ a $\varkappa^m\,\varepsilon^m$ jsou v jisté rovině ψ. Rovina ε^m má pro plochu $\varphi_2{}^m$ týž pol jako rovina $\tau^{i,m}$ pro plochu $\varphi_2{}^k$ a rovina $\tau^{k,m}$ pro plochu $\varphi_2{}^i$, totiž bod e^m dvojné křivky C_3 plochy ψ_4.

Dále jsou poly rovin $\varkappa^m$, $\varkappa^i$ a $\varkappa^k$ vzhledem k plochám $\varphi_2{}^m$, resp. $\varphi_2{}^i$ a $\varphi_2{}^k$ body t^m, t^i a t^k křivky vratu plochy φ_4, náležející rovinám ω^m, ω^i a ω^k.

---

*) Srovnej Peschkovy· »Neue Eigenschaften etc.« str. 394. (Sitzungsber. der k. Akad. der Wissenschaften B 85) nebo »Darst. und proj. Geometrie« IV. sv., str. 243.

Z toho vyplývá, že přímka

$e^m\ t^m$ jest polárou přímky $\varepsilon^m\ \varkappa^m$ pro plochu $\varphi_2{}^m$,
$e^m\ t^i$ » » » $\tau^{km}\ \varkappa^i$ » » $\varphi_2{}^i$ a konečně
$e^m\ t^k$ » » » $\tau^{im}\ \varkappa^k$ » » $\varphi_2{}^k$.

Poněvadž tři přímky v pravo napsané jsou v rovině ψ, musí jejich poláry pro uvedené tři plochy, t. j. přímky v levo napsané, protínati poláru roviny ψ vzhledem k řadě ploch $\Sigma\varphi_2{}^n$. Tato polára nemůže procházeti bodem e^m, neboť by potom polárné roviny tohoto bodu pro čtyři plochy řady $\Sigma\varphi_2{}^n$, t. j. roviny ε^m, τ^{im}, τ^{km} a ψ, procházely bodem v. Bodem mohou procházeti jen tři takové roviny, poněvadž roviny polárné každého bodu pro všecky plochy řady $\Sigma\varphi_2{}^n$ obalují plochu třídy třetí.

Z toho následuje nutně, že přímky v levo napsané jsou v rovině. Uvážíme-li, že tyto přímky jsou v rovinách ω^m resp. ω^i a ω^k, můžeme vysloviti větu:

Bod dvojné křivky plochy ψ_4 a tři body křivky vratu plochy φ_4 ležící v rovinách ω, které tímto bodem procházejí, jsou v rovině.

Podotýkám, že tato vlastnosť vyplývá též ze známé přidruženosti bodů a oskulačních rovin křivky třetího řádu v nullovém systemu.

27. Buďtež R^r, R^s, R^t kterékoli tři tečny paraboly R_2.

Pro každou z přímek V^r, V^s a V^t, které jsou jejich polárami vzhledem ke ploše φ_2, mysleme si sestrojený příslušný k ní trojhran vepsaný a obepsaný ploše τ_2, tak jako v odst. 26. pro přímku V^m.

Ze souvislosti přímek V^r, V^s a V^t s rovinami ε^r resp. ε^s a ε^t jest zřejmo, že budou k sobě přidruženy v jistém systemu polárném,*) že tedy průsečnice rovin ε^r a $V^s\ V^t$, ε^s a $V^t\ V^r$ a konečně ε^t a $V^r\ V^s$ budou v jisté rovině ϱ.

Roviny ε^r, ε^s a ε^t mají za poly ve plochách $\varphi_2{}^r$ resp. $\varphi_2{}^s$ a $\varphi_2{}^t$ body e^r, resp. e^s a e^t ležící v rovinách ω^r resp. ω^s a ω^t. Tyto tři roviny procházejí jistým bodem x, jehož polárnými rovinami pro plochy $\varphi_2{}^r$, $\varphi_2{}^s$ a $\varphi_2{}^t$ jsou roviny $V^s\,V^t$, resp. $V^t\,V^r$ a $V^r\,V^s$. Jest totiž na př. polárou přímky V^r ve ploše $\varphi_2{}^t$ přímka R^{rt} společná rovinám ω^r a ω^t, a polárou přímky V^s v téže ploše přímka R^{st} společná rovinám ω^s a ω^t, tedy bod $\omega^r\ \omega^s\ \omega^t$, t. j. x, polem roviny $V^r\ V^s$ pro plochu $\varphi_2{}^t$.

Z téhož důvodu jako v odst. 24. nemohou kromě tří rovin polárných $V^r\ V^s$, $V^r\ V^t$ a $V^s\ V^t$ bodu x procházeti bodem v jiné roviny polárné tohoto bodu pro plochy řady $\Sigma\varphi_2{}^n$.

Polárou přímky společné rovinám ε^r a $V^s\ V^t$ pro plochu $\varphi_2{}^r$ bude dle předešlého přímka $e^r x$, a podobně budou přímky $e^s x$ a $e^t x$ polárami ostatních svrchu vytčených průsečnic pro plochu $\varphi_2{}^s$ resp. $\varphi_2{}^t$. Ježto ony průsečnice jsou v rovině ϱ, musí tyto poláry protínati poláru této roviny, která nemůže procházeti bodem x. Z toho jde, že ony tři poláry jsou v rovině. V tom obsažen jest následující výsledek:

---

*) Věta, jíž zde bylo užito, zní: »Sestrojíme-li z bodů r křivky K_2 2. st. tečny k jiné křivce R_2 2. st., jsou přímky určené druhými proniky každých dvou z bodu r vedených tečen s křivkou K_2 přidruženy k bodům r v určité polární soustavě.« Obdržíme ji jakožto vedlejší výsledek vyšetřování v odst. 36.

Bod společný kterýmkoli třem rovinám ω^r, ω^s a ω^t jest v rovině určené body c^r, c^s a c^t dvojné křivky plochy ψ_4, v nichž protínají se přímky této plochy v oněch rovinách ležící.

Dle toho jest každé rovině ω^n přidružen bod c^n v jistém nullovém systemu.*)

V tomto systemu bude přímce $R^{n,n}$ plochy φ_4 přidružena tečna dvojné křivky C_3 v bodě c^n a tedy bodu t^n křivky vratu plochy φ_4 rovina oskulační křivky C_3 v bodě c^n. Každou přímkou $R^{i,m}$ plochy φ_4 procházejí dvě roviny ω^i a ω^m, a k nim přidruženy jsou dva body c^i a c^m společné této přímce a dvojné křivce C_3. Jsou tudíž přímky $R^{i,m}$ přímkami nullového systemu.

Kterýmkoliv bodem x přímky $R^{i,m}$ prochází kromě dvou rovin ω^m a ω^i ještě třetí rovina ω^n ze soustavy $\Sigma\omega^n$; k této rovině přidružen jest v nullovém systemu bod c^n a tudíž bodu x rovina c^n $R^{i,m}$.

K libovolnému bodu plochy ψ_4 jest tedy v nullovém systemu přidružena rovina, spojující přímku R^{im} plochy ψ_4, jíž tento bod náleží, s nullovým bodem roviny ze soustavy $\Sigma\omega^n$, která tento bod obsahujíc přímkou $R^{i,m}$ neprochází.

Ustanovme, které roviny v tomto nullovém systemu příslušejí k bodům d^i a d^m přímky $R^{i,m}$.

Třetí rovina ω procházející na př. bodem d^m stanoví se takto: Bodem d^m procházejí tři paprsky komplexu mající pro plochu φ^e poly své v rovině ω: paprsky $R^{i,m}$, $R^{m,m}$ a paprsek mající za pol průsečík tečen z bodů $r^{i,m}$ a $t^{m,m}$ k parabole R_2 sestrojených. Poněvadž bod $t^{m,m}$ jest na této parabole, jest onen průsečík nekonečně blízký k bodu r^{im}, a sice leží na druhé tečně R^i z bodu r^{im} k parabole R_2 vedené. Z toho vychází, že stopou třetí roviny ω procházející bodem d^m na rovině ω jest tečna ${}^1R^m$ paraboly R_2 soumezná k tečně R^m, a že tedy tato třetí rovina jest nekonečně blízka k rovině ω^m. V nullovém systemu bude této třetí rovině přidružen bod křivky C_3 soumezný k bodu e^m a tedy bodu d^m rovina tečná této křivky v bodě c^m obsahující přímku $R^{i,m}$. Máme tedy výsledek:

K bodům d^i a d^m křivky C_6 na kterékoli přímce $R^{i,m}$ plochy ψ_4 přidruženy jsou v nullovém systemu tečné roviny dvojné křivky C_3 v bodech e^i, resp. e^m procházející přímkou $R^{i,m}$.

Stanou-li se obě roviny ω procházející přímkou $R^{i,m}$ nekonečně blízkými, jako u přímek F, stanou se následkem vytčené přidruženosti v nullovém systemu i body c^i a e^m nekonečně blízkými, a křivka C_3 dotýká se v nich přímky F.

Tečné roviny křivky C_3 procházející některou z přímek F stanou se nekonečně blízkými rovinami oskulačními této křivky, a body d^i a d^m k nim přidružené budou tedy na křivce vratu plochy φ_4, t. j.:

Křivka C_6 dotýká se přímek F v bodech křivky vratu plochy φ_4 (15).

---

*) Jiný důkaz této přidruženosti obsažen jest ve spise »Geom. der Lage« von Dr. Th. Reye, II. Abth., 15. Vortrag.

Pro přímky torsálné B bod e_b splyne s bodem $[d_b]$, tedy příslušná torsální rovina ω_b, jakožto nullová rovina bodu e_b, jest zároveň nullovou rovinou bodu $[d_b]$ a tím rovinou tečnou křivky C_3 v bodě $[e_b]$.

Poněvadž bod d_b nesplývá s bodem e_b, jest nullová rovina bodu d_b čili tečná rovina křivky C_3 v bodě e_b různá od torsálné roviny ω_b, t. j. křivka C_3 protíná plochu φ_4 v bodě e_b.

28. Z přidruženosti rovin ω^m a bodů e^m v nullovém systemu poznáme, že křivka C_3 dotýká se jen čtyř přímek F plochy ψ_4. Aby se totiž křivka tato dotýkala přímky $R^{i,m}$, musily by býti body e^i a e^m, tedy i roviny ω^i a ω^m a přímky R^i a R^m nekonečně blízké, a to může nastati jen, je-li bod r^{im} na parabole R_2, tedy totožný s některým z bodů f.

Z toho dále vyplývá, že křivka vratu plochy φ_4 nemůže míti kromě bodů, v nichž dotýká se přímek F, s plochou ψ_4 jiných bodů společných.

Abychom to dokázali, předpokládejme, že x jest společným bodem křivky vratu a plochy ψ_4; přímka $R^{i,m}$ této plochy nechť jím prochází. Bodu x bude v nullovém systemu přidružena rovina křivosti křivky C_3 procházející přímkou $R^{i,m}$. Na přímce $R^{i,m}$ jsou však dva body křivky C_3, a aby vytčená rovina byla rovinou křivosti této křivky, musí nutně oba tyto body býti nekonečně blízké, t. j. přímka $R^{i,m}$ tečnou křivky C_3 a tedy dle svrchu dokázaného totožná s některou z přímek F.

Křivka vratu plochy φ_4 oskuluje tedy plochu ψ_4 v bodech, ve kterých se dotýká čtyř přímek F.

29. Přidruženosť rovin ω^n a bodů e^n v nullovém systemu vyplývá i z této úvahy:

Křivkou K_2 lze si mysliti vždy plochu 2. řádu μ_2 obepsanou základnímu čtyrstěnu Δ. Paprsky komplexu, které mají na této ploše své poly vzhledem ku ploše φ_2, tvoří kvadratický system, v němž naše plocha ψ_4 jest obsažena. V kvadratickém systemu jest však rovina každých dvou paprsků přidružena k bodu jim společnému v nullovém systemu.

Plocha μ_2 má s plochou φ_2 kromě křivky K_2 ještě společnou křivku 2. řádu, k níž náleží normalie čtvrtého stupně, která jest v témž systemu kvadratickém jako normalie ψ_4 a tedy samodružnou v témž nullovém systemu jako tato plocha.

30. S plochami φ_4 a ψ_4 jest v úzké souvislosti plocha χ_4, tvořená paprsky komplexu, jež mají poly své na hyperbole H_2 (9). Dokážeme především, že tyto paprsky protínají přímku V. Všecky paprsky komplexu, které protínají přímku V, mají poly pro plochu φ_2 na komplexové ploše kuželové, jejímž středem jest pol v přímky V, t. na ploše $\varkappa_2$. A poněvadž hyperbola H_2 jest pronikem této plochy s rovinou ω, musí všecky přímky plochy χ_4 protínati přímku V.

Tato plocha jest tvořena spojnicemi sdružených bodů projektivných spolu řad hyperbol. Paprsky mající na H_2 své poly obdržíme totiž jakožto kolmice spuštěné z bodů této křivky na jejich roviny polárné pro plochu φ_2. Tyto

roviny obalují však plochu kuželovou π_2 o středu v a řídicí parabole R_2, kteráž plocha jest pro plochu χ_4 tím, čím plocha τ_2 pro ψ_4 nebo $\varkappa_2$ pro φ_4. Polárným útvarem plochy π_2 vzhledem ku ploše $\varphi_2{}^n$ bude křivka druhého řádu $H_2{}^n$, která sdružena jest s křivkou H_2 v affinných soustavách rovinných ω a ω^n. Jest to tedy též hyperbola. Přímky spojující body sdružené hyperbol H_2 a $H_2{}^n$ jsou přímkami plochy χ_4.

31. Přihlédněme k jednomu polárnému $\triangle xyz$ křivky K_2 obepsanému parabole R_2, tedy vepsanému křivce H_2. Každé dva ze tří paprsků komplexu mající poly své ve vrcholech tohoto trojúhelníku musí se protínati, poněvadž přímky xy, yz a zx jsou paprsky komplexu. Z toho jde, že tyto tři paprsky, neležíce v rovině, musí procházeti bodem, který dle svrchu řečeného náleží přímce V. Tato jest tedy pro plochu χ_4 přímkou trojnásobnou.

Poněvadž čtyři body $r^{i\,m}$, $r^{k\,m}$, x a y na přímce R^m jsou harmonické, jsou i čtyři tečny $R^{i,m}$, $R^{k,m}$, R^x a R^y paraboly $R_2{}^m$ těmito body procházející harmonické a tím i body, které jsou jimi stanoveny na další tečně $R^{m,m}$ téže paraboly. Z toho jde:

Každá přímka $R^{m,m}$ plochy φ_4 dotýká se dvojnásobně plochy ψ_4 i χ_4 a čtyři body dotyčné tvoří harmonickou čtveřinu.

32. Uvážíme-li, že hyperbola H_2 prochází osmi body dotyčnými společných tečen křivek K_2 a R_2, jest zřejmo:

Čtyři torsálné přímky plochy ψ_4 a čtyři přímky plochy φ_4, v nichž torsálné roviny této plochy se dotýkají, jsou na ploše čtvrtého řádu s trojnásobnou přímkou, t. j. na ploše χ_4.

V této větě obsažena jest též věta vyslovená na konci odst. 25., která byla zvláštním případem obecnější vlastnosti, že totiž poly přímek $R^{n,n}$ plochy φ_4 vzhledem ku příslušným kuželosečkám $\varkappa_2{}^n$ plochy ψ_4 jsou na přímce V. (25)

Dokažme tuto vlastnosť ještě jiným způsobem.

Přihlédněme k $\triangle xyz$ (31); strana $xy \equiv R^m$ protínejž K_2 v bodech $r^{i,m}$ a $r^{k,m}$, k nimž přísluší přímky $R^{i,m}$ a $R^{k,m}$ plochy ψ_4. Tyto přímky proťaty jsou přímkou $R^{m,m}$ v bodech d^m a $d_1{}^m$ křivky C_6. Poněvadž v příbuznosti rovinných soustav ω a ω^m přímka $R^{m,m}$ roviny ω^m přidružena jest ke přímce R^m roviny ω a tudíž body d^m a $d_1{}^m$ k bodům $r^{i\,m}$ a $r^{k\,m}$, bude polu přímky $R^{m,m}$ vzhledem ku $K_2{}^m$ přidružen pol přímky R^m vzhledem ke K_2, t. j. bod z. Z toho ale vychází na jevo, že pol přímky $R^{m,m}$ vzhledem ke $K_2{}^m$ bude v bodě, v němž přímka R^z protíná rovinu ω^m, t. j. na přímce V.

33. Výsledky odstavců 31. a 32. vedou k výsledkům novým. Dle odst. 32. jsou čtyři body d_b torsálných přímek B na přímce V. V nullovém systemu odst. 27. odpovídají těmto bodům roviny tečné křivky C_3 v bodech c_b obsahující příslušnou torsálnou přímku. Poněvadž čtyři body d_b jsou na přímce V, musí tyto čtyři roviny tečné procházeti přímkou-družkou přímky V v systemu nullovém. Z toho jest patrno:

Čtyři torsálné přímky a tečny dvojné křivky plochy ψ_4 v bodech kuspidálných této plochy mají společnou transversálu.

Věta tato vychází na jevo i z toho, že přímkám $R^{m,m}$ odpovídají v nullovém systemu tečny křivky C_3 v bodech e^m. Čtyři přímky C plochy φ_4 procházející body $d^{(b)}$ budou míti za své družky v nullovém systemu tečny křivky C_3 v kuspidálných bodech e_b, a ježto čtyři body d^b jsou na přímce V a přímky torsálné B jsou v tomto systemu samodružné, musí ony čtyři tečny a přímky B míti za společnou transversálu družku přímky V. — Podotýkáme, že čtyři tečny křivky C_3 v bodech e_b mají ještě jednu transversálu, totiž družku druhé transversály čtyř přímek C.

34. Prozkoumejme, který útvar odpovídá v nullovém systemu odst. 27. ploše χ_4.

Trojiny přímek této plochy, které procházejí vždy jedním bodem l přímky V, jsou průsečnicemi tří rovin ω procházejících stranami polárného $\triangle xyz$ křivky K_2 vepsaného křivce H_2. Těmto rovinám přidruženy jsou v nullovém systemu tři body $e^{(m)}$, jejichž rovina ϱ prochází bodem l. Poněvadž všecky body l jsou na přímce V, budou všecky roviny ϱ procházeti družkou přímky V, a přímkám plochy χ_4 budou příslušeti přímky roviny ϱ, které po dvou spojují tři body e^m v této rovině ležící. Plocha čtvrtého stupně odpovídající ploše X_4 v nullovém systemu bude tedy toho zvláštního druhu, že každá rovina procházející družkou přímky V bude její trojnásobnou rovinou tečnou a křivka C_3 bude její křivkou dvojnou, t. j. plocha tato bude tvořena tetivami křivky C_3 protínajícími družku přímky V.

35. Poukážeme k výsledku, který se zde mimochodem naskytá. Bod v tvoří s vrcholy $\triangle xyz$ (31) orthocentrický polárný čtyřstěn plochy φ_2, neboť jeho výšky, t. j. R^x, R^y, R^z a V, protínají se v bodě l. Takových orthocentrických čtyřstěnů plochy φ_2, majících za jeden vrchol bod v, jest, jak z našeho vyšetřování vysvitá, množství nekonečné, neboť jest ∞^1 trojúhelníků polárných křivky K_2 vepsaných hyperbole H_2. Na základě výsledků v odst. 31. nabytých lze ihned vysloviti větu:

Každý bod v prostoru jest vrcholem ∞^1 orthocentrických polárných čtyřstěnů plochy φ_2 druhého řádu. Hrany těchto čtyřstěnů a společná jich výška tímto bodem procházející jsou na ploše kuželové 2. řádu procházející středem plochy φ_2 a nekonečně vzdálenými body jejích hlavních os; ostatní výšky těchto čtyřstěnů tvoří plochu čtvrtého stupně, pro niž jest ona společná výška přímkou trojnásobnou.

Snadno lze dokázati, že tři reciproké roviny polárné ω^{xy}, ω^{yz} a ω^{zx}, stran $\triangle xyz$ tvoří s rovinou ω orthocentrický polárný čtyřstěn jisté plochy z řady $\Sigma\varphi_2{}^n$.

Bod l přímky V, jímž procházejí první tři roviny, jest totiž polem roviny ω pro určitou plochu $\varphi_2{}^k$ z řady $\Sigma\varphi_2{}^n$. Pol roviny ω^{xy} pro touž plochu musí býti *a*) v rovině ω a *b*) na přímce vz, která jest polárou přímky xy vzhledem ke ploše φ_2 a jest kolmá k rovině ω^{xy}; tímto polem jest tedy bod z. Podobně poznáme, že bod y jest polem roviny ω^{xz} a bod x polem roviny ω^{yz} pro touž plochu $\varphi_2{}^k$, čímž jest tvrzení dokázáno.

36. V každé rovině ω^m jsou tři body křivky C_3, t. j. e^m, e^i a e^k; body e^i a e^m náležejí přímce $R^{i,m}$, body e^k a e^m přímce $R^{k,m}$. Jest otázka, jakou plochu tvoří přímky určené body e^i a e^k, které nejsou přidruženy rovině ω^m v systemu nullovém?

Přímky tyto přidruženy jsou v nullovém systemu průsečnicím rovin ω^i a ω^k, tedy paprskům komplexu, které mají poly své v bodech R^i R^k. Body tyto v obecném případě nejsou na křivce K_2.*)

Kromě tří paprsků $R^{i\,m}$, $R^{k\,m}$ a paprsku, který má v bodě R^i R^k svůj pol, neprocházejí bodem e^m paprsky jiné, které by měly poly své pro plochu φ_2 v rovině ω.

Upozorňujeme hned, že paprsky $R^{i\,m}$ a $R^{k\,m}$ mají s křivkou C_3 po dvou společných bodech, kdežto přímka ω^i a ω^k má s ní jediný společný bod, totiž e^m. Toto tvrzení vyplývá z toho, že na př. v rovině ω^k jest kromě bodů e^m a e^k ještě jeden bod křivky C_3 ležící na přímce $R^{k,n}$ plochy ψ_4. Kdyby ještě přímka ω^k ω^i měla kromě bodu e^m nějaký společný bod s křivkou C_3, byly by v rovině ω^k čtyři body křivky C_3, což jest nemožné.

Všecky paprsky komplexu protínající křivku C_3 jsou na ploše 6. stupně. Myslíme-li si totiž libovolný paprsek M osového komplexu, jsou všecky paprsky komplexu, které mají pro plochu φ_2 na něm své poly, v reciproké rovině polárné μ paprsku M obalujíce v ní parabolu M_2. Rovina μ má s křivkou C_3 tři společné body a z každého z nich jsou možny dvě tečny k parabole M_2; tyto tečny jsou jedinými paprsky komplexu, které mají poly na M a protínají C_3. Z toho jde, že přímka M má s plochou polů všech paprsků komplexu protínajících křivku C_3 šest společných bodů, že tedy tato plocha jest 6. stupně (φ_6). Mezi paprsky, které protínají křivku C_3, jsou také paprsky, které ji protínají dvakráte; k nim náležejí přímky plochy ψ_4. Jest patrno, že křivka, na níž jsou poly paprsků křivku C_3 dvakráte protínajících, jest pro vytčenou plochu φ_6 křivkou dvojnásobnou; křivka K_2 náleží tedy k této dvojnásobné křivce.**) Následkem toho rovina ω bude plochu φ_6 protínati kromě dvakráte počítané křivky K_2 ještě v jisté křivce 2. stupně C_2, a paprsky, které mají na této křivce své poly, budou protínati křivku C_3 pouze jedenkráte. Křivka C_2 jest tedy místem bodů R^i R^k. Plocha tvořená přímkami ω^i ω^k jest následkem toho stupně 4. a má každou z rovin $\Sigma\omega^n$ za rovinu bitangenciálnou, plocha pak, která obsahuje přímky, z nichž každá spojuje dva body křivky dvojné C_3, které jsouce v rovině ω^x k této rovině přidruženy nejsou, taktéž stupně 4. a má křivku C_3 za dvojnásobnou. Tato plocha nemá roviny $\Sigma\omega^n$ za bitangenciálné; její roviny bitangenciálné budou sdruženy v nullovém systemu s body dvojné křivky plochy tvořené přímkami ω^k ω^i a tato křivka jest od C_3 různá.

---

*) O zvláštním případě, v kterém body R^i R^k náležejí křivce K_2, bude pojednáno v oddíle »O normalii s trojnásobnou přímkou«.

**) Jest pouze její částí, neboť každým bodem křivky C_3 procházejí čtyři paprsky komplexu, které jsou jejími tetivami a pouze dvě z nich náležejí ploše ψ_4.

Zároveň poznáváme z tohoto vyšetřování větu:

Sestrojíme-li z bodů, v nichž každá tečna paraboly R_2 kuželosečku K_2 protíná, druhé tečny k parabole R_2, jsou proniky těchto druhých tečen na křivce 2. st. (C_2).

Tato kuželosečka prochází *a*) čtyřmi body k, v nichž tečny paraboly R_2 v bodech f $(R_2\ K_2)$ křivku K_2 po druhé pronikají, a *b*) čtyřmi body dotyčnými druhých tečen paraboly R_2, které procházejí body b, v nichž křivky K_2 dotýkají se její společné tečny s křivkou R_2.

Věty, která této větě duálně odpovídá, bylo použito v odst. 27.

37. Zbývá ještě odpověděti k otázce, má-li plocha tvořená paprsky komplexu, které mají poly na křivce C_2, dvojnásobnou křivku třetího řádu nebo trojnásobnou přímku.

Poznáme, že nastane případ první, neboť případ druhý mohl by nastati jen tehdá, když by křivka C_2 byla obepsána některému a tedy nekonečnému množství trojúhelníků obepsaných parabole R_2, a této vlastnosti, jak hned ukážeme, křivka C_2 nemá.

K tomu cíli přihlédněme k tečně R_f paraboly R_2 v některém z bodů f; ta protne křivku K_2 v bodě k náležejícím křivce C_2. Druhá tečna, sestrojená z bodu k k parabole R_2, budiž označena R_k a protínejž K_2 v bodě r, z něhož jest možna ještě tečna R_r k parabole R_2. Bod $R_r\ R_f \equiv v$ náleží potom křivce C_2.

Dva vrcholy trojúhelníku $k\ r\ u$, obepsaného parabole R_2, totiž k a u, jsou na křivce C_2, kdežto třetí vrchol r, náležející křivce K_2, a různý od každého ze čtyř bodů k, jest obecně mimo ni. Z toho následuje, že plocha tvořená přímkami $\omega^i\ \omega^k$ má dvojnásobnou křivku 3. řádu, a tudíž roviny bitangenciálné plochy k ní v nullovém systemu přidružené tvoří svazek třídy třetí.

Kdyby ve zvláštním případě bod r náležel křivce C_2, měla by s křivkou K_2 pět společných bodů — byla by s ní totožná. Křivka K_2 byla by potom obepsána nekonečnému množství trojúhelníků obepsaných parabole R_2. O tomto zvláštním případě pojednáme později.

38. V odst. 33. byl vyšetřen význam transversál přímek torsálných B. Jest přirozena otázka, mají-li i transversály čtyř přímek F nějaký význam pro plochu ψ_4.

Především dlužno přihlédnouti k tomu, nejsou-li tyto přímky na ploše 2. stupně.

Kdyby tomu tak bylo, náležela by této ploše i křivka vratu plochy φ_4 i dvojnásobná křivka C_3 plochy ψ_4, neboť obě tyto křivky dotýkají se přímek F. Křivky tyto, jsouce dvojnými křivkami ploch φ_4 a ψ_4, musily by při proniku oné plochy druhého řádu s těmito plochami počítány býti dvojnásobně, z čehož by nutně následovalo, že vytčená plocha 2. stupně byla by částí jak plochy φ_4, tak ψ_4, což jest nemožné.

Přímky F budou tedy míti dvě určité transversály Q a Q'. Uvážíme-li, že přímky F jsou samodružnými v obou nullových systemech, o nichž se stala zmínka v odst. 26. a 27., jest patrno, že transversály Q a Q' jsou

řídícími přímkami lineárného systemu společného oběma systemům nullovým. Každý paprsek tohoto systemu musí tedy obě tyto přímky protínati. Přihlédneme-li nyní ku kterékoli rovině ω^k ze snovu $\Sigma\omega^n$, jest s ní sdružen v prvním nullovém systemu bod t^k křivky vratu plochy φ_4 a ve druhém bod c^k křivky C_3, následkem čehož jest přímka $c^k\ t^k$ paprskem vytčeného lineárného systemu. Platí tedy věta:

Přímky $c^k\ t^k$, z nichž každá určena jest bodem křivky vratu plochy φ_4, v němž rovina ω^k tuto křivku oskuluje, a bodem e^k dvojné křivky plochy ψ_4, společným jejím přímkám v této rovině se nalézajícím, protínají dvě transversály čtyř přímek F.

Přímky $c^k\ t^k$ tvoří jistou plochu mimosměrek, o níž lze dle věty právě vyslovené říci, že určena jest přímkami Q a Q' a křivkou vratu. Abychom určili její stupeň, jest nutno rozhodnouti, mají-li přímky Q, Q' s křivkou vratu společné body.

K tomu cíli uvažme, že každý bod x na jedné z přímek Q a Q', na př. na Q, má pro oba nullové systemy za rovinu nullovou rovinu $Q'x$. Kdyby přímka Q protínala křivku vratu v bodě x, musila by nullová rovina $Q'x$ tohoto bodu v prvním systemu býti oskulační rovinou křivky vratu v bodě x a tím pro druhý system nullovou rovinou bodu křivky C_3, t. j. bod x musil by býti společným bodem křivky vratu a křivky C_3. Poněvadž ale tyto dvě křivky společných bodů nemají (odst. 28.), nemohou přímky Q a Q' protínati křivku vratu (ani křivku C_3), a plocha obsahující přímky $c^k\ t^k$ jest následkem toho stupně šestého.

O rovinách tečných a oskulačním hyperboloidu normalie.

39. Na kterékoli přímce R^{ik} plochy ψ_4 budiž vytčen bod m^x. Jde o rovinu tečnou plochy ψ_4 v tomto bodě. K určení této roviny zvolíme kromě přímky R^{ik} tečnu $T_m{}^x$ kuželosečky $K_2{}^x$, která bodem m^x prochází. Půjde především o rovinu ω^x této kuželosečky.

K tomu cíli uvažme, že řada bodů, již roviny $\Sigma\omega^n$ stanoví na každém z paprsků $R^{i,k}$, jest projektivná se svazkem jejich stop na každé rovině ω, tedy také se svazkem tečen paraboly R_2. Při této projektivnosti přidružena jest bodu $r^{i,k}$ (polu přímky $R^{i,k}$) přímka R roviny ω a nekonečně vzdálenému bodu přímky $R^{i,k}$ nekonečně vzdálená přímka roviny ω, každému pak z ostatních bodů $\alpha^k\ R^{ik}$ přímka $\alpha^k\omega$.

Tím jest vytčená projektivnosť jednoduše stanovena, a k bodu m^x lze stanoviti nejprve sdruženou k němu tečnu R^x paraboly R_2 a tím i rovinu $\omega^x = m^x R^x$. Kuželosečka $K_2{}^x$ přidružena jest potom v affinitě rovinných soustav ω a ω^x kuželosečce K_2 a její tečna v bodě m^x tečně křivky K_2 v bodě r^{ik}.

Pro konstruktivné provedení podotýkáme ještě, že svazek rovin tečných plochy ψ_4, procházejících přímkou $R^{i,k}$, jest s řadou bodů dotyčných, a tím i se svazkem tečen paraboly R_2 projektivný, při čemž přidruženosť jednotlivých prvků tím, co bylo svrchu řečeno, jest určena.

Jinak lze určiti rovinu tečnou v bodě m^x takto:

Všecky tečny ΣT^n sestrojené ke křivkám ΣK_2^n v bodech plošné přímky $R^{i,k}$ tvoří hyperbolický paraboloid, jehož přímky druhé soustavy jsou paprsky komplexu mající pro plochu φ_2 své poly na tečně T křivky K_2 v bodě $r^{i,k}$. Poněvadž roviny polárné všech bodů této tečny vzhledem ku ploše φ_2 musí obsahovati poláru této přímky, t. j. přímku $r^{i,k}v$ plochy τ_2, jest jedna z rovin řídících onoho hyperbolického paraboloidu kolmá ke přímce $r^{i,k}v$. (Zároveň jest z toho zřejmo, že asymptotická rovina plochy ψ_4, procházející přímkou $R^{i,k}$, jest kolma k přímce $r^{i,k}v$.)

Nekonečně vzdálenému bodu v přímky T přísluší rovina polárná $a^{IV}r^{ik}v$, a kolmice z bodu v na tuto rovinu spuštěná jest nekonečně vzdálenou přímkou druhé soustavy hyperb. paraboloidu a určuje druhou rovinu řídící této plochy. Tato rovina jest na rovině $a^{IV}r^{ik}v$ kolmá a s přímkou T stejnosměrná. Určíme-li ještě paprsek komplexu mající pol v některém bodu přímky T, na př. k některému průsečíku s rovinami α^k, jest tím hyperbolický paraboloid určen.

Konečně budiž vytčeno, že lze určiti snadno průseky plochy ψ_4 s rovinami α^k jakožto polárné útvary plochy kuželové τ_2 k fokálným kuželosečkám $F_2^{(k)}$ plochy φ_2.

40. Přikročme k určení hyperboloidu oskulačního plochy ψ_4 dle přímky $R^{i,k}$. V bodě m^x této přímky budiž λ^x rovinou tečnou plochy ψ_4 a X její stopní přímka na rovině ω; tato stopa prochází bodem $r^{i,k}$.

Přímka L^x oskulačního hyperboloidu, která prochází bodem m^x, musí protínati kromě přímky $R^{i,k}$ ještě dvě s ní soumezné přímky plochy ψ_4, čili, poněvadž tyto přímky jsou paprsky komplexu osového, dva s paprskem $R^{i,k}$ soumezné paprsky, mající své poly na křivce K_2.

Všecky paprsky komplexu protínající přímku L^x mají však poly své na ploše 2. řádu λ_2^x obepsané čtyřstěnu A, z čehož jde, že kuželosečka L_2^x, společná ploše λ_2^x a rovině ω, musí křivku K_2 v bodě $r^{i,k}$ oskulovati.

Kuželosečku L_2^x hleďme ustanoviti.

Mysleme si v rovině λ^x svazek přímek ${}^1L^x$, ${}^2L^x$, ${}^3L^x$... o středu m^x; k těmto přímkám, z nichž každá jest tečnou plochy ψ_4 v bodě m^x, náleží i přímka L^x. Ke každé z těchto přímek náleží plocha ${}^n\lambda_2^x$ a kuželosečka ${}^nL_2^x$ podobně, jako plocha λ_2^x a kuželosečka L_2^x k přímce L^x.

Dokážeme, že kuželosečky ${}^nL_2^x$ tvoří svazek (1. mocnosti).

Poněvadž totiž *a*) všecky přímky ${}^nL^x$ jsou v rovině λ^x, budou paprsky komplexu v této rovině ležící všecky přímky ${}^nL^x$ protínati a tudíž přímka P, obsahující poly všech těchto paprsků, bude společnou přímkou všech ploch ${}^n\lambda_2^x$ a tudíž bod $P\omega$ společným bodem všech křivek ${}^nL_2^x$. Že však bod r^{ik} jest polem přímky $R^{i,k}$ v rovině λ^x obsažené, jest bod $P\omega \equiv r^{i,k}$.

Poněvadž *b*) všecky přímky ${}^nL^x$ procházejí bodem m^x, bude křivka třetího řádu, obsahující poly všech paprsků komplexu bodem m^x procházejících (tvořících plochu kuželovou komplexu), společna všem plochám ${}^n\lambda_2^x$, a křivky ${}^nL_2^x$ budou procházeti třemi body, v nichž ona křivka 3. řádu rovinu ω proniká.

Jedním z těchto proniků jest zase bod $r^{i,k}$, z čehož jde, že kuželosečky ${}^{n}L_2{}^{x}$ budou se v tomto bodě dotýkati křivky K_2.*)

Zbývající dva proniky jsou s bodem r^{ik} poly jediných tří paprsků procházejících bodem m^x a majících poly v rovině ω. Stanoví se takto:

Bodem m^x procházejí tři roviny ω, t. j. ω^i, ω^k a ω^x (39); jejich stopy R^i, R^k a R^x tvoří trojúhelník tečen paraboly R_2, jehož vrcholy $r^{i,k}$, $r^{i,x}$ a $r^{k,x}$ jsou body hledané.

Svazek křivek ${}^{n}L_2{}^{x}$ určen jest body $r^{i,k}$, r^{ix}, r^{kx} a bodem ${}^{1}r^{i,k}$, soumezným k bodu r^{ik} na křivce K_2. Kuželosečka tohoto svazku, která křivku K_2 v bodě r^{ik} oskuluje, jest žádaná kuželosečka $L_2{}^{x}$, a bod x, v němž přímka X ji podruhé proniká, určuje s bodem m^x přímku L^x oskulačního hyperboloidu. Tuto konstrukci jest nutno ve případě obecném provésti pro tři body přímky R^{ik}.

Známé sestrojení obrazu křivky $L_2{}^{x}$ zde pomíjíme.

Místo libovolného bodu m^x přímky $R^{i,k}$ dobře jest voliti oba body e^i a e^k křivky dvojné a některý z bodů $R^{i,k}\alpha^k$.

Pro každý z bodů dvojných, na př. pro e^i, známe dvě osy jím procházející a mající pol v rovině ω; jsou to přímky $R^{i,k}$ a $R^{i,m}$ plochy ψ_4.

Abychom dostali pol třetího paprsku, vésti jest z bodů r^{ik} a r^{im} křivky K_2 druhé tečny R^k a R^m k parabole R_2; bod r^{km} jim společný jest tímto třetím vrcholem. Kuželosečka $L_2{}^{x}$ v tomto případě křivku K_2 v bodě r^{ik} jako prve oskuluje a v bodě r^{im} ji protíná, procházejíc mimo to bodem r^{km}. Z toho jde, že jest s křivkou K_2 v centrálné kollineaci pro osu $r^{ik}r^{im}$ a pro střed r^{ik}, na základě čehož se snadno určí její druhý průsečík x s přímkou X.

Pro body $R^{ik}\alpha^k$ stanoven jest vytčený trojúhelník přímkami R^i, R^k a přímkou $\omega\alpha^k$, kterážto poslední přímka jest pro $k \equiv IV$ nekonečně vzdálenou přímkou roviny ω.**)

V těch případech zvláštních, ve kterých plocha ψ_4 má dvoj- nebo trojnásobnou přímku, musí tato přímka náležeti jejímu oskulačnímu hyperboloidu dle kterékoli plošné přímky.***)

Podotýkáme, že, jak mile dvě z přímek L^x oskulačního hyperboloidu jsou sestrojeny, jeho stopní křivka na rovině ω jest určena. Oskuluje křivku K_2 v bodu r^{ik} a prochází stopními body přímek L^x na této rovině.

O možných případech zvláštních.

41. Dokážeme, že parabola R_2 a křivka K_2 mohou míti tyto zvláštní polohy vzájemné:

---

*) Vytčená křivka třetího řádu a přímka P mají dva společné body, z nichž jeden jest $r^{i,k}$. V těchto dvou bodech plochy ${}^{n}\lambda_2{}^{x}$ vzájemně se dotýkají.

**) Určovací částky oskulačního hyperboloidu lze též sestrojiti způsobem udaným prof. Dr. Ed. Weyrem v rozpravě »Strojení oskulačních kuželoseček k čarám vytvořeným křivými projektivnými řadami a svazky«. (Rozpravy České Akademie, tř. II., č. 5., 1891.)

***) Pro plochu ψ_4 s dvěma řídicími přímkami obsaženo jest řešení této úlohy v práci prof. J. Šolína »Über die Normalenfläche zum dreiaxigen Ellipsoide längs einer Ellipse eines Hauptsystems« (Abh. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Serie, 2. B., 1868.)

a) Přímka určená body e^q a $e^{q'}$ křivky dvojné C_3, které jsou na křivce K_2 (9, 18), jest paprskem komplexu čili tečnou paraboly R_2;

b) body e^q a $e^{q'}$ splynou.

Ve případě *a*) byl by čtyřúhelník $d^q\ d^{q'}\ e^{q'}\ e^q$, který jest křivce K_2 vepsán, obepsán křivce R_2. Z toho následovalo by, že této křivce bylo by lze obepsati ∞^1 čtyřúhelníků vepsaných křivce K_2; na každé tečně R^m paraboly R_2 byla by strana jednoho takového čtyřúhelníku. Přihlédněme zvláště k některé ze společných tečen křivek K_2 a R_2, na př. k tečně bc (9). Ta má s křivkou K_2 společné dva soumezné body b, b_1, jimiž procházejí další dvě soumezné tečny paraboly R_2, protínající křivku K_2 v dalších dvou soumezných bodech $[b]$, $^1[b]$. Přímka těmito body určená, t. j. tečna křivky K_2 v bodě $[b]$, musila by býti v tomto zvláštním případě tečnou paraboly R_2. To jest však, pokud svazek tečen paraboly R_2 nerozdělí se ve dva svazky 1. řádu, nemožné, poněvadž tečna křivky K_2 v bodě $[b]$ protíná společnou tečnu bc obou křivek v polu přímky $b[b]$ vzhledem ke křivce K_2, t. j. v bodě c paraboly R_2 (9). V tomto bodě protíná tedy ona tečna, jsouc od tečny bc různá, i parabolu R_2.

V tom případě zvláštním, v kterém tečna $[b]c$ křivky K_2 byla by zároveň tečnou paraboly R_2, musil by se svazek tečen této paraboly rozděliti ve dva svazky 1. řádu, z nichž jeden by měl svůj střed v bodě c, druhý pak v některém bodě x přímky $[b]c$. Poněvadž ale obě osy křivky K_2 a nekonečně vzdálená přímka její roviny jsou tečnami křivky R_2, mohou nastati tyto případy:

α) Bod c jest na některé ose křivky K_2 ve vzdálenosti konečné; potom musí býti bod x nekonečně vzdáleným bodem druhé osy.

β) Bod c jest na přímce nekonečně vzdálené, aniž splývá s nekonečně vzdáleným bodem některé osy; potom musí býti x středem křivky K_2.

γ) Bod c jest nekonečně vzdáleným bodem jedné, bod x druhé osy.

δ) » c » » » » » osy a bod x středem křivky K_2.

K témuž výsledku dospějeme, přihlédneme-li k významu paraboly R_2. Dle odst. 9. jest obalovou přímek kolmo sdružených k rovinám svazku V pro plochu φ_2. Dle tohoto významu musily by v případě *a*) normály křivky K_2 v bodech b a $[b]$ a kolmice z bodu c na přímku $b\,[b]$ spuštěná procházeti jediným bodem s. To jest však možné jen ve dvou případech: je-li $\triangle\ b[b]c$ rovnoramenný, nebo je-li bod c nekonečně vzdálený.

Aby povstal případ první, musí býti bod c na některé ose křivky K_2, a aby nastal případ druhý, musí býti bod c na nekonečně vzdálené přímce roviny ω. V obou případech zvrhne se svazek tečen paraboly R_2, jak bylo svrchu udáno.

42. Prozkoumejme, jakou polohu musí míti rovina ω, aby nastal některý z případů *α*) až *δ*).

Poly rovin svazku V pro plochu φ_2 jsou na přímce R roviny ω. Svazek tečen paraboly R_2 může býti pokládán za výtvar řady bodové R a s ní

projektivné řady na nekonečně vzdálené přímce U_∞ roviny ω, při čemž bod sdružený s libovolným bodem r řady R určen jest normálou polárné roviny ϱ bodu r vzhledem ke ploše φ_2.

Předpokládejme nejprve, že přímka R není nekonečně vzdálena. Aby svazek tečen paraboly R_2 zvrhl se ve dva svazky 1. řádu, musí býti vytčené řady na R a U_∞ prvoprojektivné anebo musí nastati ten zvláštní případ projektivnosti, ve kterém se všemi body jedné řady sdružen jest týž bod řady druhé.

První případ vyžaduje, aby rovina polárná nekonečně vzdáleného bodu přímky R byla ke přímce R kolmá, t. j. aby přímka R a tudíž i rovina ω procházela některým z bodů a', a'', a''', čili aby rovina ω byla kolma na některou z rovin hlavních (rovin orthog. souměrnosti) α', α'' a α''' plochy φ_2.

Parabola R_2 zvrhne se v tomto případě skutečně tak, jak udáno jest v případě α.

Aby nastal případ druhý, musí míti všecky roviny ϱ společnou normálu, t. j. přímka V musí býti nekonečně vzdálena, tedy přímka R a následkem toho i rovina ω musí procházeti středem a^{IV} plochy φ_2. Se všemi body přímky R sdružen jest potom týž nekonečně vzdálený bod přímky U_∞ a naopak ke všem bodům přímky U_∞ přísluší týž bod přímky R, totiž střed a^{IV}. Svazek tečen paraboly R_2 zvrhne se tak, jak udáno jest v případě *b*).

Jest-li tu zvláště přímka V nekonečně vzdálenou přímkou některé z rovin α', α'' nebo α''', jest přímka R totožná s některou hlavní osou plochy φ_2 a rovina ω touto osou prochází. Se všemi body této osy sdružen jest bod U_∞ R a nastane případ *d*).

Předpokládejme nyní, že přímka R jest nekonečně vzdálena, tak že přímka V prochází středem. Při tom jest nutno rozeznávati, sjednotí-li nebo nesjednotí-li se s některou osou.

V případě prvním rovina ω jest k této ose kolma, čili prochází dvěma z bodů a', a'' nebo a''' a přímka R splyne s přímkou U_∞. Přímka kolmo sdružená s obecnou rovinou ϱ svazku V jest v tomto případě přímka U_∞, pouze s každou rovinou α^k obsahující přímku V sdruženy jsou kolmo všecky přímky roviny ω k rovině α^k kolmé. Svazek tečen paraboly R_2 rozdělí se tedy ve dvě osnovy mající středy své v nekonečně vzdálených bodech a^k, jimiž rovina ω prochází, z čehož vychází na jevo, že nastane případ *c*).

Ve zvláštním případě může tu rovina ω splynouti s některou z hlavních rovin α', α'' a α'''; potom každá přímka k této rovině kolmá může býti pokládána za přímku V a tudíž každá přímka roviny ω za přímku R. Parabola R_2 pozbývá tu významu. Plocha ψ_4 přejde v soustavu normál příslušné hlavní kuželosečky plochy φ_2.

Ve případě druhém musila by rovina ω splynouti s nekonečně vzdálenou rovinou α^{IV}; potom ale každá přímka procházející bodem a^{IV} může býti přímkou V a tedy každá přímka nekonečně vzdálená přímkou R. Plocha ψ_4 promění se v soustavu normál plochy φ_2 obsažených v nekonečně vzdálené rovině.

K tomuto případu, jakož vůbec k případům, v kterých rovina ω jest totožná s některou z rovin α^k, nebudeme dále přihlížeti.

Vyšetřováním právě vykonaným poznali jsme:

Aby nastal případ *a*), t. j. aby přímka $e^q\ e^{q'}$ byla paprskem komplexu, rovina ω musí procházeti jedním nebo dvěma z vrcholů čtyřstěnu Δ.

Naopak jest jasno, že pro každou rovinu této vlastnosti případ *a*) nastane. Neboť obsahuje-li rovina a bod a^k, jest přímka V v rovině α^k a přímka R prochází bodem a^k.

Je-li tu bod a^k středem plochy φ_2, jsou normály R^q a $R^{q'}$ této plochy obsažené v rovině ω stejnoměrné, any mají paty své na průměru R křivky K_2 a spojnice jejich druhých proniků e^q a $e^{q'}$ s křivkou K_2 prochází středem A^{IV}; jest tudíž paprskem komplexu.

Není-li bod a^k středem, jest přímka $\omega\,\alpha^k$ osou křivky K_2; přímka R procházejíc bodem a^k jest s druhou osou křivky K_2 stejnoměrna, a normály R^q a $R^{q'}$ pronikají křivku K_2 v bodech c^q a $e^{q'}$ souměrně položených ku přímce $\omega\,\alpha^k$, jejich spojnice jest tedy paprskem osového komplexu.

Jaký vliv má rozdělení se tečen paraboly R_2 ve dva svazky prvního řádu na plochu ψ_4, poznáme později.

43. Obraťme se k prozkoumání možnosti případu *b*) (odst. 41). Sjednotí-li se body c^q a $c^{q'}$, či je-li bod e společný normálám R^q a $R^{q'}$ na K_2, jest $\triangle\ d\,d_1\,e$ (9) obepsán parabole R_2 a vepsán křivce K_2; této křivce bude tedy lze vepsati nekonečné množství trojúhelníků parabole R_2 obepsaných.

Že tento případ skutečně jest možný, hned poznáme. Budiž s kterýkoli bod v prostoru. Tím bodem prochází nekonečné množství paprsků komplexu, tvořících komplexovou plochu kuželovou (2. řádu), a poly jejich jsou na jedné ze základních křivek komplexu. Tato křivka, jsouc 3. řádu, proniká φ_2 v šesti bodech 1, 2, ... 6, které jsou patami normál z bodu s ke ploše φ_2 sestrojených; kromě těchto šesti normál neprocházejí jiné bodem s.

Poněvadž každá tetiva každé základní křivky komplexu jest paprskem komplexu, platí to i o každé přímce $i\,k$, určené kterýmikoli dvěma z oněch šesti pat.

Přihlédněme k rovině ω, určené třemi z těchto pat, jež označíme obecně i, k a l. S plochou φ_2 má společnou křivku K_2, která jest obepsána $\triangle\ i\,k\,l$, a poněvadž strany jeho jsou paprsky komplexu, bude obepsán parabole R_2. Tím jest možnosť případu *b*) dokázána.

Naopak zase každá rovina, pro niž body e^q, $e^{q'}$ a e jsou totožné, určena jest třemi z pat normál z nějakého bodu ku ploše φ_2 sestrojených. Neboť je-li v tomto případě $i\,k\,l$ některý z trojúhelníků vepsaných křivce K_2 a obepsaných R_2, musí se každé dvě z normál R^i, R^k, R^l plochy φ_2, majíce poly

své na paprsku komplexu, protínati, a ježto nejsou všecky tři v rovině, musí procházeti bodem.*)

V tomto případě tečna v každém z bodů f (odst. 9) musí procházeti bodem b, tak že přímky bf jsou společnými tečnami křivek R_2 a H_2 (odst. 9). Křivka C_2 splyne následkem toho s křivkou K_2 (36).

Rovina základní křivky normalie prochází jedním z vrcholů základního čtyřstěnu Δ.

44. Dle odstavce 42. rozdělí se svazek tečen paraboly R_2 ve dva svazky 1. řádu, z nichž jeden má střed v bodě a^k, druhý pak na přímce $\omega\alpha^k$ v bodě e. Paprsky prvního svazku budeme obecně označovati A^n, druhého E^n.

Není-li bod a^k středem plochy, jest přímka $\omega\alpha^k$ osou křivky K_2, je-li středem, jest nekonečně vzdálenou přímkou roviny ω.

Bod e jest průsečníkem normál R^q a $R^{q'}$ plochy φ_2, obsažených v rovině ω. Souvislosť jeho s bodem, v němž přímka R proniká α^k, jest patrna z této úvahy:

Svazku rovin o ose V přidružena jest řada polů na přímce $\bar{R}$. Každá rovina ϱ tohoto svazku má pro všecky plochy řady $\Sigma\varphi_2{}^n$ poly své na jistém paprsku komplexu obsaženém v rovině ω a majícím pro plochu φ_2 za pol některý bod přímky $\bar{R}$; všecky tyto poláry procházejí bodem e. Z toho jde, že bod e jest polem přímky V vzhledem k fokálné kuželosečce $F_2{}^{(k)}$. Bod e a bod $R\alpha^k$ jsou tedy poly téže přímky V, první pro křivku $F_2{}^k$, druhý pro $A_2{}^k \equiv \varphi_2\omega$ (1).

45. Plocha kuželová $\varkappa_2$ (5) rozdělí se ve dva svazky přímek o středu v. Jeden skládá se z polár přímek $A^{(n)}$ a jest tedy v rovině α^k, druhý z polár přímek E^n a náleží tudíž polárné rovině ε bodu e pro plochu φ_2.

Z odst. 5. jest zřejmo, že jako v rovině ω svazek tečen paraboly R_2 rozdělí se i v každé rovině ω^m svazku třetí třídy $\Sigma\omega^n$ parabola příslušná ve dva svazky 1. řádu, z nichž jeden má střed v bodě a^k, druhý v bodě e^m.

Body e^m budou při tom na přímce R^e, která jest polárou roviny ε vzhledem k řadě $\Sigma\varphi_2{}^n$, čili paprskem komplexu majícím pro plochu φ_2 za pol bod e.

Poněvadž body e^m dle odst. 44. jsou poly přímek V^m roviny α^k pro kuželosečku fokálnou $F_2{}^{(k)}$, a všecky přímky V^m procházejí bodem v, jest přímka R^e polárou bodu v vzhledem ke křivce $F_2{}^k$.

---

*) V případě *b*) hodí se nám lépe poněkud jiné označení, nežli jsme dosud užívali. Body křivky K_2 budeme označovati písmeny bez indexů, na př. i, normálu plochy φ_2 v tomto bodě R^i. Je-li ikl trojúhelník vepsaný K_2 a obepsaný R_2, označíme jeho strany proti vrcholům i, k a l ležící J resp. K a L a reciproké roviny polárné stran těchto ω^i resp. ω^k a ω^l. Krátce, budeme tu mluviti o tečně J paraboly R_2 protilehlé vrcholu i a o protilehlé reciproké rovině polárné ω^i tohoto bodu.

46. Všecky roviny ω^n příslušné k paprskům E^n procházejí přímkou R^e, tvoří tedy svazek o ose R^e, který jest jedním dílem svazku třetí třídy $\Sigma\omega^n$ případu obecného.

Druhý díl tvořen jest reciprokými rovinami polárnými paprsků A^n. Tyto roviny obsahují paprsky komplexu, které mají poly své vzhledem ku ploše φ_2 na přímce $\omega\alpha^k$. Poněvadž ale tyto osy, k nimž i přímka R^e náleží, obalují kuželosečku, která dotýká se hran čtyřstěnu Δ v rovině α^k ležících a přímky $\omega\alpha^k$, jest z toho zřejmo, že druhou částí svazku třetí třídy $\Sigma\omega^n$ jest svazek rovin tečných plochy kuželové (válcové) ψ_2 2. řádu, která dotýká se stran čtyřstěnu Δ procházejících vrcholem a^k, roviny ω a roviny $a^k R^e$.

Roviny tohoto svazku jsou rovinami polárnými bodu v vzhledem ku všem plochám řady $\Sigma\varphi_2{}^n$, kdežto každá rovina prvního dílu, t. j. svazku o ose R^e, může býti pokládána za rovinu polárnou bodu v vzhledem k fokálné kuželosečce $F_2{}^k$.

47. Kterákoli přímka A^n protíná K_2 ve dvou bodech r^{ni} a r^{nk}, a normály plochy φ_2, mající v nich své poly, jsou v reciproké rovině polárné ω^n přímky A^n a pronikají se tudíž v bodě e^n na přímce R^e. Z toho jde, že přímka R^e jest dvojnásobnou přímkou plochy ψ_4.

Dvě z přímek A^n dotýkají se křivky K_2 v bodech b a b' na přímce $\omega\alpha^k$; body e_b k nim příslušné jsou kuspidálnými body plochy ψ_4 a náležejí dle právě uvedeného přímce R^e.

Že přímka R^e jest částí dvojného útvaru plochy ψ_4, poznáme též z následující úvahy, která nás zároveň poučí o zbývající části tohoto útvaru.

Přidružíme-li roviny prostorového svazku e^q projektivně k bodům roviny ω způsobem vytčeným v odst. 19., budou paprskům A^n příslušeti ve svazku e^q přímky obsažené v rovině přidružené bodu a^k. Poněvadž ale přímce $d^q d^{q'} \equiv R$ svazku a^k odpovídá ve svazku e^q přímka $e\,e^q$ a přímce $e^q e^{q'}$ normála plochy v bodě e^q, jest bodu a^k přidružena rovina ω^q stanovená touto normálou a přímkou $e\,e^q$. Podobně by byla bodu a^k v prostorovém svazku $e^{q'}$ přidružena rovina $\omega^{q'}$, stanovená normálou plochy φ_2 v tomto bodě a přímkou $e\,e^{q'}$. Z toho jde, že každé dvě přímky plochy ψ_4, příslušné k bodům, v nichž některá z přímek A^n křivku K_2 proniká, mají společný bod $\omega^q \omega^{q'}$, t. j. na přímce R^e. Ta jest tedy částí útvaru dvojného plochy ψ_4.

Svazku přímek E^n přidružen jest ve svazku e^q svazek přímek v rovině sdružené s bodem e. Poněvadž ale přímce $e\,e^{q'}$ přidružena jest ve svazku e^q přímka $e^q e^{q'}$, bude bodu e příslušeti rovina procházející touto přímkou a mimo to bodem e^h, v němž protínají se normály plochy φ_2 v bodech přímky $\omega\alpha^k$ náležející též svazku e. Táž rovina odpovídá bodu e v prostorovém svazku $e^{q'}$. Z toho jest zřejmo, že druhým útvarem dvojným plochy ψ_4 bude výtvar dvou projektivných svazků roviny $e^q\, e^{q'}\, e^h$, které mají středy své v bodech e^q a $e^{q'}$. Uvážíme-li, že přímka $e^q e^{q'}$ oběma svazkům společná odpovídá ve svazcích

e^q a $c^{q'}$ různým přímkám $d^{q'}e^{q'}$ resp. $d^q c^q$ svazku e, jest zřejmo, že výtvarem vytčených dvou svazků kuželosečka procházející body e^q, $e^{q'}$ a c^h. Tato kuželosečka D_2 jest druhou částí dvojné křivky plochy ψ_4.

Obě části dvojného útvaru plochy ψ_4, t. j. přímka R^e a kuželosečka D_2, mají společný bod u, v němž pronikají se normály plochy ψ_4 v bodech náležejících paprsku $a^k e$. Ten totiž náleží i do svazku A^n i do svazku E^n.*)

48. Dva z paprsků E^n dotýkají se křivky K_2 a normály B'' a B''' plochy φ_2 k bodům dotyčným b'' a b''' příslušné jsou druhýma dvěma torsálnými přímkami plochy ψ_4 (17). Na nich jsou ostatní dva body kuspidálné $e^{b''}$ a $c^{b'''}$ které náležejí též křivce D_2; jsou to tedy proniky B'' a B''' s rovinou křivky D_2.

Jest zřejmo, že tyto body náležejí i ploše ψ_2, neboť jsou obsaženy reciproké rovině polárné přímky $b''b'''$ náležející svazku přímek A^n a v reciproké polárné rovině přímky k $b''b'''$ soumezné.

49. Kterákoli rovina svazku R^e protíná křivku D_2 kromě v bodě u ještě v bodě, který jest společný normálám plochy φ_2 v bodech, v kterých tato rovina proniká křivku K_2. Pouze pro rovinu $R^e a^k$, t. j. reciprokou rovinu polárnou přímky $c a^k$, oba tyto body splynou. Z toho jde, že tato rovina dotýká se křivky D_2 v bodě u.

Tečné roviny plochy ψ_2 stanoví na přímkách R^e a $\omega\alpha^k$ dvě projektivné řady. Kterémukoli bodu x druhé řady odpovídá v první řadě bod, v němž ji protíná reciproká rovina polárná ω^m přímky $a^k x$, t. j. k této rovině příslušný bod e^m dvojné přímky R^e. Bodu e odpovídá tedy bod u, z čehož jde, že přímka R^e dotýká se plochy ψ_2 v bodě u.

V každé tečné rovině ω^m plochy ψ_2 jsou dva body křivky D_2. Taková rovina protíná totiž křivku K_2 ve dvou bodech r^{km} a r^{im}, z nichž každý určuje s bodem e přímku protínající K_2 ještě v jednom bodě r^{kl} a r^{ip}. Přímky $R^{k,l}$ a R^{ip} protínají přímky R^{km} a R^{im} v bodech křivky D_2. Pouze pro rovinu ω^k procházející přímkou $e a^k$ (tedy i R^e) oba tyto body splynou s bodem u, tak že křivka D_2 v tomto bodě dotýká se přímky $a^k u$ plochy ψ_2, tedy i této plochy.

50. Přímky B'' a B''' pronikají se, majíce poly své na paprsku komplexu $b''b'''$, v jistém bodě e^x přímky R^e. Průmět křivky D_2 z tohoto bodu na rovinu ω musí procházeti body b'' a b'''.

Je-li křivka K_2 kruhovou křivkou plochy φ_2, jest bod e, jakožto průsečík normál této křivky, jejím středem a tím přímka $b''b'''$ nekonečně vzdálena. Body b'', b''' budou imaginárnými body kruhovými roviny ω a bod c^x nekonečně vzdáleným bodem přímky R^e. Z toho jde:

Pravoúhelný průmět dvojnásobné kuželosečky normalie plochy φ_2 dle jejího kruhového průseku do roviny tohoto průseku jest křivka kruhová.**)

---

*) Srovnej »Peschka, Darst. und proj. Geometrie« IV. sv., str. 197. a 198.

**) Peschka, »Darst. und proj. Geometrie« IV. sv., str. 207.

Zároveň jest zřejmo, že rovina křivky D_2 prochází v tomto případě nekonečně vzdálenou přímkou plochy ψ_2. Řídicí křivkou této plochy v rovině α^k jest však v tomto případě, ana rovina ω neprochází středem a^{IV} plochy φ_2, parabola, která dotýkajíc se všech stran čtyřstěnu A v rovině α^k ležících, má za přímku řídicí přímku $a^{IV}v$. Poněvadž její osa jest k této přímce kolmá, jest z toho zřejmo, že rovina dvojnásobné kuželosečky D_2 plochy ψ_4 jest v tomto případě kolma na průměr plochy φ_2 přidružený k rovině ω, čili na přímky spojující střed plochy φ_2 s jejím kruhovým bodem, v němž rovina tečná plochy φ_2 jest stejnosměrna s rovinou ω.

51. Zbývá ještě pojednati o křivce C_6 (15, 16).

Každá rovina procházející přímkou R^e má s plochou ψ_4 ještě dvě společné přímky a dotýká se tedy této plochy v bodech, v nichž tyto přímky protínají přímku R^e. Jednou částí křivky C_6 jest tedy přímka R^e, a sice jest ji počítati dvojnásobně, poněvadž každým jejím bodem procházejí dvě přímky plochy ψ_4 a každá z nich stanoví s přímkou R^e rovinu tečnou plochy ψ_4 v tomto bodě.

Druhou částí křivky C_6 jest křivka, v níž plocha ψ_2 dotýká se plochy ψ_4. Část tato jest řádu čtvrtého, neboť obě plochy nemají žádné společné povrchové přímky (46).

Tato druhá část, již označíme C_4, promítá se z bodu a^k plochou kuželovou ψ_2, z čehož vyplývá, že tento bod jest jedním vrcholem jejího polárného čtyřstěnu. Příslušnou k němu rovinou polárnou jest rovina α^k, poněvadž body d^m a $d_1{}^m$, v nichž některá přímka R^m plochy ψ_2 dotýká se plochy ψ_4, jsou bodem a^k a rovinou α^k harmonicky odděleny.

Pro torsální přímky B a B', náležející rovině α^k, body d^m a $d_1{}^m$ splynou v body d_b a $d_{b'}$, tak že přímky C a C' plochy ψ_2, obsažené v rovinách torsálných $a^k B$ a $a^k B'$, křivky C_4 se dotýkají (17). Tyto dvě roviny torsálné mají tedy s křivkou C_4 čtyřbodový dotyk.

Podobné splynutí bodů d^m a $d_1{}^m$ nastane i v bodě u. Rovina $a^k R^e$ dotýká se totiž plochy ψ_2 ve přímce $a^k u$ (47), a poněvadž v bodě u protínají se přímky plochy ψ_4, obsažené v rovině $a^k R^e$, splynou v tomto bodě oba body d^m a $d_1{}^m$ těmto přímkám náležející. Zbývá rozhodnouti, je-li bod u pro křivku C_4 bodem dvojným, anebo dotýká-li se v něm tato křivka přímky $a^k u$.

K tomu cíli přihlédněme k libovolné rovině svazku R^e a ustanovme, kolik bodů má mimo bod u společných s křivkou C_4. V každé takové rovině jsou dvě přímky plochy ψ_4 a na každé z nich jest jediný bod křivky C_4 (17, 51). Na přímce R^e kromě bodu u jiného bodu křivky C_4 býti nemůže, neboť takový bod náležel by i ploše ψ_2 (46), která se přímky R^e v bodě u dotýká (47) Z toho následuje nutně, že každá rovina svazku R^e má kromě zprva vytčených dvou bodů s křivkou C_4 jen ještě společný bod u, a poněvadž dle svrchu dokázaného přímka $a^k u$ má s C_4 v bodě u dva splývající body společné, musí bod u pro křivku C_4 býti bodem dvojným.

Zároveň jest zřejmo, že obě větve křivky C_4 dotýkají se v bodě u roviny $a^k R^e$.

Křivka C_4 bude se tedy i z bodu u promítati plochou kuželovou 2. st. Třetí bod, který bude míti touž vlastnosť, musí býti v rovině $a^k R^e$ i v rovině α^k, tedy na přímce R_e; mimo to musí býti v rovině určené přímkami $a^k d_b$ a $a^k d_{b'}$, čímž jest úplně stanoven.

Konečně podotýkáme, že vývody odst. 26. a 27. a vyplývající z nich přidruženosť v nullovém systemu nemají významu v tomto zvláštním případě.

Rovina základní křivky normalie prochází dvěma z vrcholů základního čtyřstěnu.

52. Svazek tečen paraboly R_2 rozdělí se ve dva svazky 1. stupně o středech a^k a a^l, jimiž prochází rovina ω. Střed v plochy kuželové $\varkappa_2$ jest na přímce $\alpha^k \alpha^l$, která zastupuje přímku V, a soustava přímek této plochy přejde ve dva svazky středu v v rovinách α^k a α^l. Přímka R, jakožto polára přímky V pro plochu φ_2, sjednotí-li se s přímkou $a^k a^l$, a normály plochy φ_2 v bodech, v nichž tato přímka proniká φ_2, splynou s touž přímkou. Tuto přímku pokládati jest tudíž za dvojnásobnou přímku plochy ψ_4.

Reciproké roviny polárné paprsků komplexu ${}^n A^k$, ležících v rovině ω a tvořících svazek o středu a^k, jsou rovinami polárnými přímek ${}^n V^k$ roviny α^k, procházejících bodem v. Jejich stopní přímky na α^k obsahují tedy poly přímek ${}^n V^k$ pro všecky kuželosečky $\Sigma A_2{}^k$ této roviny. Poněvadž bod v jest na jedné ze stran základního polárného trojúhelníku těchto kuželoseček, t. j. na přímce $\alpha^k \alpha^l$, rozdělí se tyto stopy ve dva svazky 1. st., z nichž jeden má střed v jistém bodě t přímky $\alpha^k \alpha^l$, druhý v bodě a^l. Každá z přímek posledního svazku může býti pokládána za sdruženou s přímkou $\alpha^k \alpha^l$, poněvadž tato přímka pro všecky kuželosečky $\Sigma A_2{}^k$ má svůj pol v bodě a^l.

Z toho vyplývá, že reciproké roviny polárné přímek ${}^n A^k$ tvoří dva svazky, z nichž první má za osu přímku $a^k t$ roviny α^l, již označíme T^l, druhý pak přímku $a^k a^l$. Z podobných důvodů jako v odst. 45. jest zřejmo, že přímka T^l jest polárou bodu v vzhledem k fokálné kuželosečce $F_2{}^l$. Roviny druhého svazku mohou býti vesměs pokládány za reciproké roviny polárné přímky $a^k a^l$, neboť každá z nich má za poláru přímku $\alpha^k \alpha^l$. Podobně i reciproké roviny polárné přímek ${}^n A^l$ svazku a^l v rovině ω tvoří dva svazky 1. st.; jeden má za osu přímku T^k v rovině α^k, která jest polárou bodu v vzhledem k fokálné kuželosečce $F_2{}^k$, druhý jest totožný s druhým svazkem při přímkách A^k se vyskytnuvším.

Svazek třetí třídy rovin ω^m rozdělí se tím ve tři udané svazky 1. stupně. Roviny ω^n svazku T^k a T^l jsou rovinami polárnými bodu v vzhledem k fokálným kuželosečkám $F_2{}^k$ a $F_2{}^l$ řady $\Sigma \varphi_2{}^n$, kdežto roviny svazku $a^k a^l$ jsou jeho rovinami polárnými pro plochy této řady.

53. Kterákoliv přímka ${}^n A^k$ protíná K_2 v bodech r^{nm}, r^{np}, jimiž procházejí dvě z přímek A^l, totiž ${}^m A^l$ a ${}^p A^l$ protínající křivku K_2 podruhé v bodech r^{ms} a r^{ps}, ležících na přímce ${}^s A^k$. Normály $R^{n,m}$ a R^{np}, jakož i R^{ms} a R^{ps} jsou

ve dvou rovinách svazku T^l, kdežto normály R^{nm} a R^{ms}, jakož i R^{np} a R^{ps} ve dvou rovinách svazku T^k. Z toho jest zřejmo, že normály prvních dvou párů musí se protínati na přímce I^k, druhých dvou na přímce T^l; tyto přímky jsou tedy dvojnásobnými přímkami plochy ψ_4. Zároveň jest patrno, že roviny bitangenciálné svazků T^k a T^l dotýkají se plochy ψ_4 vždy ve dvou bodech přímky T^k resp. T^l, a sice v těch, v nichž je protínají přímky plochy ψ_4 v těchto rovinách obsažené.

54. Libovolná rovina ω^k svazku $a^k a^l$ má s plochou ψ_4 kromě této dvojnásob počítané přímky $a^k a^l$ ještě společnou kuželosečku $K_2{}^x$, která přidružena jest v affinitě v odst. 4. vylíčené kuželosečce K_2. Bodům křivky K_2 na přímce $a^k a^l$ odpovídají při tom body křivky $K_2{}^x$ na téže přímce, a poněvadž body křivky K_2, tedy i křivky $K_2{}^x$, jsou body a^k a a^l harmonicky odděleny, stanoví všecky křivky $K_2{}^x$ plochy ψ_4 na přímce a^k a^l kvadratickou involuci bodovou, jejímiž dvojnásobnými body jsou body a^k a a^l, jimiž právě procházejí přímky T^l a T^k.

Každá rovina ω^x svazku $a^k a^l$ jest rovinou tečnou v bodech, v nichž tuto přímku protíná kuželosečka $K_2{}^x$.

Zároveň jest z tohoto vyšetřování zřejmo, že křivka C_6 rozdělí se ve přímky T^k, T^l a $a^k a^l$, z nichž každou počítati jest dvakráte.

55. Osy kuželosečky K_2 a nekonečně vzdálená přímka její roviny tvoří trojúhelník, jehož vrcholy jsou a^k, a^l a bod o, společný rovině ω a přímce $\alpha^k \alpha^l$. Poněvadž reciproké roviny polárné jeho stran $a^k o$ a $a^l o$ jsou roviny α^l a α^k a poněvadž každá rovina ω^x, procházející přímkou $a^k a^l$, protíná tyto dvě roviny v přímkách, tvořících s přímkou $a^k a^l$ polárný trojúhelník křivky $K_2{}^x$, jehož jedna strana jest nekonečně vzdálena a druhé dvě na sobě kolmy, jsou tyto dvě strany osami křivky $K_2{}^x$.

Je-li tedy přímka $a^k a^l$ nekonečně vzdálena, t. j., jsou-li body a^k a a^l body nekonečně vzdálené dvou hlavních os plochy φ_2, jsou osami křivky $K_2{}^x$ průsečnice roviny ω^x s rovinami α^k a α^l, a střed o^x této křivky jest na přímce $\alpha^k \alpha^l$. Asymptoty všech křivek $K_2{}^x$ vytvoří tu na nekonečně vzdálené přímce kvadratickou involuci bodovou, která má body a^k a a^l za dvojnásobné (54). Není-li přímka $a^k a^l$ nekonečně vzdálená, t. j., je-li na př. bod a^k středem plochy, jest přímka $\alpha^k \alpha^l$ nekonečně vzdálená. Jednou osou každé z křivek $K_2{}^x$ jest přímka $a^k a^l$ a druhá jest v rovině α^l. Bod a^k jest tedy středem všech křivek $K_2{}^x$.

56. Roviny torsálné plochy ψ_4 jsou rovinami tečnými křivky K_2, procházejícími přímkami T^k a T^l; body kuspidálné, příslušné k rovinám procházejícím přímkou T^k jsou na T^l a naopak. Torsálné přímky jsou v rovinách α^k a α^l. Body, v nichž křivky $K_2{}^x$ protínají rovinu α^k resp. α^l, jsou na těchto přímkách torsálných. Je-li tedy bod a^k středem plochy φ_2, tedy rovina α^k nekonečně vzdálená, jsou asymptoty křivek $K_2{}^x$ ve dvou rovinách, jimiž se z bodu a^k promítají nekonečně vzdálené torsálné přímky plochy ψ_4. Tyto roviny jsou reciprokými rovinami polárnými asymptot křivky K_2.*)

*) O ploše ψ_4 v tomto zvláštním případě pojednal dílem syntheticky, dílem analyticky prof. J. Šolín v práci dříve uvedené.

O normalii s trojnásobnou přímkou.

57. Přihlédněme ke případu *b*) odst. 41. Přímky plochy ψ_4, mající za poly vrcholy trojúhelníku ikl, vepsaného křivce K_2 a obepsaného R_2 (odst. 43.), protínají se v bodě e^{ikl}, který jest pro ψ_4 bodem trojnásobným. Všecky tyto trojnásobné body, příslušné k jednotlivým trojúhelníkům ikl, musí býti na přímce — trojnásobné přímce plochy ψ_4. Označíme tuto přímku C. Tato přímka musí procházeti i bodem e náležejícím křivce K_2, v němž protínají se normály R^q a $R^{q'}$, plochy φ_2, obsažené v rovině ω, neboť tento bod jest též trojnásobným bodem plochy ψ_4.

Pro další úvahy jest prospěšno ukázati, že přímka C jest trojnásobnou přímkou ještě pro jednu normalii plochy φ_2.

Budiž mnp jiný trojúhelník, vepsaný K_2 a obepsaný R_2, a $e^{m,n,p}$ trojný bod plochy ψ_4, tomuto trojúhelníku příslušný. Všecky paprsky komplexu osového, protínající přímku C, určenou body $e^{i,k,l}$ a $e^{m,n,p}$, mají poly na ploše 2. řádu γ_2, obepsané základnímu čtyřstěnu Δ. Tato plocha prochází i body i, k, l, m, n a p, poněvadž paprsky mající v nich své poly protínají přímku C, a to v bodech $e^{i,k,l}$ a $e^{m,n,p}$. Z toho ale vyplývá, že kuželosečka K_2 náleží ploše γ_2, kteráž tedy musí plochu φ_2 pronikati kromě v K_2 ještě v jedné křivce 2. řádu, již označíme K'_2. Normály plochy φ_2 v bodech této křivky; jakožto paprsky mající poly na ploše γ_2, musí též protínati přímku E.

Každým bodem $e^{i,k,l}$ přímky E prochází 6 normál plochy φ_2; tři z nich mají poly své v bodech i, k, l křivky K_2 a tedy zbývající tři v bodech i', k', l' křivky K'_2 (při čemž trojúhelník i', k', l' jest obepsán parabole R'_2, příslušné k rovině křivky K'_2). Z toho jde, že přímka E jest též trojnásobnou přímkou normalie ψ'_4, mající K'_2 za křivku základní.

Jako křivku K_2, bude přímka E protínati křivku K'_2 v bodě, v němž protínají ji normály plochy φ_2, obsažené v rovině ω'.

Kuželosečky K_2 a K'_2, jakož i jejich roviny ω a ω' budeme jmenovati doplňkovými.

Z tohoto vyšetřování poznáváme zároveň, že kuželosečky plochy φ_2, poskytující normalie s trojnásobnou přímkou, vynikají tou zvláštností, že přímky jedné soustavy plochy druhého řádu (γ_2) každou z nich a vrcholy základního čtyřstěnu plochy φ_2 určené jsou paprsky komplexu. Křivkou K_2 tohoto druhu jest její křivka doplňková K'_2 úplně určena jakožto zbývající část proniku plochy γ_2 s plochou φ_2.

58. Čtyři kuspidální body plochy ψ_4 musí býti v tomto případě na přímce E, ježto náležejí k bodům $e^{i,k,l}$. Z odst. 43. vychází na jevo, že musí býti i na přímkách F, jsou to tedy průsečíky těchto přímek s přímkou E. Druhou transversálou přímek B jest dle odst. 25. přímka V.

Ploše kuželové z_2 (5) bude v tomto případě vepsáno nekonečné množství trojhranů obepsaných ploše τ_2; roviny ε^k budou rovinami tečnými této plochy.

Přidruženosť v 1. nullovém systemu zůstává, za to ale důkaz o přidruženosti bodů e^{ikl}, a rovin ω^i v druhém nullovém systemu pozbývá tu významu, poněvadž všecky body e^{ikl} jsou na přímce a tedy s každým bodem x v rovině (26, 27).

V prvním nullovém systemu jsou přímky F samodružnými, z čehož jde, že druhou jejich transversálou jest přímka sdružená s přímkou E v tomto systemu.

59. Čtyři kuspidálné body plochy ψ_4 a čtyři kuspidálné body plochy ${}^1\psi_4$ (57) jsou hlavními středy křivosti plochy φ_2 v příslušných osmi bodech křivek K_2 a K_2'. Rovina tečná plochy hlavních středů křivosti, čili tak zvané plochy desmické plochy φ_2 v každém z těchto bodů jest kolmá k příslušné tečně křivky K_2 resp. K_2' a neprochází tudíž přímkou E. Z toho jde, že tato přímka v osmi kuspidálných bodech ploch ψ_4 a ψ_4' plochu desmickou protíná.

Poznáme hned, že mimo to ve dvou bodech této plochy se dotýká. Křivky K_2 a K_2' mají dva společné body t a t', v nichž plochy φ_2 a γ_2 se dotýkají. Myslíme-li si přímkou E rovinu obsahující některý z těchto bodů, na př. t, budou poly všech paprsků komplexu v této rovině ležících na paprsku komplexu P, který prochází bodem t, náleží ploše γ_2 a tedy v bodě t dotýká se plochy φ_2. Přímka P bude následkem toho jednou z hlavních tečen plochy φ_2 v bodě t, a rovina tE příslušnou k ní rovinou hlavní. Opakujíce tytéž úsudky pro bod t' dospějeme k výsledku, že přímka jest průsečnicí dvou hlavních rovin normálných plochy φ_2, z nichž jedna přísluší k bodu t, druhá k bodu t'.

Plochu γ_2 můžeme pojímati jakožto geometrické místo základních křivek komplexu, které mají své poly na přímce E. Každým bodem s přímky E prochází totiž nekonečné množství paprsků komplexu, které tvoří plochu kuželovou komplexu a mají poly své na jisté základní křivce náležející ploše γ_2. Tato křivka protíná křivky K_2 a ${}^1K_2$ dohromady v šesti bodech, které jsou poly bodem s procházejících přímek ploch ψ_4 a ${}^1\psi_4$.

Normála R^t protínejž přímku E v bodě e^t. Všecky paprsky komplexu tímto bodem procházející budou míti dle předešlého své poly na křivce 3. řádu, která procházejíc bodem t a náležejíc ploše γ_2, musí se v tomto bodě dotýkati plochy φ_2. Z toho ale nutně vychází, že jedna ze šesti normál plochy φ_2 bodem e^t procházejících bude k normále R^t nekonečně blízká, čili že bod e^t jest jedním z hlavních středů křivosti plochy φ_2 v bodě t, a sice jest to ten bod, v němž rovina tE dotýká se plochy desmické. Z toho následuje, že trojnásobné přímky E normalií ψ_4 jsou dvojnásobnými tečnami plochy desmické.

Zároveň poznáváme při této příležitosti, že plocha desmická jest řádu 12.

60. Dokážeme vlastnosť přímek E z odst. 59. ještě jiným způsobem.

Budiž M libovolná přímka a μ_2 plocha 2. st., obsahující poly všech paprsků komplexu, které přímku M protínají. Její přímky protínající M jsou, jak jsme již poznali, paprsky komplexu a jejich reciproké roviny polárné obsahují

přímku M. Čtyři z těchto přímek dotýkají se plochy φ_2, a jejich reciproké roviny polárné jsou jediné čtyři hlavní normálné roviny plochy φ_2 procházející přímkou M.*) Uvažme, jak se věc změní, nastoupí-li na místo přímky M přímka E.

Plocha μ_2 přejde tu ve plochu γ_2, která se plochy φ_2 dotýká v bodech t a t'. Dvě a dvě ze čtyř vytčených přímek a tudíž i dvě a dvě ze čtyř hlavních rovin normálných plochy φ_2 stanou se nekonečně blízkými, z čehož jde, že přímkou E procházejí dva páry soumezných rovin tečných plochy desmické, že tedy tato přímka jest její dvojnásobnou tečnou.**)

61. Přímka určená společnými body t a t' dvou doplňkových křivek K_2 a K_2' není obecně paprskem komplexu. Kdyby byla paprskem komplexu, protínaly by se normály R^t a $R^{t'}$ v jistém bodě $e^{t,t'}$. Z tohoto bodu byly by kromě normál R^t a $R^{t'}$ možny ještě čtyři normály plochy φ_2, z nichž dvě měly by své paty na K_2, dvě na K_2'. Kdyby byly obě paty na K_2 se nalézající od bodů t a t' různé, procházely by bodem $e^{tt'}$ čtyři normály, mající paty v jedné rovině ω různé od α^k, což jest nemožné. Z toho následuje nutně, že dvě ze čtyř normál bodem $e^{tt'}$ kromě normál R^t a $R^{t'}$ procházejících musí býti k těmto normálám nekonečně blízké, t. j. přímka E musila by býti v tomto případě tečnou dvojné křivky plochy desmické. Naopak bylo by snadno dokázati, že, je-li přímka E tečnou dvojné křivky plochy desmické, na př. v bodě $e^{tt'}$, přímka tt' jest paprskem komplexu.

62. Určíme, kolik přímek E prochází libovolným bodem s v prostoru.

Bodem s prochází šest normál plochy φ_2; jejich paty jsou po třech ve 20 rovinách tvořících 10 párů, tak že roviny každého páru obsahují všech šest pat. Roviny každého páru mají s φ_2 společné doplňkové kuželosečky ${}^nK_2$ a ${}^nK_2'$, k nimž příslušné normalie mají touž trojnásobnou přímku ${}^nE$.

Každým bodem v prostoru prochází tedy deset přímek E.

Ke každé z 10 přímek ${}^nE$ náleží plocha ${}^n\gamma_2$ tuto přímku obsahující a protínající φ_2 v křivkách ${}^nK_2$ a ${}^nK_2'$. Deset ploch ${}^n\gamma_2$ prochází vesměs základní křivkou komplexu, která má bod s za pol. Tímto bodem procházejí dvě přímky každé z ploch ${}^n\gamma_2$: jedna z nich, která není paprskem komplexu, jest přímka ${}^nE$, druhá pak, označme ji ${}^nG$, jest paprskem komplexu. Poněvadž [1] přímka ${}^nE$ i přímka ${}^nG$ protínati musí křivky ${}^nK_2$ a ${}^nK_2'$, jest z toho zřejmo: Každá z 10 dvojin kuželoseček ${}^nK_2$ ${}^nK_2'$ příslušných k libovolnému bodu s v prostoru má takovou polohu, že z jediných dvou přímek

*) Z toho vychází na jevo, že plocha desmická jest třídy 4.

**) Bylo by nesprávno domnívati se, že každá dvojnásobná tečna plochy desmické jest trojnásobnou přímkou jisté normalie ψ_4. K dvojnásobným tečnám plochy desmické náležejí na př. normály plochy φ_2. Plocha γ_2 k normále pl. φ_2 příslušná jest plocha kuželová 2. st., mající patu normály za svůj střed a pronikající plochu φ_2 ve křivce 4. řádu, která dotýká se hlavních tečen plochy φ_2 k oné patě příslušných. Mimo to jsou dvojnásobné tečny plochy desmické, k nimž příslušné plochy γ_2 dotýkají se plochy φ_2 ve dvou bodech náležejících přímce plochy φ_2. Pronik ploch γ_2 a φ_2 složen jest potom z této přímky a z křivky 3. řádu.

${}^nE$ a ${}^nG$ bodem s procházejících a tyto dvě křivky v různých bodech protínajících jedna $({}^nG)$ jest paprskem komplexu, druhá pak společnou trojnásobnou přímkou normalií plochy φ_2 dle křivek ${}^nK_2$ a ${}^nK'_2$. Deset transversál prvního druhu $({}^nG)$ jest se šesti normálami plochy φ_2, které bodem s procházejí, na ploše kuželové 2. řádu, totiž na komplexové ploše kuželové o středu s.

63. Ustanoviti, kolik přímek E jest v rovině.

Označme 1, 2, 3, ... 6 paty normál plochy φ_2 procházejících bodem s, K_2 kuželosečku této plochy určenou body 1, 2, 3, ${}^1K_2$ kuželosečku určenou na př. body 3, 4, 5. K'_2 a ${}^1K'_2$ buďtež jejich kuželosečky doplňkové a E a ${}^1E$ trojnásobné přímky normalií ψ_4, ψ'_4 a ${}^1\psi_4$, ${}^1\psi'_4$. Obě tyto přímky musí procházeti bodem s. Kuželosečka K_2 a ${}^1K_2$ mají kromě bodu p_3 společný bod x a kuželosečky K'_2 a ${}^1K'_2$ kromě bodu 6 bod x'. Normály R^x a $R^{x'}$ musí protínati přímky E a ${}^1E$ a neprocházejíce bodem s (jímž jest jen 6 normál k φ_2 možno), musí býti v rovině $E\,{}^1E$. Ustanovíme, kolik přímek E tato rovina kromě E a ${}^1E$ obsahuje. Označme tuto přímku obecně E^k. Dokážeme nejprve, že nemůže procházeti bodem $E\,{}^1E$ Kdyby tomu totiž tak bylo, musily by kuželosečky $K^{(k)}{}_2$ a $K'^{(k)}{}_2$ k ní příslušné procházeti body 1, 2, ... 6, a poněvadž mimo to obsahovaly by body x a x', sjednocovaly by se s $K_2\,K'_2$ nebo ${}^1K_2\,{}^1K'_2$, t. j. přímka E^k nebyla by různá od E resp. ${}^1E$.

Z toho jde, že přímka E^k musí protínati přímky E a ${}^1E$ v různých bodech. Přihlédněme k bodu $E\,E^k$. Ze šesti normál plochy φ_2, tímto bodem procházejících, tři mají paty své na K_2, tři na K'_2; kuželosečka $K_2{}^k$ musí tedy procházeti bodem x a dvěma ze tří pat na K'_2, kdežto $K'_2{}^k$ bodem x' a dvěma ze tří pat na K_2. Poněvadž spojnice každých dvou těchto pat jest paprskem komplexu, můžeme též říci, že rovina kuželosečky $K_2{}^k$ prochází bodem x a protíná rovinu kuželosečky K'_2 v paprsku komplexu, čili dotýká se paraboly R'_2. Uvažujíce podobně pro bod ${}^1E\,E^k$, seznáme, že táž rovina musí býti rovinou tečnou paraboly ${}^1R'_2$, tak že máme tento výsledek: Rovina křivky $K_2{}^k$ jest společnou rovinou tečnou parabol R'_2 ${}^1R'_2$ procházející bodem x'.

Zbývá tedy rozhodnouti, kolik takových rovin tečných jest. Roviny těchto parabol mají společnou přímku $6\,x'$, která není paprskem komplexu, poněvadž bodem 6 na př. v rovině křivky R'_2 procházejí jen dva paprsky komplexu, totiž 64 a 65, které jsou od přímky $6\,x'$ různé. Z toho jde, že paraboly R_2 a R'_2 nemají společné tečny a že tedy plocha obalová jejich společných rovin tečných jest třídy 4té. Bodem x procházejí tedy čtyři společné roviny tečné těchto parabol. K těmto rovinám nenáleží rovina ani křivky K_2 ani křivky ${}^1K_2$, poněvadž průsečnice těchto rovin s rovinami křivek K_2' resp. ${}^1K_2'$ nejsou paprsky komplexu (61). Z toho vyplývá, že kromě přímek E a ${}^1E$ v rovině $E\,{}^1E$ jsou ještě čtyři přímky E^k, čili: V každé rovině jest 6 přímek, které jsou trojnásobnými přímkami normalií ψ_4 (a ψ'_4) plochy φ_2.

64. Každým bodem e^{ikl} přímky E procházejí tři přímky R^i, R^k a R^l plochy ψ_4 a na každé z nich jsou dva body d^x křivky C_6 (16).

Parabola $R_2{}^l$ v rovině ω^l (odst. 13.) dotýká se přímky R^i v bodě d^i, přímky R^k v bodě $d_1{}^k$; parabola $R_2{}^i$ v rovině ω^i dotýká se přímky R^k v bodě d^k, přímky R^l v bodě $d_1{}^l$; parabola $R_2{}^k$ v rovině ω^k dotýká se přímky R^l v bodě d^l, přímky R^i v bodě $d_1{}^i$; při tom jsou přímky $d_1{}^i\, d^k$, $d_1{}^k\, d^l$ a $d_1{}^l, d^i$ tečnami těchto parabol. Jsou to přímky plochy φ_4, v nichž roviny ω^l, ω^i a ω^k této plochy se dotýkají. Značí-li u^i, u^k a u^l proniky kterékoli roviny tečné ω^x plochy φ_4 s přímkami R^i, R^k a R^l, jsou přímky $u^i u^k$, $u^k u^l$ a $u^l u^i$ též tečnami parabol $R_2{}^l$, $R_2{}^i$ a $R_2{}^k$, a platí tudíž rovnice $(e^{ikl}\, d^i\, d_1{}^i\, u^i) = (d_1{}^k\, e^{ikl}\, d^k\, e^k) = (d^l\, d_1{}^l\, e^{ikl}\, u^l)$.

Označíme-li krátce $(e^{ikl}\, d^x\, d_1{}^x\, u^x)$ znakem λ^x, lze předcházející rovnici psáti

$$\lambda^{(i)} = \frac{1}{1-\lambda^{(k)}} = \frac{\lambda^{(l)}-1}{\lambda^{(l)}} \text{ čili } \frac{1}{\lambda^{(i)}} + \lambda^{(k)} = 1,\ \lambda^{(i)} + \frac{1}{\lambda^{(l)}} = 1,\ \lambda^{(l)} + \frac{1}{\lambda^{(k)}} = 1.$$

Z toho vyplývá $\frac{1}{\lambda^{(k)}} = 1 - \lambda^{(l)}$, $\lambda^{(i)}\lambda^{(k)} = -\frac{1}{\lambda^{(l)}}$, tedy $\lambda^{(i)}\lambda^{(k)}\lambda^{(l)} = -1$.

Není třeba zvláště dokazovati, že tyto relace platí i tenkráte, vezmeme-li za rovinu ω^x rovinu smíru; body u^i, u^k a u^l budou potom body smíru přímek R^i, R^k a R^l, a dvojpoměry λ^x přejdou v poměry jednoduché.

Normalie s trojnásobnou přímkou, jejíž křivka základní jest v rovině, obsahující některý z bodů a^k.

65. Budiž l libovolný bod roviny α^k. Ze šesti normál plochy φ_2 tímto bodem procházejících jsou čtyři — totiž bodem l procházející normály křivky $A_2{}^k$ — v rovině α^k a zbývající dvě mají paty na přímce obsahující bod a^k. Paty prvních čtyř označíme 1, 2, 3, 4 a posledních dvou 5, 6. Každá ze čtyř rovin určených přímkou 5 6 a některým z bodů 1 . . . 4 protíná plochu φ_2 v kuželosečce, k níž příslušná normalie má trojnásobnou přímku (43). Naopak z toho vychází na jevo, že každou přímkou prostorového svazku a^k jsou možny čtyři roviny, mající s φ_2 společné kuželosečky, poskytující normalie s trojnásobnou přímkou.

Přihlédněme na př. k normalii, jejíž základní křivkou jest kuželosečka plochy φ_2 v rovině 1 5 6.

Všecky paprsky komplexu této roviny tvoří dva svazky: jeden má střed v bodě a^k, druhý v bodě 1. Poslední tvrzení vyplývá z toho, že přímky 1 5 a 1 6 jsou paprsky komplexu.

Reciproké roviny polárné paprsků svazku 1 musí procházeti paprskem, který má tento bod za pol, t. j. normálou R_1 plochy φ_2 v tomto bodě. Z toho následuje, že přímka R_1 jest v tomto případě trojnásobnou přímkou E normalie ψ_4.

Každá z přímek svazku a^k protíná K_2 ve dvou bodech i a k, které s bodem 1 tvoří jeden z trojúhelníků vytčených v odst. 43., a přímky R^i a R^k plochy ψ_4 protínají se na přímce E v bodě e^{ik}. Myslíme-li si, jakoby

se přímka ik blížila k bodu 1, paprsky $1k$ a $1l$ budou se blížiti k tečnám plochy φ_2; bude-li přímka ik nekonečně blízka k bodu 1, přímky $1k$ a $1l$ budou soumeznými tečnami plochy φ_2 v bodě 1, a poněvadž jsou paprsky komplexu, budou tečnami druhé křivky křivosti plochy φ_2 příslušné k bodu 1.*) Z toho vychází na jevo:

Rovina základní křivky této zvláštní normalie jest oskulační rovinou druhé křivky křivosti procházející bodem 1.**)

Normály plochy φ_2 v těchto dvou k bodu 1 soumezných bodech i a k budou se protínati na přímce E ve druhém hlavním středu křivosti místa 1 plochy φ_2.

Tento bod označíme e_1; s ním splývají tři z kuspidálných bodů plochy ψ_4.

66. Křivka K_3 protíná křivku A_2^k kromě v bodě 1 ještě v bodě, který označíme $1'$. Přímka snovu a^k bodem $1'$ procházející dotýká se plochy φ_2 v tomto bodě čili má s ní společné dva soumezné body. Normaly plochy φ_2 v těchto bodech protínají se ve druhém hlavním středu křivosti e_1' místa $1'$ plochy φ_2, a tento střed musí též náležeti přímce E; jest to čtvrtý kuspidálný bod naší plochy.

67. V každém bodě x křivky A_2^k má plocha φ_2, jak známo, dva hlavní středy křivosti: jeden jest průsečíkem normály R^x se soumeznou normálou křivky A_2^k, a geom. místem těchto bodů jest evoluta O křivky A_2^k, druhý jest bodem společným normály R^x se soumeznou normálou plochy φ_2, která jest v rovině $a^k R^x$. K těmto bodům náležejí body e_1 a e'_1 odst. 65. a 66. Dokážeme, že geometrickým místem těchto druhých středů křivosti jest jistá kuželosečka T_2, mající trojúhelník tvořený body a^i v rovině α^k za trojúhelník základní.

Budiž A kterákoli přímka a^k dotýkající se plochy φ_2. S plochou touto má společné dva soumezné body x a x', a normály R^x a $R^{x'}$ pronikají se v druhém hlavním středu křivosti t^x místa x plochy φ_2. Všecky paprsky komplexu, které mají poly své na přímce A, budou bodem t^x procházeti. Paprsky tyto jsou kolmice k rovinám polárným bodů přímky A z těchto bodů sestrojené. Roviny tyto tvoří svazek rovin, jehož osou jest polára přímky A pro plochu φ_2, t. j., tečna T^x křivky H_2 v bodě x, a každý z vytčených paprsků obsahuje poly jedné té roviny pro všecky plochy řady $\Sigma\varphi_2^x$. Zvláště pak bod t^x, všem těmto paprskům společný, jest polem každé té roviny, čili polem přímky T^x, vzhledem k fokálné kuželosečce F_2^k. Z toho jde, že geometrickým místem druhých středů křivosti plochy φ_2 v bodech křivky A_2^k jest kuželosečka (T_2), která jest polárou křivky A_2^k vzhledem k fokálné kuželosečce F_2^k.***)

---

*) První křivkou křivosti pro bod 1 jest křivka A_2^k.

**) Rovina tato má s křivkou křivosti dotyk 3. st.

***) Srovnej: A. Clebsch »Über das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen 2. Ordnung«. Journal für Math., sv. 62.

Křivka T_2 jest známou křivkou vratu plochy desmické k φ_2 příslušné. Kromě této křivky rovina α^k má s plochou desmickou společnou evolutu O křivky $A_2{}^k$; v křivce T_2 dotýká se (dotyk 2. st.) pl. desmické, v křivce O ji protíná.

68. Řada bodů x křivky $A_2{}^k$ jest dle odstavce 67. projektivná s řadou bodů t^x křivky T_2, při čemž jsou k sobě vždy přidruženy bod x a příslušný k němu druhý hlavní střed křivosti t^x plochy φ_2, tedy dva body od sebe různé. Křivka obalová přímek R^x, určených body spolu sdruženými obou křivek, t. j. evoluta O křivky $A_2{}^k$, jest tedy třídy čtvrté.

Přihlédněme zvláště k bodům křivky T_2, které jsou sdruženy s body y, v nichž křivka fokálná $F_2{}^k$ protíná křivku $A_2{}^k$. Normála R^x křivky $A_2{}^k$ v bodě y, na níž bod t^y křivky T_2 býti musí, jest tečnou křivky $F_2{}^k$ v bodě y; přímka R^y jest následkem toho polárou bodu R^y vzhledem k $F_2{}^k$ a tudíž tečnou křivky T_2 v bodě t^y. Tím jest dokázáno, že společné tečny křivek $T_2{}^k$ a $F_2{}^k$ dotýkají se $F_2{}^k$ v kruhových bodech plochy φ_2, a dále, že evoluta O dotýká se křivky $T_2{}^k$ ve středech křivosti t^y plochy φ_2 v bodech kruhových, obsažených v rovině α^k.

69. Dle odstavce 67. jsou body e_1 a e'_1 poly tečen T_1 a T'_1 křivky $A_2{}^k$ v bodech 1 a 1′ vzhledem ke křivce $F_2{}^k$ a tedy přímka $E \equiv R_1 \equiv e_1 e'_1$ polárou bodu $T_1 T'_1$ pro křivku $F_2{}^k$. Z toho následuje, že křivka obalová přímek E, t. j. evoluta O a křivka obalová O' přímek 11′, t. j. přímek, v nichž roviny zákl. křivek těchto zvláštních normalií rovinu α^k pronikají, jsou v kollineární souvislosti takto určené: Každé tečně E křivky O přísluší vzhledem k fokálné křivce $F_2{}^k$ určitý pol, jehož polárou pro křivku $A_2{}^k$ jest tečna 11′ křivky O'.

Křivky O' a O jsou tedy stejného řádu i stejné třídy a souhlasí vůbec ve svých singularitách.

Než shrneme výsledky, k nimž jsme dospěli, ve větu, připomínáme ještě, že v kollineaci rovinných soustav soumístných, která byla právě vylíčena, křivce T_2, počítané k téže soustavě jako O, odpovídá dle odst. 67. křivka A_2 v soustavě druhé; bodům společným křivek T_2 a O odpovídají tedy body společné křivek H_2 a O', a poněvadž první dvě křivky ve čtyřech bodech t^y se dotýkají, musí se druhé dvě křivky dotýkati v bodech s nimi sdružených, t. j. ve kruhových bodech y plochy φ_2, obsažených v rovině α^k.

Dokázané výsledky obsaženy jsou ve větách:

Oskulační roviny křivek křivosti plochy druhého řádu φ_2 v bodech některé její hlavní roviny α^k pronikají tuto rovinu v přímkách obalujících křivku O', která jest polárou téže křivky vzhledem ke křivce $A^k{}_2$ $(\alpha^k \varphi_2)$ jako evoluta O křivky $A_2{}^k$ vzhledem k fokální kuželosečce $F_2{}^k$. Křivka O' dotýká se křivky $A_2{}^k$ v kruhových bodech plochy φ_2, obsažených v rovině α^k.

Každá z těchto rovin oskulačních, na př. rovina oskulační v bodě 1, má s plochou φ_2 společnou kuželosečku K_2, k níž příslušná nor-

malie plochy φ_2 má normálu K^1 v bodě 1 za přímku trojnásobnou. Normála plochy φ_2 ve druhém bodě (1′) křivkám K_2 a A_2^k společném protíná tuto trojnásobnou přímku ve druhém hlavním středu křivosti plochy φ_2 v tomto místě (1′).

70. Označme p_{56} bod společný přímce 56 a rovině α^k. Všecky paprsky, které mají poly na přímce 56, procházejí bodem l. Paprsky tyto obdržíme, spustíce z jednotlivých bodů této přímky kolmice na jejich roviny polárné. Každá tato kolmice obsahuje poly oné roviny pro všechny plochy řady $\Sigma\varphi_2^x$, zvláště pak bod l jest polem každé té roviny pro křivku F_2^k. Poněvadž ony roviny procházejí určitou přímkou P — polárou bodu p_{56} vzhledem k A_2^k —, jsou body l a a p_{56} poly téže přímky: první vzhledem ke křivce F_2^k, druhý pro křivku A_2^k. Z toho vychází poprvé na jevo, že přímka $lp_{56} \perp P$, a podruhé, že v kollineárnosti odst. 69. přímkám kp_{56} přidruženy jsou přímky $t^k l$ čili kl $(k = 1, 2, 3, 4)$

Body 1, 2, 3, 4, jakožto paty normál z bodu l ke křivce H_2^k sestrojených, jsou, jak známo, s tímto bodem na určité hyperbole $N_2^{(l)}$, obsahující i body α^i, které náležejí rovině α^k. Pro tuto hyperbolu jest dvojpoměr

$$(1, 2, 3, 4) = l\ (1, 2, 3\ 4)$$

a na základě oné souvislosti kollineárné

$$l\,(1, 2, 3\ 4 = p_{56}\,(1, 2, 3, 4),$$

z čehož následuje, že i bod p_{56} této hyperbole náleží. Tím jest dokázána tato vlastnost:

Sestrojíme-li z kteréhokoli bodu l některé hlavní roviny α^k plochy 2. řádu φ_2 k této ploše normály, jest hyperbola procházející bodem l a patami čtyř normál v rovině α^k ležících proťata přímkou spojující paty zbývajících dvou normál v bodu, který má vzhledem ku hlavní kuželosečce A_2^k plochy φ_2 v rovině α^k touž poláru jako body l ke příslušné fokální kuželosečce F_2^k.*)

71. Polárou bodu 1 pro křivku F_2 jest tečna Ft_1 křivky T_2 v bodě t^1; tato tečna musí procházeti polem p_1 přímky $1l$ vzhledem k téže křivce, kterýž pol jest dle odst. 70. na přímce P. Týž bod jest polem přímky $1p_{56}$ pro křivku A_2^k, jejíž pol vzhledem k F_2^k musí býti na poláře bodu 1, t. j. na přímce T^{t_1}. Z toho jde, že $T^{t_1} \perp 1p_{56}$, v čemž obsažen jest tento výsledek:

Oskulační rovina křivky křivosti plochy 2. stupně v bodě, v němž protíná některou hlavní rovinu této plochy, jest kolma na poláře tohoto bodu vzhledem k fokální kuželosečce v této rovině obsažené.

72. Přímka ik jest polárou bodu $T^{t^i} T^{t^k}$ pro křivku F_2, a přímky ip_{56} a kp_{56} jsou dle odst. 71. kolmo sdruženy k tečnám $T^{t^i} T^{t^k}$ vzhledem ke

*) Že bod p_{56} jest na této hyperbole, vyplývá i z toho, že poly všech paprsků komplexu, které obecným bodem l procházejí, jsou na křivce 3. řádu obepsané čtyřstěnu J. V našem zvláštním případě tato křivka rozdělí se v hyperbolu N_2^l a přímku 56, která tedy musí tuto hyperbolu protínati.

křivce F_2. Poněvadž všecky přímky kolmo sdružené k paprskům snovu vzhledem ke křivce 2. st., na př. F_2, obalují parabolu, která dotýká se obou os této křivky, jest z toho zřejmo, že trojúhelník $ik\,p_{56}$ jest této parabole obepsán. Označíme-li průsečíky přímek $1p_{56}$, $2p_{56}$ atd. s osami I a I', II a II' atd., bude poměr

$$(1\,II') = (2\,II\,II') = (3\,III\,III') = (4\,IV\,IV') \ .$$

K tečnám této paraboly náležejí i normály křivky F_2^k v bodech, v nichž ji protínají přímky ik, a budou tudíž vytčené právě poměry rovny i poměru úseků na těchto a tedy na všech normálách křivky F_2, kteréž úseky obsaženy jsou mezi patou normály a jejími průsečíky s osami křivky F_2 (čili osami křivky A_2). Z toho následuje:

Stopy (na rovině α^k) oskulačních rovin křivek křivosti plochy 2. st. v bodech k, v nichž pronikají některou hlavní rovinu α^k této plochy, jsou bodem k a oběma hlavními osami plochy v této rovině obsaženými děleny na úseky, jejichž poměr jest pro všecky tyto stopy stejný.

K normálám křivky F_2 náležejí i tečny křivky A_2^k v kruhových bodech y plochy φ_2. Vytčený poměr bude se tedy rovnati i poměru úseků na této tečně. Avšak týž roven jest poměru úseků, které tři hlavní roviny plochy φ_2 tvoří na kterékoli tečně plochy φ_2 v jejím bodě kruhovém.

73. Přihlédněme nyní ke zvláštnímu případu, v kterém bod l (65) jest na kuželosečce T_2 (67); budiž na př. totožný s bodem t^1. Potom splyne bod p_{56} s bodem 1 (70), z čehož jde, 1) že přímka 56 jest tečnou plochy φ_2, čímž potvrzuje se znova, že ty normály vedené z některého bodu křivky T_2 ke ploše φ_2, které nejsou v rovině α^k, jsou k této rovině nekonečně blízké (67), a 2) že přímka $1p_{46}$, — stopa oskulační roviny křivky křivosti v bodě 1 — jest tečnou hyperboly Apolloniovy N_2, příslušné k bodu t^1.

74. Bodem t^1 procházejí kromě normály $t^1 1$ ještě tři normály křivky A_2^k, jejichž paty označíme jako prve (65) 2, 3 a 4. Poněvadž $p_{56} \equiv 1$, jsou přímky 12, 13 a 14 stopami oskulačních rovin křivek křivosti v bodech 2, 3 a 4 a tudíž s přímkou $1p_{56} \equiv 11'$ (odst. 66) tečnami křivky O' (69). Vnucuje se tu otázka, k níž odpověděti pro další vyšetřování jest nutno, jakou křivku obalují přímky 23, 34 a 42, příslušné ke všem bodům t^x křivky T_2. Snadně poznáme, že každá trojina bodů 2, 3, 4 dokonale jest určena kterýmkoli z těchto bodů, na př. 3. Tomuto bodu přináleží normála křivky A_2^k procházející bodem t^3 křivky T_2, který jest v kollineárnosti odst. 69. s bodem 3 sdružen. Kromě bodu t^3 tato normála má s T_2 ještě jeden společný bod t^1, z něhož jsou možny kromě normály $t^3 3$ a normály procházející bodem 1, kollineárně sdruženým s t^1, jen ještě dvě normály, jejichž paty jsou 2 a 4. Z toho jde, že trojiny bodů 2, 3, 4 tvoří na A_2^k kubickou involuci a že tedy strany trojúhelníků jimi určených jsou tečnami jisté kuželosečky U_2.

Každým bodem některé hlavní kuželosečky A_2^k plochy 2. řádu φ_2 prochází kromě oskulační roviny křivky křivosti k tomuto bodu

příslušné ještě oskulační roviny tří křivek v bodech, v kterých protínají rovinu kuželosečky A_2^k. Tři přímky těmito body určené jsou pro všecky body 1,... křivky A_2^k tečnami téže kuželosečky U_2.

Každá z těchto trojin bodových (2, 3, 4) jest s bodem 1, k němuž přináleží, na stejnoramenné hyperbole obepsané základnímu trojúhelníku křivky A_2^k, kteráž hyperbola dotýká se v bodě 1 oskulační roviny křivky křivosti plochy φ_2 v tomto bodě (73).

Zvolíme-li místo kteréhokoli bodu t^1 křivky T_2 bod t^y, který jest přidružen ke kruhovému bodu y, bude ze tří normál kromě $y\,t^y$ tímto bodem procházejících jedna k této normále nekonečně blízka, poněvadž v bodě t^y evoluta O dotýká se křivky T_2 (68). Jeden z vrcholů trojúhelníku 234, na př. 2, splyne tedy s bodem y, a přímky $23 \equiv y3$, $24 \equiv y4$ budou tečnami i křivky O' i křivky U_2. Obě křivky budou tedy míti osm různých společných tečen, z čehož jde, že se vzájemně nedotýkají.

O obalové ploše rovin kuželoseček, k nimž náležejí normalie s trojnásobnou přímkou.

75. Budiž l libovolný bod a 1, 2....6 paty normál z něho ku ploše φ_2 vedených. Těchto 6 pat určuje 20 rovin σ, z nichž každá proniká φ_2 v kuželosečce (K_2), k níž příslušná normalie má trojnásobnou přímku (E). Všecky roviny σ ke všem bodům l prostoru příslušné obalují jistou plochu Σ_4, o níž dokážeme, že jest třídy čtvrté.

Budiž M kterýkoli paprsek osového komplexu a 1 a 2 jeho proniky s φ_2. Normály R^1 a R^2 plochy φ_2 v těchto bodech protínají se v jistém bodě l, z něhož jsou k ploše φ_2 možny ještě 4 normály. Paty těchto normál určují s přímkou $12 \equiv M$ jediné čtyři roviny σ, touto přímkou procházející, čímž pravdivosť našeho tvrzení o třídě pl. Σ_4 jest dokázána.

76. Je-li bod l obecným bodem plochy desmické, jsou dvě ze šesti vytčených pat k sobě nekonečně blízké, tak že každou ze šesti přímek vždy dvěma z ostatních čtyř pat určených jsou možny dvě nekonečně blízké tečné roviny σ plochy Σ_4, t. j. každá z těchto šesti přímek jest tečnou této plochy.

Je-li zvláště l bodem dvojné křivky plochy desmické, vyskytují se mezi oněmi šesti patami dvakráte dva body nekonečně blízké, z čehož jde, že přímka spojující zbývající dvě paty jest dvojnásobnou tečnou naší plochy.

Každému obecnému bodu plochy desmické jest tedy přidruženo šest tečen a každému bodu dvojné křivky plochy desmické jedna dvojnásobná tečna plochy Σ_4.

77. Budiž E trojnásobná přímka normalie příslušné ke kuželosečce K_2 v rovině σ a c a c' body, v nichž tato přímka dotýká se plochy desmické (59, 60). Táž přímka E jest trojnásobnou přímkou normalie, jejíž křivkou ří-

dicí jest ke K_2 doplňková kuželosečka K_2' plochy φ_2. Body společné křivkám K_2 a K_2' buďtež označeny u a u'. Bodem e prochází 6 normál plochy φ_2, z nichž tři mají paty své na K_2 a tři na K_2', a jeden bod z každé trojiny jest nekonečně blízký k bodu u. Z toho jde, že druhé dva body každé té trojiny určují tečnu plochy Σ_4, z nichž jedna jest obsažena v rovině σ.

Soudíce podobně pro bod e' a u' poznáme ještě jednu tečnu plochy Σ_4 v téže rovině. Pro každou z těchto tečen táž rovina σ zastupuje dvě splývající roviny tečné, z čehož následuje, že bod těmto tečnám společný jest bodem dotyčným roviny σ s plochou Σ_4.

Tyto tečny; jakožto paprsky osového komplexu, jsou tečnami komplexové paraboly R_2 v rovině σ, a sice jsou to dle odst. 43. tečny této paraboly protilehlé bodům u a u'. Tím jest dokázána věta:

Bod dotyčný každé roviny σ s plochou Σ_4 jest bodem společným tečnám komplexové paraboly v rovině σ, které jsou protilehlé bodům, v nichž kuželosečka K_2 proťata jest svou kuželosečkou doplňkovou.

78. Je-li přímka M obecnou přímkou roviny α^k, jest bod l a čtyři z bodů 1—6 v této rovině, z čehož vysvítá, že rovina α^k pro každou ze 6 přímek těmito body určených, počítajíc v ně i přímku M, zastupuje dvě splývající tečné roviny plochy Σ_4, t. j., každá z rovin α^k jest dvojnou rovinou tečnou plochy Σ_4.

Jestliže v tomto případě zvláště přímka M jest totožná s některou z přímek $k p_{56}$ $(k = 1, \ldots 4)$, protíná A_2^k kromě v bodě na př. 1 ještě v bodě $1'$ (66), a normály v těchto dvou bodech pronikají se v bodě t^1 křivky T_2. Bodem tímto procházejí kromě čtyř normál v rovině α^k obsažených ještě dvě normály, které nejsou sice v rovině α^k, ale jsou k normále křivky H_2^k v bodě $1'$ nekonečně blízké; paty jejich jsou na přímce $a^k 1'$. Z toho jde, že přímkou $11'$ jsou možny dvě splývající tečné roviny plochy Σ_4, které procházejí bodem a^k, čili že přímka tato jest tečnou naší plochy. Poněvadž křivkou obalovou přímek $11'$ jest křivka O', náleží tato ploše Σ_4.

Totéž potvrdí se, přihlédneme-li ku přímce M, která prochází některým z bodů a^k, stotožňujíc se na př. s přímkou 56. Stopy čtyř rovin σ touto přímkou procházejících jsou $1p_{56}$, $2p_{56}$, $3p_{56}$ a $4p_{56}$. Protíná-li přímka M křivku O' či je-li bod p_{56} na této křivce, jest bod l k němu kollineárně přidružený (69) na evolutě O, a z normál křivky A_2^k tímto bodem procházejících jsou dvě k sobě nekonečně blízké; z toho ale vychází na jevo, že přímka M jest v tomto v případě tečnou plochy Σ_4.

79. Poznali jsme, že každá z rovin α^k jest rovinou dvojnou plochy Σ_4, musí se tedy každá z nich dotýkati této plochy dle křivky 2. st. Dokážeme, že touto křivkou dotyku jest křivka U_2 (74).

Nechť přímka M sjednotí se s přímkou 23 v odst. 74., která jest tečnou křivky U_2. Potom bod l bude na křivce T_2 stotožně se s bodem t^1, a normály z něho ke ploše φ_2 vedené budou míti paty své v bodech 1, 2, 3, 4

a ve dvou bodech 5 a 6 nekonečně blízkých k bodu 1 a ležících s tímto bodem v oskulační rovině křivky křivosti v bodě 1; přímka $1\,1'$ jest stopou této roviny (73). Roviny σ, procházející přímkou 23, jsou v tomto případě splývající roviny 231, 234 a mimo to dvě k nim nekonečně blízké roviny 235 a 236. Z toho následuje, že přímka 23 jest tečnou plochy Σ_4 a že tedy křivka obalová U_2 těchto přímek ploše Σ_4 náleží.

Zároveň jest z předešlého vyšetřování zřejmo, že všecky čtyři tečné roviny plochy Σ_4 procházející některou z tečen křivky U_2 zastoupeny jsou rovinou α^k.

80. Jest zajímavo, že křivka U_2 má pro plochu Σ_4 touž povahu, jako křivka T_2 pro plochu desmickou (67).

K poznání této souhlasnosti povah obou křivek jest nutno určiti třídu plochy desmické. K tomu dostačí uvážiti, že plocha tato jest obalovou plochou hlavních rovin normálných plochy φ_2 a že tyto roviny jsou reciprokými rovinami polárnými paprsků komplexu plochy φ_2 se dotýkajících.

Budiž M kterýkoli paprsek komplexu a m jeho pol. Reciproké roviny polárné všech paprsků komplexu procházející bodem m obsahují přímku M. Paprsky tyto tvoří komplexovou plochu kuželovou, která jest 2. řádu, následkem čehož čtyři její přímky dotýkají se plochy φ_2. Jejich reciproké roviny polárné jsou jedinými čtyřmi hlavními rovinami normálnými plochy φ_2, které procházejí přímkou M, t. j. plocha desmická jest třídy čtvrté

Je-li nyní přímka M tečnou křivky T_2, na př. v bodě t', tedy $M \equiv T^{t'}$, jest její pol $m \equiv p_1$ (odst. 71.) a komplexová plocha kuželová o středu p_1 rozdělí se ve dva svazky 1. st., z nichž jeden jest v rovině α^k, druhý pak v rovině kolmé k poláře bodu p_1 pro fokální křivku F_2, t. j. v rovině $p_1\,1\,\alpha^k$ dotýkající se plochy φ_2 v bodě 1. Čtyři přímky této zvláštní plochy komplexové, dotýkající se plochy φ_2, jsou přímky $1p_1$, $1'p_1$ a dvě tečny z bodu p_1 k útvaru společnému rovině $1p_1\,\alpha^k$ a ploše φ_2, tedy přímky nekonečně blízké k přímce $1p_1$. Z toho vysvítá, že čtyři tečné roviny plochy desmické, procházející kteroukoli tečnou křivky T_2, zastoupeny jsou jedinou rovinou α^k. Tím souhlas mezi křivkami U_2 a T_2 vzhledem ke ploše Σ_4 a ploše desmické jest dokázán. Poněvadž křivka T_2 jest křivkou vratu plochy desmické,*) jest U_2 křivkou vratu plochy Σ_4.

Uvážíme-li dále, že i křivky O a O' pro obě plochy mají stejný význam, můžeme tvrditi, že útvary společné ploše Σ_4 a kterékoli hlavní rovině α^k plochy φ_2 jsou téhož druhu a mají pro plochu Σ_4 touž povahu jako proniky plochy desmické s touž rovinou.

81. Ukážeme, jak lze ustanoviti udavatele řádu plochy kuželové, která má za střed nějaký bod s plochy φ_2 a jest obepsána ploše Σ_4.

Ustanovíme, kolik jest paprsků komplexu osového mezi přímkami této plochy kuželové.

---

*) Srovnej s dříve uvedenou prací Clebschovou.

Normála R^s plochy φ_2 dotýká se plochy desmické ve dvou bodech a v osmi bodech x ji protíná (59). Z každého z těchto osmi bodů jest možno ještě 5 normál k ploše φ_2 a dva z nich jsou v každé této skupině nekonečně blízké k sobě, ale nikoliv k bodu 5. Paty tří zbývajících normál každé té skupiny určují s bodem s přímky, z nichž každá jest tečnou plochy Σ_4 (76) a zároveň paprskem osového komplexu. Osm bodů x poskytne tedy 24 paprsků komplexu procházejících bodem s a dotýkajících se plochy Σ_4.

Takové paprsky neposkytnou bodů plochy desmické, v nichž se jí normála R^s dotýká, neboť z pěti normál, které lze kromě R^s z každého toho bodu vésti k ploše φ_2, jest pata jedné nekonečně blízká k bodu s a ani přímka touto patou a bodem s určená, ani přímky bodem s a ostatními patami určené nejsou tečnami plochy Σ_4.

Naopak každý paprsek komplexu, procházející bodem s a dotýkající se plochy Σ_4, musí způsobem právě vytčeným souviseti s jedním z bodů x. Neboť proniká-li takový paprsek plochu φ_2 v bodech s a k a je-li x průsečík normál R^s a R^k, musí ze čtyř normál plochy φ_2 bodem x ještě procházejících dvě býti k sobě nekonečně blízké, aby přímka sk byla tečnou plochy Σ_4, t. j. bod x musí býti na ploše desmické. Tím dospěli jsme k výsledku: Libovolným bodem plochy φ_2 procházejí 24 paprsky osového komplexu, které se dotýkají plochy Σ_4.

Poněvadž tyto paprsky jsou na ploše 2. řádu, jest zřejmo, že plocha kuželová obepsaná ploše Σ_4 z libovolného bodu plochy φ_2 jest řádu 12.

82. Dodáváme ještě, že dle odst. 73. plocha Σ_4 dotýká se rovin tečných plochy φ_2 ve všech jejích bodech kruhových (reálných i imag.). Mimo to lze dokázati na př., že prochází čtyřmi imaginárnými přímkami každé soustavy plochy φ_2, které jsou paprsky komplexu a j. K důkazu této a jiných vlastností plochy Σ_4 bylo by nutno vyšetřovati plochu obecnější, která má pro tetraedrálný komplex podobný význam jako plocha Σ_4 pro komplex osový. Ježto tato vyšetřování jsou vlastnímu předmětu naší práce dosti vzdálena, ponecháváme je k jiné příležitosti.

Poznámka o plochách mimosměrek, určených projektivnými řadami dvou křivek 2. stupně.

83. Připomínáme nejprve, že týmž způsobem jako v odstavcích předcházejících bylo by lze vyšetřovati vlastnosti plochy tvořené paprsky osového komplexu, jejichž poly jsou na libovolné, ploše φ_2 nenáležející kužclosečce K_2. Na místo plochy kuželové τ_2 nastoupila by plocha kuželová, která jest polárným útvarem křivky K_2 pro plochu φ_2. Všecky dříve vyvinuté vlastnosti, pokud nesouvisí s podmínkou, že křivka K_2 náleží ploše φ_2, platí i o této ploše obecnější.

Buďtež nyní K_2 a K'_2 dvě kuželosečky v poloze obecné, jejichž body jsou k sobě projektivně přidruženy. Přímky určené body spolu sdruženými náležejí ploše 4. stupně, jejíž vlastnosti lze vyšetřovati týmž způsobem jako vlastnosti plochy ψ_4. Lze totiž vždy ustanoviti, a to nekonečně mnohými způsoby, dvě plochy φ_2 a φ'_2 řádu 2. tak, že spolu sdružené body křivek K_2 a K'_2 jsou poly téže roviny vzhledem k těmto plochám.

Tyto roviny obalují jistou plochu kuželovou τ_2, která nastupuje na místo plochy τ_2 v odst. 10.

Obě plochy φ_2 a φ'_2 takto určené určují řadu ploch 2. st., a každá přímka naší plochy mimosměrek obsahuje poly jedné tečné roviny plochy τ_2 pro všecky plochy této řady. Řada těchto ploch nastoupí na místo řady ploch konfokálných, a společný polárný čtyřstěn jejích ploch na místo základního čtyřstěnu Δ plochy φ_2. Úloha komplexu osového bude při těchto plochách přidělena komplexu tetraedrálnímu, který jest plochami φ_2 a φ'_2 stanoven.

Z toho jest zřejmo, že všecky projektivné vlastnosti plochy ψ_4 náležejí i těmto plochám obecnějším.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 39.

O BIOLOGII A MORFOLOGII

RODU MONESIS.

NAPSAL

J. VELENOVSKÝ.

S TABULKOU.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Klíčení a první rozvoj mladých rostlinek hruštic (*Pirolaceae*) jest posud neznámým, ačkoli poznání jeho mohlo by býti v mnohém ohledu zajímavým, neboť hruštice jsou humosní, aspoň z polovice saprofytické rostliny a semenem svým upomínají na zárazy, vstavače a jiné parasity neb saprofyty. Již po několik let činil jsem pokusy, abych vypátral poblíž kolonií hruštic (*Pirola secunda*, *minor, chlorantha*, *rotundifolia*) mladé roční rostlinky, neb individua právě vyklíčilá. Marné však bylo mé pátrání, vše, co jsem nalezl, byly již kolikaleté rostliny, pod zemí tenkými oddenky daleko rozlezlými mezi sebou vesměs spojené. Zdá se, že hruštice vůbec jsou odkázány na rozmnožování nepohlavní a že ze semene jen vzácně kdy nové individuum zrodí se k životu. Z té příčiny mnohé druhy hruštic sice houževnatě po léta vytrvávají na svých stanoviskách, ale sotva odtud do blízkého okolí se rozšiřují. Zvláštní v tom ohledu má život *Pirola secunda*, jejíž bílé, provázkovité oddenky rozlízají se v lesní prsti na mnoho metrů daleko, takže všechna individua, jež v lese kolem sebe vidíme, jsou spojena podzemními oddenky a z těchto jen vegetativně povstala.

V červenci tohoto roku podařilo se mně aspoň poněkud nahlédnouti v tajemný život jedné z nejúhlednějších hruštic, totiž jednokvítku (*Monesis grandiflora*). V lesích za Rožmitálem a u Čekanic nalezl jsem *Monesis* u velkém množství, a to nejen v kvetoucím, ale i sterilním stavu. Mezi sterilními individuy bylo mnoho přeútlých v prvním patrně věku. Opatrně odnesl jsem tyto i s prstí a doma co nejpečlivěji očišťoval prsť — čistý to humus ze zetlelých částí rostlinných — od kořínků a oddenků.

Poměry biologické podzemních, mnohonásobně rozvětvených, nitkám teninkým podobných podzemních kořínků jsou u *Monesis* nejvýš zajímavé. Na obr. 1. máme v přirozené velikosti mladou rostlinu i s celým podzemním kořáním. Celá podzemní kořenovitá část jest mnohonásobně rozvětvena, a sice tak, že sotva kde znáti začátek neb konec hlavních větví. Všechny, starší i nejtenčí slabounké větve jsou obaleny pavučinatým vlášením kořenovým, takže patrno, že všechny stejnou funkci kořenů saprofytických zastávají. Vlášení kořenové jest téměř srostlé s jehličím, větévkami, listím a jinými zetlelými částmi rostlinnými. Na žádné větévce popsaných právě kořenů není nikde ani stopy po šupinkách neb jakýchkoliv přeměněných, třeba i zakrsalých tvarech listových. Ano, ani tam, kde nad zem kolmo vyrůstají (obr. 1. *a*, *b*) listnaté

lodyžky, nesedí na basi těchto žádné šupinky. Dle toho máme před sebou mnohokráte větvený kořen a nikoliv oddenek hodnoty osní.

Pravý tedy kořen, z něhož pravidelně vyrůstají nadzemní osy s listy zelenými. Máme zde tudíž případ sice vzácný, ale nikoliv ojedinělý, kde osní části vznikají z kořenů. Na kořenech ovocných stromů, jak známo, vyrůstají mladé výstřelky, řídčeji stává se tak u bylin (*Rumex, Taraxacum*, *Anemone silvestris* a j.). Kořeny hnízdovky (*Neottia*) odhazují na konci čepičku kořenovou a vzrostou v pupen a kolmou lodyhu. To jsou ale vesměs pupeny a osy přídatné neb adventivní. Zde u *Monesis* jest povaha nadzemních os a poměr jejich ke kořenům poněkud jiný.

Že všechno to, co pod zemí u *Monesis* se nalézá, podobou i funkcí se kořenům rovná, není na první pohled žádné pochybnosti, ale jest otázka, kde jest vlastní oddenek, z něhož původně kořeny tyto byly vznikly, přece snad nemožno přijímati, že by ze semene vyrostly jen samé kořeny a na nich teprv zelené lodyžky. Či jsou snad silnější větve kořenů kořenovité oddenky a z těch snad nadzemní lodyžky vynikají? Že podzemní oddenky — a to oddenky nepopíratelné — podobou i funkcí kořenům se podobají, jest také známo. Oddenky přesliček (*Equisetum*) jsou pokryty huninou kořenovou, daleko se rozbíhající šlahouny bažanky (*Mercurialis perennis*) fungují rovněž jako kořeny, nesouce totéž vlášení jako vlastní kořeny. Podobně u rodu *Glycyrhiza*. Zde ale ve všech případech vyrůstají ze šupinatých oddenků také pravé kořeny. U naší něžné vstavačovité *Corallorhiza* a *Epipogon* jest však větvitý oddenek funkcí i podobou kořenem a při tom se vůbec pravé kořeny nevytvořují. Mezi jevnosnubnými a cevnatými tajnosnubnými nevytvořují rody *Salvinia, Wolffia* a *Utricularia* žádných pravých kořenů. U některých plavuňovitých (*Lycopodiaceae*) konečně vyvinují se podzemní oddenky v podobě kořenů a nadzemní v podobě listnatých lodyh.

Se všemi zde uvedenými příklady rostlin, které jeví zvláštní poměry biologické a morfologické mezi kořenem a osou, nedá se ale *Monesis* přesně v souhlas uvésti. Při bližším ohledání shledáváme, že všude tam, kde lodyžka (obr. 1. *a*, *b*) z kořene vyrůstá, těsně vedle ní vyrůstá také postranní kořen (obr. 1. *c*), který se obyčejně posléze rozdělí v množství teninkých kořínků. Úkaz tento jest obyčejným dosti, neboť často na oddencích vedle úžlabní větve současně pravý kořen vyrůstá. U ostatních hruštic vyrůstá tento kořen nad úžlabní větví oddenkovou.

Překvapujícím jest však, že na mnohých místech kořen tento u *Monesis* po jisté vzdálenosti opět vytvořuje nadzemní listnatou lodyhu s novým basalním kořenem (obr. 1. *c*, *b'*), a tak to jde někdy do více stupňů. Považovali-li bychom kořenovitou část (obr. 1. *c*) za přeměněný oddenek, pak nelze pochybovati, že větev *c'* jest pravým kořenem, který ale opět nese nadzemní osu *b'* jako hlavní větev *c*, od které se ničím neliší.

Mimo tuto okolnosť nemožno srovnávati »oddenky« *Monesis* s oddenky šupinonosnými ostatních hruštic ještě z následujících okolností: Kdežto u jiných hruštic nalézají se šupiny a v jich úžlabí sedící pupeny v pravidelných vzdálenostech podél celého oddenku — jakž to vždy na osách bývá — vy-

nikají zde u *Monesis* nadzemní osy sem a tam zcela nepravidelně z podzemních »oddenků«. Ano někdy se stává, že hned blízko osy kolmé a kořenem na basi opatřené (obr. 2. *a*) vyrůstá druhá kolmá osa (obr. 2. *b*) bez kořene basalního. Kdežto u jiných hruštic basalní kořen vyniká vždy nad úžlabním pupenem, vyniká u *Monesis* sice na téže větvi obyčejně také buď jen v pravo, buď jen v levo, ale také i v pravo i v levo, jakž na obr. 1. jest naznačeno. Ostatně mnohé kolmé osy *Monesis* nemají vůbec žádných basalních kořenů (obr. 3.), což u jiných hruštic nebývá. Tak vyskytají se i případy, kde vedle basalního kořene vyroste ještě druhý a třetí kolem base lodyžky, takže tato sedí na uzlu více kořenů (obr. 7.).

Postranní větve kořenů *Monesis* vyrůstají *endogenně. A kolmé osy listnaté vyrůstají z »oddenků« rovněž endogenně.* Na basi jich zcela zřetelně vidíme, jak obaleny jsou kolkolem pošvičkou vrchní vrstvy kořenové (obr. 2., 3., 4.).

Jedno dalo by se zde namítnouti: zdánlivá pošvička je snad rudimentem šupiny, která u jiných hruštic skutečně kolkolem basi úžlabní větve objímá. Může tak býti, toť nelze upírati, ale důkazu tu pro výklad ten posud není, a dle našeho náhledu držeti se tu třeba toho, co skutečně pozorujeme. Ona pošvička ostatně jest u *Monesis* pod kolmou lodyžkou docela stejná jako pod kořenem, který hned vedle vyniká. Pak, jak už řečeno, jsou kolmé lodyžky úplně nepravidelně a jen na vrchní straně na »oddencích« roztroušeny. *Nikde není pošviček bez kolmých lodyh;* u oddenků ostatních hruštic viděti lze ale šupiny, které brzo nesou, brzo nenesou v úžlabí postranní osu. Konečně i kdybychom hlavní větev *c* na obr. 1. považovali za pravý oddenek, který také nese rudimenty v podobě pošviček pod kolmou osou *a*, nemůže pak kořen *c'* nésti šupinu pošvičkovou pod osou *b'*, protože jest to skutečný kořen a nikoliv osa, která šupiny nésti může.

Dle uvedených posud okolností staví se nám »oddenky« *Monesis* do zvláštního světla. Funkcí biologickou jsou ovšem kořenem, ale tím, že osy listnaté rodí, jsou oddenkem pravým, oddenkem bez konce a začátku ve smyslu morfologickém. Bohužel, že neznámo jest klíčení přímo ze semene, ale vyklíčivší a vzrostlé těleso ze semene má podobu nepravidelně rozvětvených, nezelených, saprofyticky žijících vlakének. Takováto vlakénka nalézají se v prsti v okolí zelených rostlinek *Monesis* dosti často, jakž jsem se bedlivým vypíráním a rozbíráním humusu přesvědčil. Na obr. 5., 8 jest v přirozené velikosti podáno podobné vláknité individuum. Na jiných pak často jsem nalezl, že na některých větvích již vyrůstají kolmé lodyhy (obr. 6 *a*).

Na celém vláknitém »oddenku« skutečně nesnadno říci, kde by byl začátek a kde konec, nebo kde jest hlavní osa a kde vedlejší a postranní. Všechny větve se stejnoměrně rozdělují ve všech směrech a i nejsilnější z nich přecházejí v teninké vlákno. Z toho důvodu také nedají se »oddenky« *Monesis* s oddenky hruštic srovnávati.

Celé vláknité podzemní kořání rodu *Monesis* jest dle všeho první, mladé stadium rostliny. V ohledu morfologickém dá se do jisté míry srovnati s *prvoklíčky* (prothallium) cevnatých tajnosnubných. Saprofytické prvoklíčky plavuní a řádu *Ophioglossaceae* jsou životem totéž a kdyby v nich neodbýval se akt

pohlavní pomocí archegonií a antheridií, byly by i morfologicky totožné. U *Monesis* jest to *prvoklíček* nepohlavný, neboť pohlavní produkce odbývá se na generaci listnaté a květonosné.

Ano spíše s prothalliem lze prvotní stadium *Monesis* srovnávati než s oddenky vyšších rostlin. Oddenky ostřic, konvalinky a mnoha jiných rostlin jsou skutečně také podzemní generací, z níž rodí se nadzemní jinak vytvářené osy druhé, ale v ohledu morfologickém složeny jsou dle týchž zákonů jako osy listnaté, třeba i nadzemní. Sestavení šupinovitých listů, vznikání úžlabních větví, jich orientace, vznikání na jich povrchu kořenů — to vše podléhá týmž zákonům jako osy nadzemní. U *Monesis* jest ale první stadium »oddenkové«, jak jsme vylíčili, něčím, co v každém ohledu zákonům, dle kterých se kolmé listnaté lodyhy řídí, se vymyká. Jest to morfologicky zcela nový útvar rostlinný. I ta okolnosť, že kolmé osy zde vyrůstají endogenně jako postranní kořeny, jest ve vyšším rostlinstvu vzácným zjevem. S jistotou uvádí se endogenní vzrůst adventivních pupenů na kořenech *Aemone silvestris* a u řádu *Podostemaceae*.

Jen »oddenkovité« útvary řádu *Rafflesiaceae*, *Balanophoraceae* a *Orobancheae* poněkud se podobají »oddenkům« *Monesis*, a i zde známo, že kolmé kvetoucí lodyhy vynikají z vnitřní vrstvy na »oddenku« a tudíž také endogenně Podivuhodno jest, že vytvořování oddenkovitých prvoklíčků objevuje se vesměs u rostlin, které mají semena bez zřetelně rozčleněného klíčku a bílku. Semeno jeví se tu jako buněčná skupina, která klíčí tím, že se buňky pomnoží a utvoří tělisko z oddenkovitého prvoklíčku.

Rod *Monotropa* jest v tom ohledu s *Monesis* zvláště totožného vývinu, jen s tím rozdílem, že vede i v druhé generaci život saprofytický nemajíc chlorofyllu. Jak byl *Kamienski* ukázal, tvoří se hluboko pod zemí první stadium *Monotropy* v podobě nezeleného spletitého koření, jež žije samostatně (není úplně dokázáno, zdali parasiticky neb saprofyticky) a na němž endogenně vznikají pupeny kolmých šupinatých lodyh, které pak nad zem vynikají. Bezšupinné vláknivo kořenové u *Monotropy* jest tudíž totéž, co »oddenky« rodu *Monesis*. Také humosní a na chlorofyll velmi chudá *Pirola aphylla* Sm., v Kalifornii domácí, vyvinuje asi podobné prvoklíčkové stadium jako *Monesis* a *Monotropa*, bližší výzkumy nejsou však známy.

Pokusy umělými snad by se daly vypěstiti ze semen *Monesis* první stadia klíčků oddenkových a tím by vlastně nejpříměji uveden byl důkaz, že podzemní »oddenky« *Monesis* nejsou kořeny, na nichž vyrůstají kolmé nadzemní lodyhy *adventivním* způsobem, jak se to všude v knihách uvádí.

Pozoruhodno jest, že v přemnohých případech, kde morfologové nemohou vznikání pupenů uvésti na obvyklou formu známých zákonů, vřadí je jednoduše do kategorie adventivních pupenů. Na nesprávnosť tohoto počínání upozornil jsem již ve svém pojednání o rhizomech kapradin a zde u rodu *Monesis* opět nutno pojem adventivních pupenů ostře vymeziti.

Kdyby zde u rodu *Monesis* byl pravý oddenek, z něhož by vyrůstaly kořeny a na těchto tvořily se pupeny a osy nadzemní — pak ovšem upříti nelze, že tu máme nahodilé adventivní pupeny kořenové. Věc jest zde ale jinaká. Zde vůbec oddenku žádného není, zde hned mladá rostlina vyrůstá na

»kořenu«. S těžkostí tu skutečně užívati možno názvu »kořene«, neboť divem by bylo v rostlinstvu, aby mladé stadium rostliny se skládalo, vůbec jen z kořene (obr. 5., 6.). Zde jest to nový pojem morfologický ani s kořeny, ani s oddenkem, ani s prvoklíčkem totožný. Nazývejmež tento nový útvar morfologický *procaulomem*. A do tohoto nového pojmu zařaděny by dobře mohly býti první zplodiny ze semen řádu *Orobancheae, Orchideae, Rafflesiaceae, Balanophoraceae, Pirolaceae, Monotropeae* a snad i některé jiné.

Přesně vzato, jest každé semeno bezděložné, které embryo neobsahuje, již procaulomem, neboť jest vlastně jen homogenní, nerozčleněnou skupinou buněk, která klíčením vzbudivši se k životu ještě dále se pomnožuje a na různém stupni v útvary stélkové vzrůstá a pak teprv ze sebe vlastní zárodek vytvořuje. Z tohoto zárodku vyvine se skutečně pupen jako skutečná budoucí rostlina. Účinky pohlavního zúrodnění ve květu mateřské rostliny provádějí se v normalních případech v jednom, až utvoří se dokonalý zárodek s dělohami, osou a kořenem. Zde u bezděložných rozděluje se účinek zúrodnění na dvě období: na založení embryonálního těliska buněčného (zárodečného procaulomu a na založení vlastního embrya z procaulomu po delší době odpočinku.

S prvoklíčkem (prothallium) tajnosnubných cevnatých nedá se dobře procaulom srovnávati, neboť prvoklíček jest generace s ústrojím pohlavním, kdežto procaulom jest již pohlavně vzniklá generace bez pohlaví. Nejlepší ještě analogii má procaulom v protonematu mechů. U mechů jest také protonema řasám podobným, předběžným, nepohlavným útvarem, na němž teprv vlastní rostlina se vyvinuje.

Vykládají-li nám morfologové vznikání kolmých lodyh rodu *Monesis* za vývin adventivních pupenů či os, pak nechť nám zodpovědí následující otázky:

1. Z čeho první kořen vznikl, jenž vytvořil ovšem další větve kořenů pupeny adventivní nesoucí?

2. Kde jsou osy neb oddenky neb kolmé lodyžky, jež by adventivně byly nepovstaly?

3. Co jsou útvary kořenové na obr. 5., 6., 8. naznačené?

K první a druhé otázce mohlo by se odpověděti, že není klíčení semen *Monesis* známo a že bezpochyby zde rodí se něco, z čeho kořeny první se tvoří. K tomu ale odpověděti neváháme, že zde vůbec není žádné rostlinky listonosné, která by adventivně nebyla vznikla, dále celá sebe rozvětvenější kolonie *Monesis* vyniká z »kořenového« vlákniva. Musilo tudíž nutně ze semene vzniknouti něco, co ani oddenkem ani zelenou lodyhou není, a jest nejvýš tudíž pravděpodobno, že tato zplodina klíční jest kořenové vláknivo, jak nám je obr. 5., 6., 8. podává.

Zprvu jsme se zmínili, že také některé byliny vyvinují z kořenů šupinaté pravé lodyhy neb oddenky. Měl jsem sám příležitosť kořenové oddenky neb adventivní osy v tom ohledu u bylin obecných: *Potentilla anserina*, *Linaria vulgaris* a *Rumex Acetosella* ohledati. *Potentilla anserina* tvoří podzemní dlouhé tlusté kořeny, které někdy bývají na konci hlízovitě v podobě kyje nebo koule ztlustlé. A na těchto vynikají endogenně jednotlivě neb v skupinách malé pupence, které mohou přímo v novou rostlinu vyrůsti. Tento případ

nedá se tudíž vlastně ani s rodem *Moncsis* srovnávati, neboť máme zde v normálním stavu rostlinu listnat ou anadzemní šlahouny ženoucí, která *někdy* na kořenu vytvoří adventivní pupen. Zde jest tedy nejvýš patrno, co jest lodyhou, šlahounem a kořenem, a zcela patrno, že kořenové pupeny jsou jen nahodilé, adventivní a z pravých kořenů povstalé.

Poněkud jinak má se to u druhu *Linaria vulgaris*, s nímž úplně se v tom ohledu shoduje *Rumex Acetosella*. Bylina tato tvoří podzemní dlouhé, daleko plazivé kořeny (obr. 9.), na nichž v řadách neb jednotlivě vyrůstají kolmé, dole šupinky nesoucí listnaté a kvetoucí lodyhy. Na basi zcela zřejmě vidíme obalnou pošvičku — vznikajíť endogenně z vnitřní vrstvy pletiva kořenového. Tyto kořeny jeví se nám v každém ohledu jako pravé kořeny; mají vlášení kořenové, čepičky kořenové a rozvětvují se postupně až v nejjemnější ženounké kořínky. Často se i stává, že sám konec větevky kořenové přemění se v pupen a vyroste v kolmou lodyhu. Srovnáme-li případ tento s rodem *Moncsis*, shledáme, že i u *Linaric* jako u *Monesis* endogenně na dlouhých, jako oddenkové šlahouny plazivých kořenech pupeny a lodyhy se tvoří, a že hlavně tímto způsobem rozmnožování individuelní se děje. U *Linaric* zřejmě vidíme, že tu jsou pravé kořeny, a chtěli-li bychom v souhlas uvésti i rod *Moncsis*, nutno by bylo přijmouti, že i u *Monesis* jsou pravé kořeny s adventivnými pupeny.

Avšak rozdíl pupenonosných kořenů *Linaric* a *Monesis* jest přec jen veliký. U *Linaric* přecházejí lodyhy z vyklíčení povstalé v kořen pozvolna, takže (obr. 10.) část *a—b* jest skutečně podzemním oddenkem neb osou, která má své šupiny a úžlabní pupeny a která nemá vlášení kořenového, a část *b—c*, která má vlášení kořenové, nemá šupinek a jest prvým kořenem hlavním. Ale již na tomto kořenu vznikají endogenně pupeny jako na ose *b*. Zde tedy přechází lodyha v kořen, který převzal funkci podzemních oddenků. Jest to zvláštnosť biologická, která ale morfologický význam kořene nijak nezatemňuje. Jinde u bylin opačně přejímají pravé oddenky funkci kořenovou oděny jsouce vlášením kořenovým, jak už vzpomenuto u *Mercurialis perennis, Equisetum arvense* a j.

»Kořeny« rodu *Monesis* jsou ale daleko od kořenů *Linarie* rozdílny. Zde nikde nevidíme, že by pravá osa třeba v podobě oddenku šupinatého přecházela v kořen. »Kořen« tu jest ostře oddělen od osy kolmé. Zde nikde není mladé rostlinky, jež by vůbec pravý hlavní kořen tvořila. *Nikde není kolmé šupinaté a listnaté lodyhy, z níž by kořeny vznikaly.* Lodyhy tu vesměs vznikají na kořenech. U příbuzných druhů rodu *Pirola* skutečně máme pravé šupinaté oddenky plazivé, na nichž pravé postranní kořeny vyrůstají. *Toho ale u rodu Monesis nikde není. Irmisch*, výtečný a samostatně myslící morfolog, již roku 1855 (Flora) rod *Pirola* i *Monesis* ohledával a »oddenky« rodu *Moncsis* za podivuhodné a od ostatních hruštic rozdílné nazval. Přec ale je jen za kořeny s adventivními pupeny prohlásil. On s důrazem podotýká, že pravá lodyžka *Monesis* nemá nikdy vedlejší kořeny a nikdy postranní šupinové pupeny, kterými by mohla perennovati, že tudíž životem svým jen na kořeny, z nichž vznikla, jest vázána. Lituje rovněž, že mu ani klíčení, ani mladé roční

rostlinky *Monesis* nejsou známy. Vysoce zajímavou okolnosť ale uvádí u *Pirola secunda,* kde skutečně nalezl pravou roční rostlinku ve spojení s kořenem. Kreslí však a vytýká, že rostlinka na basi ostře odstavcem se od kořene odděluje. Toť zajisté podezřelé a mohlo by výklad nalézti i v tom, že na vyklíčivším »kořenu« i tato první roční rostlinka co druhá generace exogenně neb endogenně vznikla. Také u *Pirola secunda*, tvrdí *Irmisch*, přicházejí na kořenech adventivní pupeny endogenní, ale sám poznamenává, že nikdy tyto kořeny ve spojení s oddenkem nenalezl! To vykládá si ale tím, že je náhodou při vykopávání utrhl! Snad neutrhl, ale měl týž tvar, jaký jest u rodu *Monesis*.

Snad i ostatní hruštice v mladém věku žijí jako *Monesis* a teprv později pravými šlahouny oddenkovými se rozmnožují.

Zajisté biologické a morfologické poměry těch rostlin jsou vysoce zajímavé a výklad náš o jich významu snad jednou potvrdí pozorovatel, kterému se podaří hruštice přímo ze semen vypěstiti.

Výklad k vyobrazením.

Obr. 1. Mladé dvě rostlinky nekvetoucí *Monesis grandiflora* v přir. vel. z podzemních rozvětvených kořenů vyrůstající; *c* pobočni kořeny vedle base lodyžek vyrůstající; *c'* pobočni kořen, jenž opět nese mladinkou lodyžku *b'*; *m* rovněž velmi mladá lodyžka.

Obr. 2. Zvětšená část kořene, z něhož vynikají dvě lodyžky *a*, *b* těsně vedle sebe, z kterých ale jen lodyžka *a* má basalní kořen pobočni.

Obr. 3. Případ, kde kolmá lodyžka osamocena nemá basalního kořene.

Obr. 4. Zvětšená část kořene s lodyžkou a s basalním kořenem; objímavá basalní pošvička kořenová kolem lodyžky zvlášť provedena.

Obr. 5. Podzemní rozvětvený kořen v mladém stadiu, posud bez kolmých lodyžek. Přir. vel.

Obr. 6. Podobný kořen, ale s vyrůstajícími mladými lodyžkami *a*. Přir. vel.

Obr. 7. Lodyžka s dvěma kořeny basalními pobočnými.

Obr. 8. Mladé stadium kořene, posud bez lodyh kolmých.

Obr. 9. Část plazivého rozvětveného kořene *Linaria vulgaris*, z něhož vyrůstají endogenně kolmé lodyhy a jehož pobočni *b*, *c* opět lodyžky tvoří. Přir. vel.

Obr. 10. Týž druh rostliny, jejíž lodyha od *a* až do *b* přechází v šupinatý oddenek, který ale dále pokračuje do *c* v pravý kořen, z něhož podobně kolmé lodyžky nadzemní adventivně vyrůstají.

Über die Biologie und Morphologie der Gattung Monesis.

Resumé des böhmischen Textes.

Seit dem Jahre 1855, in welchem *Irmisch* über die Bedeutung der unterirdischen stengeltragenden Wurzeln der *Monesis grandiflora* einen Bericht veröffentlichte, hat niemand diese morphologisch interessanten Wurzeln untersucht und in den Handbüchern und verschiedenen Floren heisst es einfach, dass sich die *Monesis* durch adventive Wurzelknospen fortpflanzt. Diese stengeltragenden Wurzeln dürften vielmehr mit einem neuen selbständigen Terminus bezeichnet werden, weil sie weder mit der echten Wurzel, noch mit dem Prothallium oder dem Wurzelstocke vollständig im Einklage stehen. Sie sind weitkriechend und reich verzweigt, von stärkeren Ästen in die dünneren allmälig übergehend, überall mit Wurzelfilze bedeckt. Unregelmässig auf den Wurzelästen befinden sich endogene senkrechte Stengel, welche in den meisten Fällen eine basale Seitenwurzel tragen. Dem Wurzelstocke anderer Pirolen können sie nicht entsprechen, weil sie keine Blattgebilden besitzen und weil die basalen Nebenwurzeln wieder Stengel tragen. Mit dem Begriffe einer echten Wurzel fallen sie aber auch nicht zusammen, weil sie aus einem Wurzelstocke oder aus irgend einem Achsentheile nicht hervorgehen, sondern als selbständiges Gebilde daleben. Ein blatttragender Stengel von *Monesis* mit einer Seitenwurzel oder mit einer Hauptwurzel ist bis heute unbekannt, war auch *Irmisch* unbekannt und wird auch von niemanden gefunden werden, weil er überhaupt nicht existirt. Alle tausende Individuen, welche ich untersuchte, entsprangen sämmtlich nur endogenerweise aus der kriechenden Wurzel. Sehr häufig kommen auch unterirdische Wurzeln vor, welche als selbständiges Gebilde ohne Anfang und ohne Ende saprophytisch leben und noch keine adventive Knospen tragen. Die ganze Kolonie der im Walde beisammen wachsenden *Monesis* sitzt auf dem unterirdischen Wurzelsysteme. Die Keimung der in Nährstoff und Embryo nicht ausgegliederten Samen ist leider nicht bekannt. Nur diese kann aber die Bedeutung der besprochenen Wurzeln in directer Weise enträthseln. Es ist höchst wahrscheinlich, dass sich aus dem Samen das prothalliumartige Wurzelsystem entwickelt, welches als erste Generation die zweite blatttragende und blühende Generation gebärt.

Irmisch beschreibt eingehend auch junge, einjährige Pflanzen von *Pirola secunda* und hebt ganz besonders hervor, dass der blatttragende Stengel von

der Hauptwurzel gliederartig abgetheilt ist. Weiter fügt er hinzu, dass er auch Individuen gefunden hat, welche endogenerweise aus einer Wurzel hervorgehen, glaubt aber, diese Wurzeln wären von dem Wurzelstocke abgerissen, weil er sie niemals in Verbindung mit den letzteren angetroffen hat. Dies alles ist auffallend ähnlich den Wurzeln der *Monesis*, denn die knospentragenden Wurzeln der *Pirola secunda* waren wohl nicht abgerissen, sondern selbständig aus dem Samen hervorgegangen, und der Stengel ist gliederartig von der Wurzel abgetheilt, weil er wahrscheinlich auf dieser als zweite Generation entstanden war.

Die »Wurzeln« der *Monesis* sind demnach identisch mit dem prothalliumartigen unterirdischen Körper der *Monotropa* und könnten in dieselbe morphologische Kategorie wie die ähnlichen Gebilden bei den Balanophoren und Orobanchen gestellt werden.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. Zwei junge, sterile Pflanzen der *Monesis grandiflora*, welche aus der unterirdischen, verzweigten Wurzel hervorgehen; *c* seitliche Nebenwurzeln, welche regelmässig neben der Stengelbasis entspringen; *c'* eine junge seitliche Wurzel, welche wieder eine junge senkrechte Pflanze entwickelt; *m* ein ebenfalls sehr junger blatttragender Stengel.

Fig. 2. Ein vergrösserter Wurzeltheil, aus welchem zwei Stengel *a*, *b* dicht nebeneinander hervorgehen, von denen der Stengel *a* eine Seitenwurzel trägt.

Fig. 3. Ein Fall, wo der senkrechte, einzeln stehende Stengel an der Basis keine Seitenwurzel besitzt.

Fig. 4. Vergrösserter Wurzeltheil mit einem Stengel und einer Basalwurzel; die basale Wurzelscheide ist hier treu ausgeführt.

Fig. 5. Unterirdische, verzweigte Wurzel in jungem Stadium, bisher ohne senkrechte Stengel.

Fig. 6. Eine ähnliche Wurzel, aber mit emporwachsenden jungen Stengeln.

Fig. 7. Ein Stengel mit zwei Basalwurzeln.

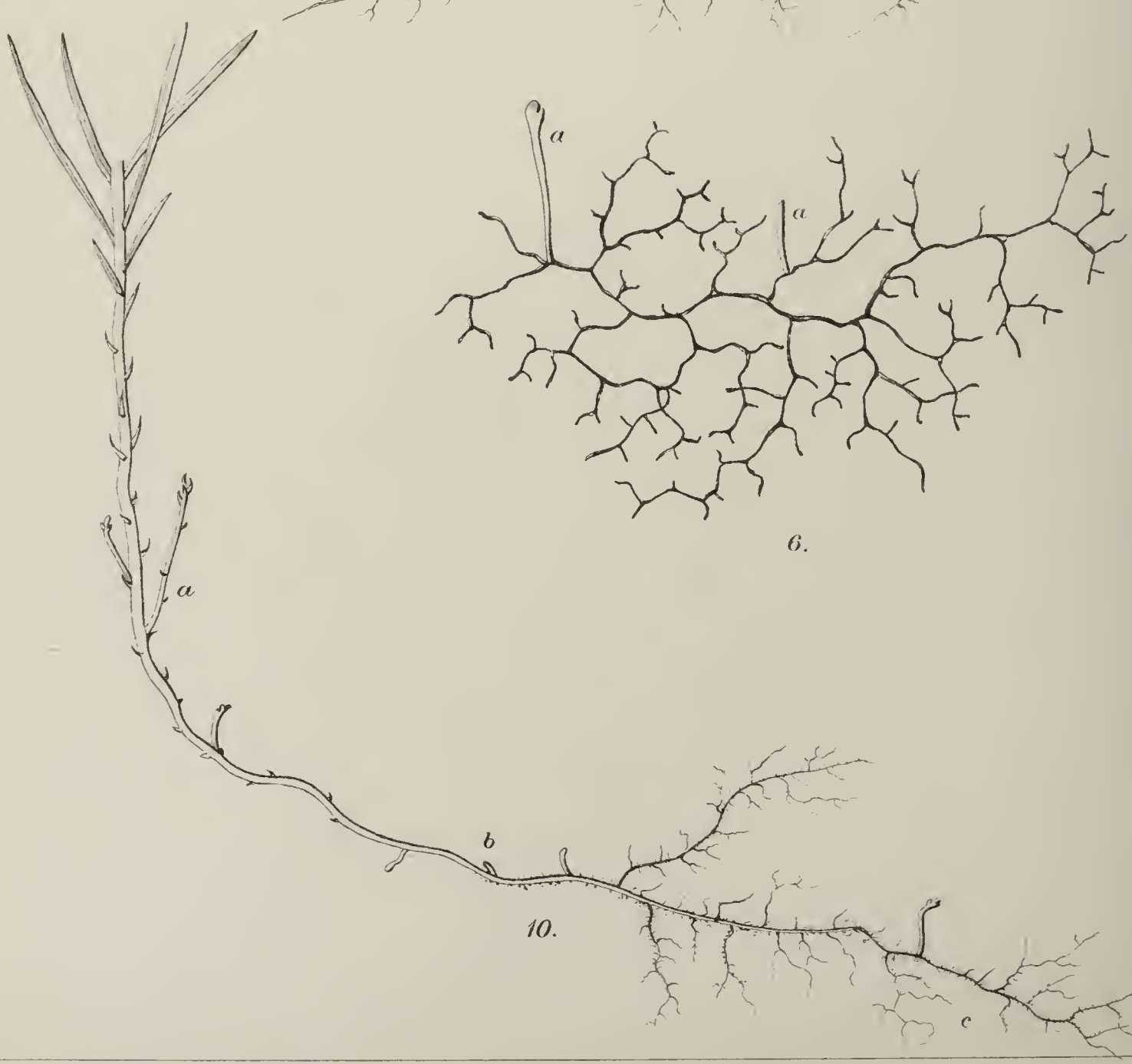
Fig. 8. Ein sehr junges Wurzelstadium ohne senkrechte Stengel.

Fig. 9. Ein kriechender Wurzeltheil von *Linaria vulgaris*, aus welchem senkrechte Stengel hervorgehen und seitliche Wurzelzweige wieder adventive Stengel tragen.

Fig. 10. Dieselbe Pflanzenart, bei welcher der junge Stengel von *a* bis zu *b* in einen schuppentragenden Wurzelstock übergeht, dieser aber bis zu *c* in eine echte Wurzel fortsetzt; die Wurzel trägt aber ebenfalls wie der Wurzelstock einen jungen senkrechten Stengel.

8.

9.

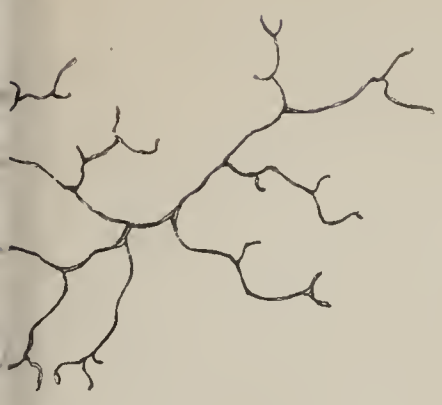


6.

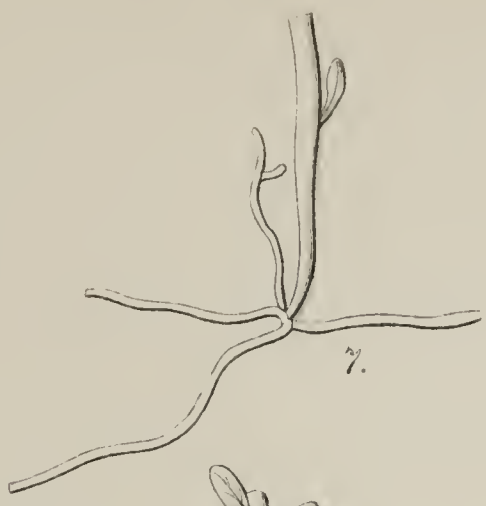
10.

J. Velenovsky del.

Rozpravy české Ak

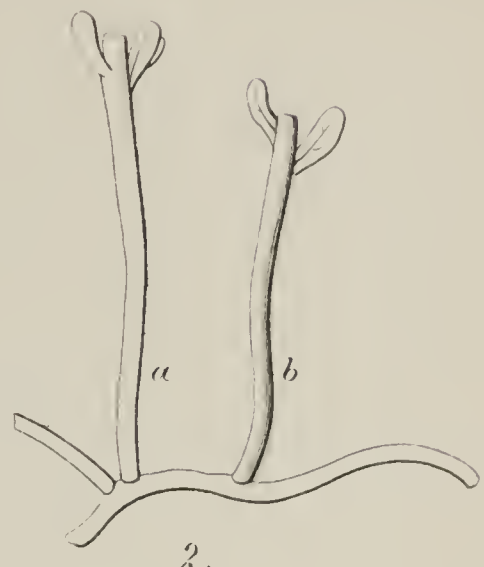


5.



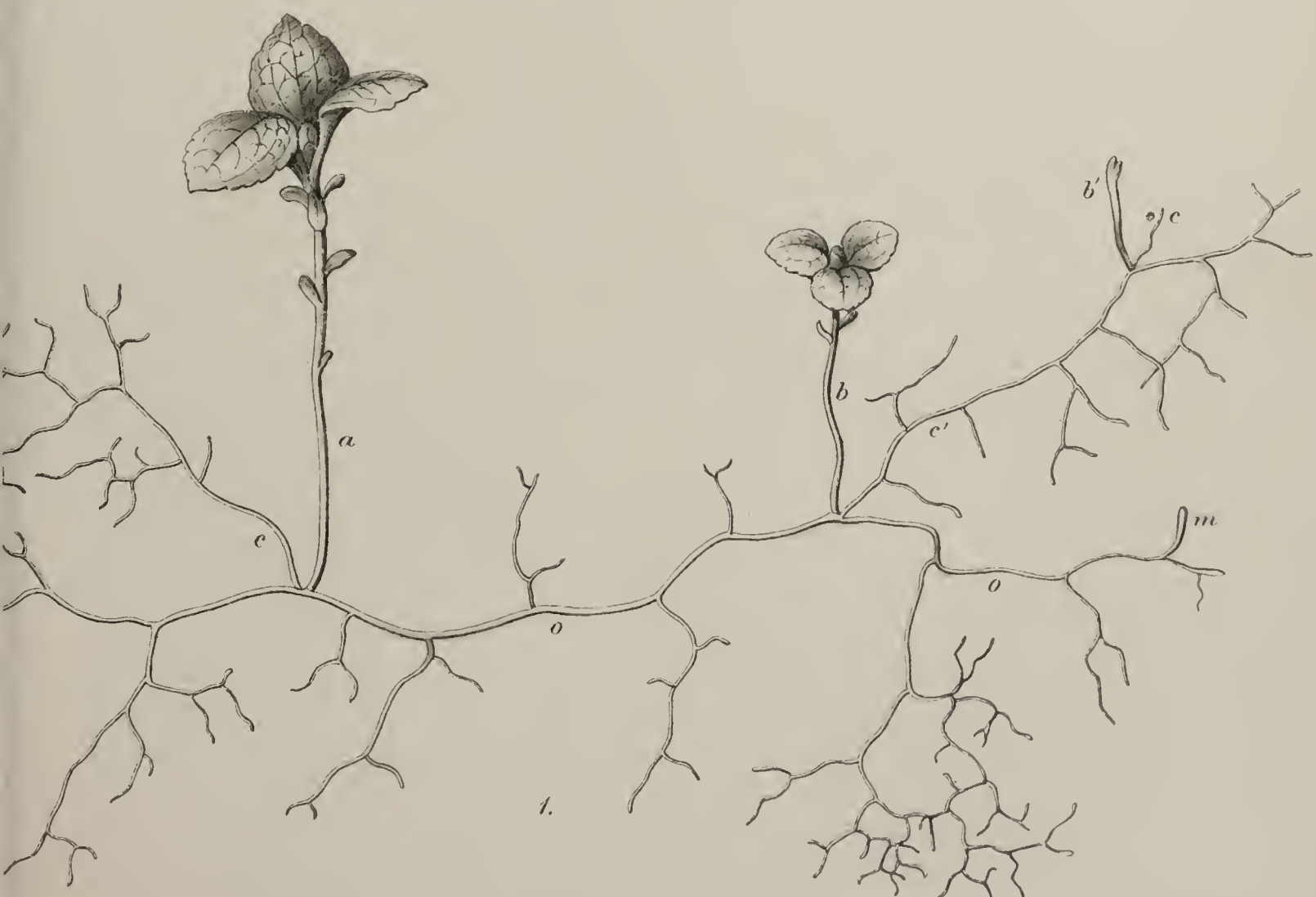
7.

4.



2.

3.



Lith. F. ... k, v Praze

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 40.

O MORFOLOGII
OS CEVNATÝCH TAJNOSNUBNÝCH.

NAPSAL
J. VELENOVSKÝ.

S DVĚMA TABULKAMI.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Zprávy o rozvětvování rhizomů a lodyh cevnatých tajnosnubných, o poměru jejich větví pobočních k osám mateřským a k nejbližším listům, výklady o tak zvaných adventivných pupenech jsou ve spisech a knihách různých autorů tak rozmanité, nestejné a z velikého dílu si odporující, že již od delší doby bylo mým přáním, co možno vlastním názorem o tomto zajímavém thematu se poučiti a soustavný přehled si utvořiti. Roku 1890 uveřejnil jsem již v tom smyslu pojednání »O morfologii rhizomů kapradin« ve zprávách král. české společnosti nauk a studia svá v následujících letech rozšířil jsem nejen na jiné kapradiny, ale i na všechny cevnaté tajnosnubné, které mně byly v živém stavu přístupny. Bohužel, že většina těchto jest domovem v teplích zemích, takže morfologická studia hlavně jen na sklenníkový materiál v tom ohledu nutno omezovati. Výsledky badání těchto dovoluji si v následujícím sestaviti.

U rostlin jevnosnubných vůbec děje se rozvětvování os dle stálých přísných zákonů, poměr pobočni osy k mateřské a k mateřskému listu jest co nejurčitěji vyznačen. Pupeny pak a prýty adventivné rozeznáváme tu lehce v každém případě od prýtů normálných či zakonných. Cevnaté tajnosnubné tvoří přechod od nižších tajnosnubných, jmenovitě mechů, ku jevnosnubným. Praví se, že cevnaté tajnosnubné mají již jako jevnosnubné rozlišeno tělo své v pravé kořeny, pravou lodyhu či kmen neb osu a v pravé listy. A anatomické složení mnohých, zvláště vyhynulých typů dokonalostí svou na roveň dochází s nejdokonalejšími jevnosnubnými. Z těchto tudíž okolností dalo by se skoro souditi, že i pomnožování os cevnatých tajnosnubných podobné neb stejné bude jako u jevnosnubných. Škoda jen, že nám během věků právě z řady nejdokonaleji vyvinutých cevnatých tajnosnubných a na druhé straně z řady nejníže organisovaných nahosemenných během věků tolik členů vypadalo, že srovnávací studia o souvislosti těchto typů v každém ohledu s mnohými nesnázemi musí se potkávati.

Rozvětvování kapradin i jiných cevnatých tajnosnubných děje se dle autorů brzo monopodialně, brzo dichotomicky. U mnohého druhu praví jedni, že dělí se monopodialně, druzí dichotomicky. Takové nesrovnalosti v udávání autorů nalézáme ku př. zhusta v rodech *Lycopodium* a *Selaginella*. Protože většina autorů klade velikou váhu na vývin anatomický, nesnadno pak správně vyměřiti pojem pravé dichotomie. Celkem měla by se rozuměti pravá dichotomie jen v tom případě, kde na vzrostném vrcholu rozdělením buď jediné buňky

neb skupiny buněk utvoří se z bývalého jednoho vegetačního vrcholu dva nové vegetační vrcholy, z nichž pak vyrostou dvě nové, vidlicovité, v každém ohledu stejné větve. Anatomické hospodářství vegetačního vrcholu jest však jistě jen podřízeného významu pro odhadování významu nově stvořených větví. Vždyť v nejbližším příbuzenstvu objevuje se vzrůst brzo jedinou buňkou, brzo celou skupinou, ano stává se tak mnohdy v témže rodu a druhu *(Selaginella)*.

Zvlášť pak dobře třeba míti na paměti, že nejprvnější vznik postranních větví nedá se vlastně někdy ani dokázati. Máme-li ku př. na hlavní prodloužené lodyze nějaké *Selaginelly* neb *Lycopodia* slabší a kratší větve postranní, upřel by každý v tom případě dichotomii, zvláště tehdy, jestliže ony postranní větve vznikly, vlastně řečeno, objevily se prvotně co hrboule daleko pod vrcholem hlavní osy. I v tomto případě může býti skryta pravá dichotomie, totiž může býti skryt tentýž princip dělení osy, jako tam, kde i v dospělých větvích a v jich vývinu dichotomii uznáváme. Můžeme totiž právem říci, že buď se vegetační vrchol rozdělil ve dva, ale jeden z nich v nečinnosti setrval a následkem toho ocitl se pod či na straně druhé rozdělené polovice a teprv později co postranní hrbol a větev oku stal se patrným, buď říci můžeme, že i tam není valného rozdílu od pravé dichotomie, kde nové vegetační body vznikají buď vedle, buď něco níže od vegetačního bodu druhého.

Z neurčitosti, jaká nám vzniká při odhadování pravé či nepravé dichotomie, béřeme-li za měřítko činnost vegetačního vrcholu, plyne nám spíše poučení, *abychom dichotomii posuzovali pouze dle organů hotových.* Dle toho jest lodyha dichotomicky rozdělena všude tam, kde máme dvě vidlicovité větve stejně se chovající, ať již vznikla jedna z nich níže vegetačního vrcholu a třeba i později po straně hlavní osy. Později uvidíme, že skutečně u cevnatých tajnosnubných pojem dichotomie jen v tomto smyslu dá se vyznačiti. Co příklad, jak nesnadno pojem dichotomie v této skupině rostlin vystihnouti, jmenuji jen obecnou plavuň, *Lycopodium clavatum.* Zde skutečně na prodloužené hlavní ose sedí postranní větve co ústroje pobočné, monopodialně vzniklé. Autorové praví všeobecně o této rostlině, že rozvětvuje se monopodialně. Prohlédneme-li si však rostlinu tuto, shledáme, že ovšem vedlejší větve sedí na hlavní ose monopodialně, ale na těchto pobočních větvích jeví se nám všechny přechody z monopodia do pravé dichotomie. A dělené plodní klasy jsou v stavu dospělém i v zárodku vzornou dichotomií! Jest skoro nepochopitelné, že tato okolnost byla od autorů nepovšimnuta. Tolik zatím jako ukázka o nesprávnosti v pojímání dichotomie u naší skupiny rostlin, na příkladech lépe ještě bude vše objasněno.

Druhá a ještě více popletenější udání nacházíme u autorů týkající se poměru nově vzniklých větví k nejbližším listům. Jedni tvrdí, že děje se dělení os cevnatých tajnosnubných zcela bez ohledu na list mateřský, druzí snaží se všude i v nejtěžších případech převésti cevnaté tajnosnubné na vzor jevnosnubných. Mají totiž větve vznikati v úžlabí listů a k těmto být zákonitě orientovány. Nikde ale není toto úžlabní vznikání patrné a proto, aby se vyložilo, nutno přijímati rozličná pošinutí z úžlabí, jakž jsem ve výše vzpome-

nutém pojednání již dostatečně pověděl. Takové vykládání dospěje mnohdy tak daleko, že má ku př. *Cystopteris montana* dva úžlabní pupeny, jeden na anodické, druhý na katodické straně úžlabí — případ to, který ovšem nikde, ani u jevnosnubných znám není. I tyto nucené výklady všechny jsou neupotřebitelné, vezmeme-li za základ principy, jež později v rozpravě této vytkneme.

Třetí obtíž při vykládání větví či os u cevnatých tajnosnubných jsou tak zvané adventivní pupeny. Již u *Pteris aquilina* a *Struthiopteris* jsem dokázal, že to, co se všude považovalo za adventivní pupeny, jsou zcela normalně dělené rhizomy těchto kapradin. Ano u jmenované *Pteris* nezvratně dokázáno, že nikoliv adventivní pupeny na řapíku listu, ale řapík listu na pobočné větvi se tvoří. Omyl ten vznikl jen tím, že pozorovatelé hleděli jen na jednotlivé listy spojené na basi s pupenem a nikoliv na celý system rozvětveného rhizomu. Sledujeme-li případy, které co *adventivní pupeny na osách* u autorů se udávají, zdá se, že všude tam, kde pobočná osa vzhledem k mateřské jest příliš slabá a orientace její k nejbližším listům není patrná, taková větev neb pupen prohlašuje se za adventivní. Toto měřítko jest ale velmi nespolehlivé a u největšího počtu případů nedá se provésti.

Jsou ovšem u cevnatých tajnosnubných adventivní pupeny velmi rozšířeny, ale tyto jsou vždy patrny a s normálními pupeny nepomísitelny. Neboť objevují se na nepravidelných místech, neurčitě, nestále. Jsouť individua téhož druhu, která jich nemají. Jsou to tudíž pupeny nahodilé, právě tak jako u jevnosnubných. Tak přiznati musíme pravost pravých adventivných pupenů na řapících *Aspidium Filix mas*, na listech druhů *Asplenium, Polypodium, Cystopteris,* na kořenujících listech *Woodwardia radicans*, na kořenech oddenkových rodu *Ophioglossum* a p.

Rozhlédněme se nyní po všech řádech cevnatých tajnosnubných, abychom si utvořili soustavný názor, jak ve skutečnosti dělení os jejich se děje, zdali výklady autorů jsou všude správné a možno-li tu nějakou jednotu zákonnou provésti.

O rozvětvování kapradin pojednal jsem v jmenovaném spisku, probrav hlavně druhy domácí a některé cizozemské. O *Pteris aquilina* dokázáno zřejmě, že nikoliv adventivní pupeny na řapících listových způsobují rozmnožování rhizomů, nýbrž naopak, že rhizom sám se dvouřadě rozvětvuje. U *Struthiopteris germanica* nevznikají daleko plazivé podzemní oddenky z adventivných pupenů na basi listů, nýbrž vyrůstají oddenky tyto mezi listy z mateřské osy. Podobně u exotické kapradiny *Nephrolepis*. U druhů osladičů *Polypodium Phegopteris* a *P. Dryopteris* ukázáno zcela zřejmě, že tu máme pozvolné přechody od pravé dichotomie k monopodialnímu větvení. Vyvinují-li se rozdělené vidlice jedné osy v každém ohledu stejně, jmenovitě vznikly-li již na vrcholku ze stejně rozděleného vegetačního bodu, máme pravou dichotomii; je-li však jedna vidlice slabší a kratší než druhá, posune se stranou a máme osu monopodialně větvenou. Tamže řečeno, že nikde nelze dokázati, že by některá vidlice vznikala z úžlabí nejbližšího listu. Ano platí tu pravidlo, že čím pravidelnější dichotomie,

tím více sestavují se listy tak, že poslední na mateřské ose postaví se do roviny, která půlí dichotomický úhel. Skoro nepochopitelno, že mohli někteří pozorovatelé hledati orientaci větve k listu u *Aspidium Thelypteris*. Tuť naopak provedena pravá, čistá dichotomie, zde obě vidlice jsou stejně dlouhé, silné, současně vzniklé, stejně spořádanými listy posázené a ovšem také s listem mateřským nad půlící rovinou úhlu dichotomie postaveným.

Místo abychom tu nesnadným způsobem dokazovali, že jedna z vidlic jest dceřinnou k druhé a úžlabní některého nejbližšího listu, mnohem přirozenějším jest, přijmeme-li tu pravou dichotomii, neboť tu před sebou skutečně máme.

A rozvětvování na právě uvedených příkladech opakuje se na všech kapradinách, jichž osy vůbec se větví, takže z přečetných nových dokladů, které jsem ohledáváním nalezl, skoro zbytečno nové uváděti. Jako připomenuté osladiče chová se ku př. také exotická *Davallia heterospora*. Tato má rhizomy pokryty hustým kožichem hnědých jemných plev; rhizomy tyto, aniž by vyháněly kořeny, jež tvoří se jen na starých částech oddenků, rozlézají se z většího dílu nad zemí. Vidlice dichotomií jsou více méně stejné, ale vždy s listem dichotomii půlícím. Vidlice samy nenesou v celé své délce žádné listy, což zvláštností této kapradiny.

Oddenky rodu *Lygodium* jsou vysoce zajímavé. Jsou vodorovně v zemi rozloženy (tab. II. obr. 8), tlusté, válcovité, s černými plevami. V určitých vždy vzdálenostech vidlí se rhizom půlením vegetačního vrcholu v pravidelné dvě vidlice, které jsou si v každém ohledu stejny. Nad vidlicí v půlící rovině sedí vesměs list. Ostatní listy stojí na článcích v jedné řadě a kořeny vyrůstají ze zpodu. Jest zde tudíž osa eminentně bilateralní, dorsiventralní. Přechod k ní tvoří ku př. *Polypodium vulgare*, jenže listy u tohoto stojí ve dvou řadách.

Rozvětvování *Lygodia* tak, jak je zde podáváme, nikdo snad nebude chtíti redukovati na monopodium s orientací úžlabního listu. Máme zde dichotomii tak vyvinutou, že více žádati nemožno. Kdyby tudíž autorové všechny kapradiny uvésti chtěli na monopodialní rozvětvování z úžlabí, musili by u *Lygodia* učiniti výjimku.

Řád *Ophioglossaceae* jest zajisté v mnohém ohledu velmi odchylným od ostatních kapradin a znázorňuje nám vlastně typ prastarý, již v palaeofytických dobách vyvinutý a rody a druhy tehdy také bohatší. Proto jest také důležito poznati morfologii jeho vegetativných orgánů, abychom ji srovnati mohli s ostatními kapradinami.

Náhoda mně přála, když objevil jsem před lety na rozsáhlé lesní pisčině u Lysé množství *Botrychium matricariaefolium* A. Br. Na tisíce kusů nejrůznějšího stáří odnesl jsem odtud a měl tak vzácnou příležitost důkladně se poučiti o rodu tomto, o němž roztroušeny jen zprávy kusé a neurčité, jmenovitě pokud se týče oddenků jeho.

Podivuhodné jest objevování se rostliny na stanovisku. Plodné nadzemní listy objevují se pravidelně ob rok, takže v jednom roce nenalezneme tu ani stopy po rostlině, kdežto hned v následujícím zjeví se jich tu na tisíce. Co děje

se s rostlinou, když skryta jest po celý rok v písku? Domnívám se, že od lonska založený list povyroste jen slabě, nad zem ani nevynikne a žádné čepele nevytvoří. Jest tedy asi podoben ku př. rostlince roční na tab. I. obr. 10. V tomto stavu bezpochyby rostlina odpočívá a žije z nastřádaných reservních látek v kořenech a oddencích.

Roční rostlinka (tab. I. obr. 10) jest slabounká, v písku ukrytá, listem bezčepelným opatřená. Oddenek, z něhož několik dlouhých vedlejších kořenů vyrůstá, jest praskrovný a dole zákrskem hlavního kořene okončený.

Na dospělé rostlině víceleté (tab. I. obr. 9) jest list dlouhým dužným řapíkem nad zem povznesen a ve dvé rozdělenou čepelí okončen: v polovici plodnou a sterilní, zelenou.

Z pravidla byly všechny listy na všech kusech vyvinutých plodné. Jen v jediném případě nalezl jsem list rozdělený ve dvě čepele obě zelené a neplodné. Zhusta dělí se opětně plodná i neplodná polovice čepele, a to opět jen dichotomicky.

V zpodině řapíku listového sedí mladý list (obr. 12 *l*), a sice protistojně k listu starému. A v tomto mladém listu *l* vyvinut již mladý list pro třetí rok (obr. 13). Odpočívá tedy založený list vždy dva roky, než se v třetím roce dokonale vyvine. Zbytky starého listu objímají zpod řapíka v podobě třísní (obr. 9 *a*).

Články oddenku jsou dosti prodlouženy a dobře označeny jízvami po odumřelých listech, takže lze dle toho snadno spočítati stáří celé rostliny. Nalezl jsem na silných individuích stáří mezi 10—16 roky. Nakreslené individuum na obraze 9 jest patrně staré 9 roků.

Kořeny jsou rovněž jako oddenky jemným vlášením kořenovým pokryty. Slouží tudíž oddenky tak jako kořeny k témuž účelu. Kořeny vznikají endogenně a jsou často větvité, větvení toto jest však monopodialní, nikoliv dichotomické.

Jen vzácně kde nalezneme oddenek rozvětvený, mezi tisíci mých exemplárů byly rozvětveny jen čtyry. Jeden z nich věrně podán na obraze 11. *Oddenek dělí se vesměs čistě dichotomicky*, a sice nad článkem či odumřelým listem. Žádná z větví nepatří do úžlabí listu starého. Na obr. 11 dělí se nejprve oddenek na místě *b*, a jedno rameno opětně na místech *a*, *c*. Při *a* oddělená vidlice ve vzrůstu zakrslá znova rozdělila se ve dva mladé pupeny, úplně stejné a se stejnou orientací. Musíme si totiž mysliti dichotomii vznikati takto: vedle mladého listu *b* (obr. 12) vznikne list druhý, stejný, parallelně k listu starému naproti postavený. Dle toho jest to opět dichotomie jako u ostatních kapradin, kde mateřský list stojí nad úhlem dichotomie.

Botrychium Lunaria má podobné oddenky, jež se bezpochyby někdy podobně rozvětvují. Sám jsem dělené oddenky toho druhu neviděl.

Příbuzný rod *Ophioglossum* tvoří oddenek krátký, tlustý, jednoduchý, nikdy nerozdělený, jízvami po listech značený a hustě kořeny pokrytý. Kořeny jsou vždy jednoduché a, jak známo, dávají vznik adventivným pupenům, jimiž se rostlina hlavně rozmnožuje.

Jak dělí se rhizomy žijících *heterosporických* cevnatých tajnosnubných?

Rod *Pilularia* (obr. 1. tab. II.) má oddenky tenké, nitovité, daleko plazivé, v určitých odstavcích za sebou nitovitými listy ve dvou řadách pobočních střídavě posázené. Pod rhizomem, kde listy vynikají, vybíhají dolů kořeny. *Po straně každého listu na hlavní ose* vyrůstají větve postranní. Jen vedle prvních 2—4 listů na pobočních větvích netvoří se pupeny, ostatně všude jinde. List na hlavní ose (obr. 1. *a*) padne tudíž nad úhel vidlení, rozpoluje úhel tento. Jest to tedy týž zákon jako u kapradin, které mají větvení monopodialné. Všechny pupeny Pilularie zakládají se pod vrcholem a vyrůstají pak monopodialně v slabší větve postranní. První list pobočí větve (obr. 1. *b*) padne z pravidla na stranu k ose hlavní.

Zcela podobné poměry nacházíme u rodu *Marsilia* (obr. 7. tab. II.). Také zde jsou rhizomy daleko plazivé, tenké, také zde sedí listy ve dvou střídavých řadách po boku rhizomu a každý z nich má *po straně* mladý pupen. Nikde není zřetelno, že by pupen tento seděl v úžlabí listu, ani ne v nejmladším stadiu svém. Také zde padne první list pupenu do vodorovné roviny ke hlavní ose.

Srovnáme-li oba rody tyto s kapradinami, ku př. s *Polypodium Dryopteris,* máme tu vlastně opět týž případ. Hlavní osa se dělí ve větve postranní, jen že zde ostávají tyto postranní větve slaby a celek jeví proto více ráz monopodia. List matečný stojí ale opět a přec nad úhlem vidlení. Spíše bychom porovnati mohli ještě výše vzpomenutý rod *Davallia*, protože také u této děje se vidlení jen tam, kde list se nalézá a na článcích hlavní osy žádné jiné listy nesedí.

Vidíme tudíž, že netřeba přijímati, že u Pilularie a Marsilie původně stál pupen postranní v úžlabí a že z něho vystoupil stranou následkem bilateralního a částečně dorsiventralního vzrůstu rhizomu. Pupen ten nikdy v úžlabí není a proto jej tam klásti netřeba, zvláště když se jeho mimoúžlabní postavení pěkně dá v souhlas uvésti s příbuznými kapradinami.

Ve vegetativném ohledu liší se rod *Salvinia* velmi značně od obou rodů předešlých. Nepochybuji, že rod ten náleží do zvláštní skupiny, která za dob geologických starších zastoupena rozmanitými typy. Spíše nám vzpomíná *Salvinia* typ přesliček než *Pilularii* a *Marsilii*. Jednoleté větevky nesou v určitých odstavcích *přesleny tří listů*, ovšem že jsou oba ploché vzdušné listy více nahoru od třetího kořenovitě přetvořeného posunuty. Na mladém vrcholku jsou listy pouze chlopnitě složeny a nikoliv špičkou svinuty. Tento znak vegetativný jest všeobecným pro všechny kapradiny a rovněž i rody *Marsilia* a *Pilularia*. Rozvětvování Salvinie děje se dosti často. Mladá postranní větev vyniká úplně uprostřed mezi listem plochým a kořenovitým v téže rovině přeslenové. Zde tedy máme případ, kde mizí dichotomické větvení a místo něho vytvořuje se druhý vzor větvení cevnatých tajnosnubných, totiž *monopodialní přesleny*. Zde u Salvinie nezřetelno také, že by který list stál nad úhlem, který tvoří postranní větev a hlavní osu. Jest tu tudíž týž případ jako u přesliček, kdež věc ještě podrobněji vyložíme.

Jako kapradiny tvoří hlavní větev nyní žijících cevnatých tajnosnubných na jedné straně, tak tvoří rovněž mocnou větev plavuňovité *(Lycopodiaceae)* na druhé straně. Hlavně dominujícími jsou tu známé rody *Lycopodium* a *Selaginella*. V ohledu vegetativném, v dělení os, sestavování listů, vynikání kořenů opakuje se vše společně u obou těchto rodů, jež mají také mnoho druhů habituelně si podobných, takže generický rozdíl záleží jen na procesu rozmnožovacím.

Lístky plavuňovitých jsou celkem drobné, někdy velmi malé a úzké, a pak hustě u velkém počtu na lodyze rozestavené. Jsou-li velmi četně a hustě na lodyze, pak stávají v zřetelném spiralním postavení *(Lycopodium clavatum, L. Selago* a j.). Druhý způsob seřadění listů jest čtyřadý. Tu pak jsou buď všechny 4 řady stejně vyvinuty, nebo jsou dvě složeny z listů větších a druhé dvě z listů menších — lodyha pak v tom případě jest zploštilá (obyčejné ku př. zahradní Selaginelly). Listy v čtyřadém postavení jsou buď vesměs střídavé, nebo vstříčné v decussirovaných párech. Ale často se stává, že i na téže rostlině párovité sestavení listů přechází do spiralního. *Lycopodium alpinum* ku př. má listy na hlavních osách a na větvích plodných spiralně sestaveny, na pobočných sterilních ale decussirované.

S ohledem na postavení listů a rozvětvování os možno vytknouti následující stálý zákon: *osy rodů Lycopodium a Selaginella rozdělují se vesměs dichotomicky; jsou-li listy postaveny spiralně, není žádný list nijak orientován k dichotomii, jsou-li sestaveny v pravidelných 4 řadách, padne jeden list nahoře nebo druhý dolc do roviny úhel dichotomie půlící; nikde nevyniká kterákoliv větev z úžlabí nějakého listu.*

U plavuňovitých provedena přírodou pravá dichotomie nejdokonaleji. Všude, kde vůbec větvení se děje, děje se tu tímto způsobem, jenže někdy vzrůstem silnějším jedné větve a slabším druhé nabývá ráz monopodia. Ano dichotomie tato přechází i na rozvětvování kořenů.

Jestliže nebylo možno dokázati u kapradin a kořenoplodých, že pobočí větve neb vůbec kterékoliv větve z úžlabí listu vyrůstají, tož tím nesnadněji bylo by dokazovati to u plavuňovitých. Zde v případech, kde množství lístků na tlusté ose vyrůstá, jako u *Lycopodium clavatum*, skutečně sedí kolem base vyrůstající větve pobočí tolik lístků, že vůbec na nějaké orientování není pomyšlení. A tam, kde na ose málo listů ve čtyrech řadách, stojí zpravidla poslední list mateční osy nad rovinou půlící úhel dichotomie (obr. 8. tab. I., obr. 5. tab. II.).

Někde (*Lycopodium Selago*, *Lyc. clavatum* a j.) zdá se nám dichotomie mizeti, poněvadž máme před sebou hlavní osu a malé pobočí větevky, které se zdají pod vrcholem vznikati. Ve skutečnosti ovšem zde máme monopodium, ale z přechodů ku příbuzným druhům, ano často na témže individuu (*Lycopodium clavatum*) z přechodů ku větevkám, které již správně dichotomicky se dělí, jsme oprávněni souditi, že dichotomie tu sice založena, ale neprovedena. Na vrcholu totiž zajisté již oddělil se druhý bod vegetační, ten ale mezi tím

co druhý v směru osy staré dále vzrůstal, zakrněl, odpočinul, tím dostal se stranou a teprv později pod vrcholem již co postranní úd se ve pobočnı větevku vytvořil. K tomu domnění nás tudíž opravňují přechody.

Vlastně ani monopodium není taková hlavní osa, která pobočnı větve tvoří, přijímáme-li, že vesměs jest platnou dichotomie. Poněvadž totiž se skládá z postupně rozdělených vidlic, jest pak sympodiem. Toto sympodium zvlášť dobře vyznačeno u mnohých Selaginell, kde střednı osa tvoří jakýsi kmen neb žebro a ostatnı pobočnı čepel neb korunu a kde všude pravá dichotomie se objevuje. Zde jest tudíž sympodium v skutečnosti, u *Lycopodium clavatum* a j. je nutno theoreticky předpokládati.

Vysoce zajímavo jest, s jakou pravidelnostı se objevuje nadvidličnýlist (obr. 8. tab. I. *m*) při čtyřadém postavenı. Někdy bývá ještě druhý, tomu vstřičný, na druhé straně. Jakmile se čtyřadé postavenı přemění a přechází do spiralnıho, ihned také zmizí list ze svého postavenı nadvidličného. Tak máme ku př. u *Lycopodium complanatum* čtyry řady decussirovaných listů (obr. 5. tab. II.), z nichž dvě pobočnı větší, břišnı dvě menší jsou. List *m* ovšem zcela geometricky padne do roviny úhel dichotomie půlící. Rozestoupí-li se ale střednı řada malých lístků ve dvě, čili, nabývá-li čtyřadé postavenı pomalu tvaru postavenı spiralnıho, ihned přestávajı býti také pobočnı lístky vstřičnými, a nadvidličnýlist zmizí ze svého stanoviska, jakž ku př. věrně provedeno na větevce obr. 6. tab. II.

Avšak ani v tomto případě, ani v předešlém nelze mluviti o souvislosti některé větve s listem nadvidličným. V přestaveném pořadı listů obr. 6. jsem prohlížel i nadzemnı i podzemnı větve tohoto druhu plavuně ve stu případech, ale nikde nemožno nalézti zřetelně případ, kde by některá větev vynikala z úžlabı některého listu. Opak toho ale přece u některých autorů nalézáme, což zajisté nepochopitelno.

Vyobrazené větevky *Lycopodium complanatum* habituelně neobyčejně se podobajı větevkám mnohých cypřišovitých, kdež všechno stejně přichází, jenže větevky zdánlivě dichotomické vyrůstajı tu z úžlabı listu po straně hlavnı osy a majı na basi prvnı dvě šupinky transversálně postaveny k medianě. Kdo by chtěl o stejnosti větvenı os jmenované plavuně mluviti s větvenım dvoudělož-ných, nechť vezme ku porovnánı nějaký *Libocedrus* neb p. a převeliký rozdíl mezi oběma nalezne ihned.

Kořeny vyrůstajı buď po celé délce větvı plavuňovitých (*Lycopodium inundatum* obr. 2. tab. II., a j.), nebo jen nad vidlicı něco výše nad listem nadvidličným (obr. 8, tab. I.). Tento poslednı případ se vyskýtá zpravidla tam, kde stojı nad dichotomiı list nadvidličný, ano stává se někdy, že vyrůstá nad i pod vidlicı po kořenu. Podivuhodné jsou kořeny některých exotických *Selaginell* (*S. Martensii* a j.), kde na kolmé, stromkům podobné rostlině vyrůstajı nad dichotomiı tlusté, kolmo dolů svislé kořeny, jež vznikajı exogenně a teprv když byly vnikly do země, vypustı pravý endogennı kořen podzemnı. Také prý na těchto nadzemních »kořenech« pozorovány lístky jako na větvích. Sám

jsem podobný případ neviděl, ale soudil bych, jmenovitě z udané právě okolnosti, že tyto nepravé kořeny dlužno považovati za jakýsi osní útvar, osní emergenci neb cos podobného.

Osy plavuňovitých se chovají vývojem velmi rozmanitě, ano mnohdy se podivovati musíme, jak nápadně vytvořují obdoby s vyššími jevnosnubnými. Často se přetvoří jedna část větví v plazivé oddenky podzemní, z nichž druhá část vyrůstá kolmo nad zem co listnaté lodyhy. Někdy jsou přetvořeny oddenky v nitovité šlahouny; někdy ztlušťují se v určitých odstavcích v uzlovité hlízy (*Selaginella tuberosa* Bak.), z nichž může se nová nadzemní rostlinka vyvinouti.

Nadzemní lodyhy buď rozlízají se a stejnoměrně rozvětvují, buď rozlišují se v základní kmen, který dělí se v hlavní větve, a tyto nesou pak větevky s velkými zelenými lístky, jež celé napodobují listy zpeřené s omezeným vzrůstem.

Často jsou větve posázeny listy tak, že jsou čtyrhranné. V těch pak případech krásně viděti, jak postranní větevky vyrůstají uprostřed mezi dvěma řadami listů (*Selaginella uliginosa* A.).

U některých exotických *Selaginell* nalézáme ještě jednu zvláštnost morfologickou, která posud nedošla u botaniků patřičného povšimnutí. *Selaginella pubescens* ku př. (obr. 7. tab. I.) tvoří přízemní oddenky, z kterých vyrůstají kolmé osy *a*, jež se pak rozvinou v zelenou listnatou korunu. Oddenky i kolmé osy jsou oblé a spiralně bledými šupinkami listovými posázené.

Oddenky rozvětvují se pravidelně dichotomicky, protože ale lístky spořádány spiralně, není nikde listu nadvidličného. Všude tam, kde dělí se osa ve dvě vidlice, pozorujeme pupen *b*, který vyrůstá *nikoliv z úhlu* dichotomie, nýbrž nad ním a na druhé straně stojí proti němu druhý podobný pupen Oba pupeny tedy stojí v rovině, která půlí úhel dichotomie. Oba jsou stejně a současně založeny, ale jen jeden z nich se obyčejně vyvine a prodlouží v nový výběžek oddenkový.

U druhu *Selaginella Martensii* a některých příbuzných objevují se tyto pupeny na zelených větevkách korunových (obr. 14. tab. I.). Zde sedí rovněž v rovině úhel dichotomie půlící *a*, a sice na straně, kde také se nalézá list nadvidličný, sedí za tímto, ale nad úžlabím. Pupeny tyto se zde opět vidličnatě dělí a jsou dole tenince a krátce stopečkaté, takže se zdá, že mohou upadnouti a v novou rostlinu vyrůsti. Vidlení jich děje se v rovině souběžné k rovině celé zploštilé větevky.

Zač máme tyto pupeny neb větevky považovati? Kdyby tu byl jen jeden takový pupen a vynikal přímo z úhlu dichotomie, řekli bychom, že prodlužuje ještě starou osu a že tu máme vlastně pravé dichasium rostlin jevnosnubných Ale zcela zřetelně vidíme oproti tomu, že vynikají nad úhlem dichotomie. Úžlabní zplodinou některého listu nejsou, neboť v případě obr. 7. vůbec nemají pod sebou žádného listu a v případě obr. 4 sedí nad úžlabím vidličného listu, a to jen na jedné straně, neboť na druhé není vidličného listu a zde

tudíž vynikají mezi listy. Ponětí adventivních pupenů také neodpovídají, protože nevyrůstají endogenně a protože vždy a všude na témže druhu rostliny na určitém místě se objevují. Jsou stálým úkazem těch druhů rostlin.

Podle všeho máme zde co činiti s docela novým úkazem morfologickým. Osa, která se byla dichotomicky rozdělila ve dvě vidlice, rozděluje se ještě jednou ve dvě vidlice stejné hodnoty v rovině, která půlí úhel dichotomie. Snad by bylo vhodné nazvati tento úkaz dělení os *tetrachotomií*. V našich obou případech jsou oba pupeny mladší než rozdělené již větve, mezi nimiž vznikají. Snad by se na jiných druzích nalezly také případy, kde se osa dělí ve čtyry stářím a velikostí stejné vidlice.

Nevím ani, kde bychom v rostlinstvu k tetrachotomii nalezli aspoň analogii. Nejspíše dala by se srovnati lodyha s decussirovanými páry listů. Zde také padne následující pár listů do roviny kolmo stojící k rovině obou listů předchozích. Rozdíl podstatný jest tu ten, že jsou to listy a lodyha s terminalním vzrůstem.

Všude v knihách činí se zmínka o rozmnožovacích pupenech, které se tvoří mezi listy na větvích horské plavuně *Lycopodium Selago*. Zvětšeny naznačeny jsou na obr. 3—5, a v diagramu obr. 6. tab. I.

Všeobecně se o pupenech těchto přijímá, že na místě listu lodyžního vznikly, a dříve o nich tvrzeno, že vyrůstají z úžlabí listu lodyžního, a sice tak, že dříve se co pupen vyvinou a teprv dodatečně, jaksi opožděně, vyvine se podpůrný list, který ale jest výše na pupen z lodyhy posunut.

Pupeny tyto se vyskytují z ravidla u velikém počtu na větvích plodných, nikdy na sterilních. Jsou dosti malé a skoro mezi listy ukryté. Útlostí svou ovšem nedělají dojem pobočni větve, nýbrž skrovného pobočného pupenu. Tvrdí se, že sedí vždy na místě listu a dle vývinu prý určitě hrboulek listový zastupují — mají tudíž býti zástupcem samého listu nebo dokonce jeho přeměnou. Sám jsem mladý vývin listů a hrboulků pupenových neohledával, a i kdybych tak byl učinil, výsledek ohledání toho bych za rozhodující nepovažoval, neboť takováto mladá nerozhodná stadia nás o ničem nepřesvědčují. Tolik ale v dospělém stadiu vidíme, že pupeny tyto vesměs porušují pořadí parastichů blízkých listů a že na místě listu v parastichu nestojí, nýbrž mezi listy!

Z toho souditi nutno, že nejsou ani zástupcem ani přeměnou listu, nýbrž samostatným osním pobočním útvarem mezi listy vzniklým. Ostatně i kdyby pupeny ty stály určitě na místě listu osy hlavní, nebylo by to ničím obzvláštním. Vznikaly by také mezi listy, my však nemáme příčiny tvrditi, že jsou v tom případě již zástupcem neb přeměnou listu.

Dle našeho náhledu jsou to pobočni větve jako jiné větve, jenže setrvávají ve svém pupenovém stadiu, jsouce určeny k funkci rozmnožovací. Skládají se ze dvou částí: z dolejší pevné, pevně s osou souvislé, která zpravidla nese dva příčné úzké lístky (obr. 3—6. *c*), po nichž následují decussirované jiné dva lístky, z nichž jeden (zevní od osy odvrácený) *a* jest velký, vakovitě dole vyhlubený, široký; druhý *d* menší, ale přece širší lístků *c*. Po těch pak následuje

ještě příčný pár úzkých, stejných lístků *b*. Všech šest těchto lístků tvoří jakýsi kalichovitý obal, v němž teprv na útlé stopečce sedí mnoholistý pupenec, který se záhy od kališního obalu odděluje, takže většinu pobočních rozmnožovacích pupenů jmenované horské plavuně najdem bez pupence vnitřního.

Že tak často rozmnožovací pupeny u *Lycopodium Selago* se tvoří, lze si snad vyložiti tím, že asi z výtrusů velmi nesnadno vznikají plodná prothallia. Místo nich vykonávají funkci rozmnožovací popsané pupence, které jsou v tom ohledu také praktičnější, neboť beze všeho vývoje hned mohou vyrůstati v hotovou rostlinku novou.

Dle starého náhledu měl býti list obalný obr. 3—4. *a* listem lodyžným podpůrným, který se ale pošinul na pupen sám. Ovšem v medianě list ten stojí, ale podpůrným být nemůže, neboť jest protistojným k listu *d* a náleží tedy jako tento k ose pupenu, dále jest postaven v páru, který teprv po páru listů *c* následuje. Pak vyskýtají se i případy, kde místo páru listů *c* stojí přeslen ze tří stejných lístků (obr. 5.), z nichž jeden pak padne do mediany *c*. Při tom ale ostatní následují jak obyčejně, tedy i list *a*, který domněle má být podpůrným lodyžním, jehož místo ale zaujímá již list *e*.

Podobné rozmnožovací pupeny jako předešlý druh tvoří rašelinné a rybničné *Lycopodium inundatum*. Život rostliny této jest i jinak velmi zajímavým. Kdežto jiné druhy našich plavuní stále dorůstají a vytrvávají, odumírá tělo *Lycopodium inundatum* a každým příštím rokem dle určitých pravidel se obnovuje. Letošní zelená rostlina (obr. 2. tab. II.) skládá se z kolmé osy plodní *d*, často (aspoň po většině případů) z druhé osy plodní *e* a z vidlicovité větve *f*, *i*, *k* sterilní, která se vodorovně plazí po zemi. Pozoruhodno jest, že osy *d*, *c*, *k* vidlí se od sebe v rovině kolmé ku substratu, kdežto větve *f*, *i* vidlí se k předešlé rovině kolmo, totiž v rovině substratu. Nesprávné jest udání v knihách, dle kterého *Lycopodium inundatum* větví se monopodialně. Větve *f*, *i* jsou přec zřetelné dichotomické vidlice vývinem i stavem dospělým, jaké si jen mysliti možno, větev *k* jest dichotomickou vidlicí vzhledem ku větvi *e* a větev *c* vzhledem ku větvi *d*.

Letos sterilní větve *f*, *i* založí na zimu na konci svém hrubými hustými listy obalené odpočívající pupeny, z kterých na jaře vyžene kolmá plodní větev podobná větvi *d* a na to druhou větev *c* zrodí vodorovně atd. jako v předešlém roce. Při tom lonská rostlina uhnije a zvolna zmizí, jakž naznačeno na částech *d'*, *e'*, *f'*.

Podle toho zrodí tedy jedno individuum vegetativným způsobem vždy nová dvě individua pro příští rok. Tím ovšem bylo by o potomstvo druhu tohoto velmi špatně postaráno, a proto příroda nadala plavuň tuto ještě jinou schopností se rozmnožovati.

To děje se pomocí malinkých pupenců (obr. 3., 4. tab. II.), jež poprvé popsal *Bruchmann*. Tyto pupence objevují se jen na sterilních vidlicích, ale dosti nepravidelně a neurčitě, sotva kde po dvou na obou stranách, jak *Bruchmann* tvrdí. Tvoří se co postranní osní zplodiny mezi listy, beze vší orientace k ose a listům. Mají tudíž v každém ohledu týž význam jako rozmnožovací

pupence druhu *Lycopodium Selago*. V mládí jsou velmi malé, kulovité, vydutými širokými šupinami zaobalené (obr. 3.). Když osa *b*, která je nese a která tu od lonska zbyla, uhnívá a zmizí, jsou pupeny popsané svěží a počnou se k novému životu probouzeti. Pupen se zveličuje, utvoří množství mladých lístků a zároveň vyžene na zpodu mohutný kořen do země (obr. 4.). Když pak okolní část staré rostliny úplně vymizí, vyrůstá na mrtvole její z pupenu nové individuum.

Z ohledu morfologického nemožno ovšem rozmnožovací pupeny druhů *Lycopodium Selago* a *L. inundatum* potahovati na vzorec dichotomie, neboť nerozvětvují starou osu a dělením z této nepovstávají. V podstatě jsou ovšem také osami pobočními k matečným, ale tvarem i životem vzaly na se úkol rozmnožovací dle obdoby hlízek a cibulek rostlin jevnosnubných.

Z ostatních plavuňovitých ohledával jsem rod *Psilotum*. Tento ale chová se v každém ohledu v rozvětvování jako ku př. *Lycopodium complanatum*. U rodu *Isoëtes* jsem jako jiní pozorovatelé vůbec žádné větvení nenalezl.

Rod *Azolla* ve vegetativném ohledu spíše podobá se plavuním než kořenoplodným (nejméně rodu *Salvinia!*), kamž dle způsobu pohlavního rozmnožování se klade. Má slabé vodorovné vzplývavé lodyžky, které se dělí vidličnatě. Na větvích sestaveny listy ve dvou řadách střídavě, ale listu nadvidličného tu není. Kořeny tvoří se ale pod vidlicí, jako u Selaginell. Že by vznikala některá větev z úžlabí listu, nedá se dokázati.

Skoro se lze domýšleti, že nyní žijící kořenoplodé tajnosnubné jsouce zbytkem zajisté za dávných dob geologických bohatě rozvětvené skupiny rodů, představují nám vlastně tři samostatné typy: 1. *Salvinia*, 2. *Azolla*, 3. *Pilularia* a *Marsilia*. Vegetativné znaky všech tří typů liší se převelice a pohlavní akt nejeví tolik podstatných rozdílů, aspoň ne tolik, aby nenalezlo se k nim spojitosti u rodů vyhynulých. Kdybychom dokonale znali všechny vyhynulé cevnaté tajnosnubné, jistě by nám význam jmenovaných tří typů stal se jasnějším.

Třetím arcitypem cevnatých tajnosnubných jsou *přesličky*, jichž jediným posud žijícím zástupcem jest rod *Equisetum*. Uznati třeba, že rozmnožováním výtrusným a pohlavním přesličky nehrubě se liší od ostatních tajnosnubných, jmenovitě, vezmeme-li také ohled na formy vyhynulé. Mnohem větší rozdíl jest mezi přesličkami a ostatními cevnatými tajnosnubnými v znacích vegetativných. Stavba přesličky, tvar listů a rozvětvování nemají nic společného s typy ostatními.

Hlavními body vegetativné charakteristiky přesliček jsou *přeslenitost listů* a *monopodialní vzrůst a větvení*.

Rozvětvování nyní žijících přesliček děje se celkem u všech druhů dle stejných pravidel, takže tu nevalné rozmanitosti ani žádných odchylek od pravidel. Podzemní oddenky rozvětvují se často nepravidelně, nikoliv přeslenitě. Tak na příklad prohledněmež si podrobněji obecný druh *Equisetum arvense*. Oddenky zde jsou hluboko (až na 1 *m*) a daleko pod zemí rozlezlé, oddáleně pochvami malými a přitisklými posázené. Zpravidla bývají pokryty

hustou huninou vlášení kořenového — přijímajíť také částečně funkci kořenů pravých. Jsou-li oddenky v mokré půdě nebo dostanou-li se do vody, mizívá na nich hunina kořenová.

Někdy jsou články silně zkráceny a v kulaté hlízky zakulaceny. Na hlízkách těch není ale nic zvláštního. Jsou dole objaty malinkou pošvičkou a na konci opatřeny ostrým pupencem, z něhož mohou vyrůsti v novou rostlinu.

Pod kvetoucí osou vycházejí po stranách obyčejně osy zelené, vegetativné Obyčejně objevování se jich jest ojedinělé, ale zhusta pozorujeme, že jsou obě zelené větve vstříčné, ano, následují-li ve dvou odstavcích, vstříčné a decussirované (obr. 1. tab. I.). Někdy tvoří také přesleny trojčetné.

Větvení toto má ráz dichasia vyšších jevnosnubných. Osa konečná nese při tom zbytky po uschlé a odumřelé ose plodní neb vegetativní. S dichotomií plavuňovitých ovšem toto větvení nelze porovnávati.

Jak na oddencích tak na osách nadzemních a jejich větvích vynikají postranní větve postupně monopodialně v přeslenech v rozličném počtu — nejčastěji ovšem v čísle n 3. Pobočni osy, jak známo, zdánlivě vyrážejí pod pochvou listovou, pronikají ji, jak z mladého stadia zřetelno. Jinak ale padnou všude a vesměs určitě mezi žebra či zuby pochvy, neboli mezi listy. Máme zde tudíž opět kryptogamické postavení mezilistové. V případě, že vyhánějí jen dvě pobočni osy (obr. 2. tab. I.), staví se tyto zpravidla do půlícího průměru osy hlavní a první list pochvy, jsou-li tři takové, jest k ose hlavní adossirován. Je-li první pochva na pobočni ose vícezubá, nedá se žádné určité postavení její zubů vzhledem k hlavní ose vyznačiti.

O tom, že větvení přesličeк děje se zákonitě monopodialně v přeslenech, nelze pochybovati, a jsou proto přesličky v tom ohledu velmi odchylny od ostatních cevnatých tajnosnubných. Vzdor tomu s těmito mají ještě tu známku společnou: pobočni osy nevynikají z úžlabí nijakého listu, nýbrž nalézají se opět mezi listy. Dle vzoru dříve u jiných cevnatých tajnosnubných provedeného měl by padnouti list pochvy přesličkové do roviny, která půlí úhel, který svírá hlavní osa a větev pobočni. Na schematu obr. 15. tab. I. měl by původně padnouti zub pochvy do přímky *c b*, protože ale větve pobočni i listy jsou sestaveny do přeslenu, musí se dle zákona souměrnosti a nejlepší výhody získání místa rozestaviti na obvodu tak, že tvoří střídavě úhel $^{360}/_{6}$. Následkem toho odchýlí se list *a* z polohy *c b* o úhel α do polohy *o m*.

Celou věc mysliti si třeba asi tak, že by přeslen obr. 15. tab. I. byl roztažen do spiraly a pochva listová rozdělila se na tolik listů, co jest zubů na ní, musily by listy jednotlivé padnouti do přímky půlící úhel hlavní osy s dotyčnou osou pobočni. Zkrátí-li se nyní ale spirala šestilistá do šestilistého přeslenu, musily by listy nyní padnouti těsně vedle větevek, totiž list *a* do přímky *c b* k větevce *p*. Zákon výhodného postavení toho ale nepřipouští, a proto staví se list do největší prostory, tedy do prostřed mezi větevky *p n* čili do postavení *o m*.

Že zde přijímáme listy nadvidličné, činíme tak z analogie k ostatním cevnatým tajnosnubným, kde všude, kde pobočni větve počtem i místem k urči-

tému listu jsou vázány, list tento staví se do polohy nadvidličné. V tom ohledu nutno by bylo také u rodu *Salvinia* postavení větví pobočních a listů dle vzoru *Equisetum* vykládati.

Rozhlédneme-li se nyní po všem tom, co jsme o větvení os cevnatých tajnosnubných pověděli, shledáme, že zcela dobře dá se tu stanoviti *jednotný* zákon, dle kterého větvení ono se děje. Vysloviti se dá asi takto: *Osy cevnatých tajnosnubných nejsou rozčleněny listy, nýbrž jeví se jako jednolitý celek, který kdekoliv bez ohledu na listy může se děliti neb postranní větve vytvořovati. Větvení toto nabývá v jednom směru tvaru dichotomie, čím více obě rozdělené větve v každém ohledu jsou si rovny, na druhé straně monopodia, čím více obě větve v každém ohledu jsou si nerovny. Jsou-li větve sprovázeny určitým tistem, padne tento do roviny půlící úhel vidlice.*

Tento zákon větvení cevnatých tajnosnubných vyloží nám všechny případy větvení v oddělení těchto rostlin, kdežto ti, kteří chtějí větvení cevnatých tajnosnubných uvésti na zákony vyšších jevnosnubných, většinu případů vyložiti vůbec nedovedou, a u těch, které takto vykládají, různých hypothes a oklik upotřebovati jsou nuceni. Ti, kdož chtějí sváděti pobočí větve do úžlabí listů, čili uváděti větve v závislost od listů, ti snaží se patrně v jedno uvésti vegetativní rozvoj těla cevnatých tajnosnubných s vegetativním rozvojem těla jevnosnubných.

Dle našeho výkladu dělí se osy cevnatých pouze a jedině dle způsobu tajnosnubných buněčných a s jevnosnubnými v tom ohledu nemají praničeho společného.

Toto poslední třeba ještě blíže objasniti. Známo, že každá rostlina jevnosnubná skládá se vlastně z tolika článků, kolik jest listů. Prodlužování os děje se vegetačními vrcholy, rozvětvování děje se ale všude jen a toliko z vegetačních bodů jednotlivých článků, které nalézají se v úžlabí listů. Podpůrné či matečné listy tyto zaujímají pak pro určité typy zákonité postavení vzhledem k úžlabní větvi a její prvním listům. Normální větve pobočí (tedy není tu ohled brán na větve adventivné) nemohou proto nikdy mezi listy vzniknouti. Rovněž nemožna jest z toho ohledu u jevnosnubných pravá dichotomie, jakou máme u tajnosnubných bez orientace k podpůrnému listu. Kdežto u cevnatých tajnosnubných děje se vidlení, po případě dichotomie (tedy ať jsou obě vidlice stejné nebo nestejné), dle vzoru obr. 16., 17. tab. I. vzhledem ku listu, který ji sprovází, padne list vidliční u jevnosnubných pod jednu větev, či do mediany. Ještě častěji tu máme ovšem dvě pobočí vidlice a tedy dva listy v medianě.

Pravá kryptogamická dichotomie u jevnosnubných vůbec se nevyskýtá, nebo jen abnormalně ve vzácných případech. Tak dělívají se ku př. úponky rév a tykví neb samčí květy konifer; podobně uvádějí se případy u bylin *Vallisneria* a *Hydrocharis*.

Tím více ale rozšířeno jest dichotomické dělení mezi tajnosnubnými. Dělíť se tu dichotomicky v různých skupinách rostlin nejen stélky, osy a větve, ale velmi často vídáme v abnormních případech dělené listy neb aspoň části listů úplně dle vzoru dichotomie. Tak známy jsou monstrosní listy mnohých kapradin,

jichž úkrojky vesměs dichotomicky se rozdělují. Na obr. 2. tab. II. jest vykreslen list Pilularie, jenž se až k basi ve dvé rozdělil. Lístky čepele u Marsilie zhusta jsou ve dvé vykrojeny neb i docela rozděleny, a v jednom případě nalezl jsem i list nadvidličný u Selaginelly úplně ve dví rozdělený.

Tato náklonnost cevnatých tajnosnubných k dichotomickému dělení vyslovena jest nejvíce u plavuňovitých, kde i kořeny dichotomicky se větví.

Vznikání pobočních os u jevnosnubných vázáno jest tedy na úžlabí. A tu pak zcela přirozeno, že pobočí větve postupně od vrcholku ku dolejšku se vyvinují a tudíž v základě vesměs monopodium představují.

Monopodium v tomto smyslu provedeno mezi tajnosnubnými jen u přesliček, u všech ostatních jest více méně nepravidelné. Na hlavní ose ku př. rhizomu kapradiny vznikají sice postranně pobočí větve, takže má pak celek také ráz monopodia. Ale větve tyto nevznikají vždycky dle stáří v pořadí od vrcholu k basi hlavní osy, nýbrž vytvořují se často nestejně brzo výše, brzo níže na ose hlavní. Jindy ovšem bývá provedena také tu určitá pravidelnost.

Dle našeho výkladu o morfologii os cevnatých tajnosnubných snadno pochopíme také rozmnožovací pupeny plavuně *Lycopodium Selago* nebo tak zvané adventivní větve *Struthiopteris, Nephrolepis*, *Pteris aquilina* atd. Protože může osa kapradiny neb plavuně na povrchu svém kdekoliv vyrůsti v pobočí větev bez ohledu na listy, což stává se tak skutečně v podobě malinkých pobočních os či pupenů *Lycopodium Selago* a u *Struthiopteris* jsou pobočí větve oddenkové normální větve pobočí na ose hlavní.

Pravili jsme, že větvení os jevnosnubných nedá se s větvením cevnatých tajnosnubných porovnávati, za to ale jest větvení stélky buněčných tajnosnubných úplně stejné. Již u řas, jmenovitě chaluh a ruduch, nalézáme stélky pravidelně dichotomicky dělené. Vedle toho všude vidíme, že stélky děliti se mohou na všech místech svého povrchu třeba bez všech pravidel. U parožnatek (*Characeae*) máme naopak provedeno monopodium přesliček. Dělení mechů jatrovkovitých jest totožné s dělením os plavuňovitých.

O jedno mají ale cevnaté tajnosnubné v ohledu morfologickém více než kterékoliv tajnosnubné buněčné. Osa cevnatých tajnosnubných větví se sice jako stélka buněčných tajnosnubných, ale nese pravé listy, které dle určitých pravidel na ose jsou rozestaveny. Stélky buněčných tajnosnubných jsou ale bezlisté, neboť to, co se u mechů listy nazývá, není morfologicky totožné s listy vyšších rostlin. Stélka mechů jest první pohlavní generace rovná prothalliu kapradin.

Listy mechů jsou proto listy první generace, abychom řekli prvoklíčků, kdežto listy kapradin jsou listy druhé generace z prvoklíčku vzniklé. Ostatně i anatomie i tvar listů mechů listnatých v ničem se neshoduje s listy vyšších rostlin. Listy mechů jsou hodnoty pouhých emergencí stélkových, pravým listem morfologickým u mechů jest pohlavním aktem zplozená tobolka výtrusná.

Listy cevnatých tajnosnubných jsou tudíž stejny s listy jevnosnubných, osy však chovají se stejně jako stélky tajnosnubných buněčných. V této věci

vidíme cos nejasného a jmenovitě zřetelno, že od cevnatých tajnosnubných ku jevnosnubným jest příliš veliký skok. Víme-li ale, že nyní žijící cevnaté tajnosnubné a rovněž i nahosemenné jsou jen fragmenty z někdejšího velikého jich rozvoje za dob palaeozoických i mesozoických, právem se domýšleti možno, že to, co jsme tu co nejasné naznačili, vysvětleno by nám býti mohlo přechodními typy mezi cevnatými tajnosnubnými a nahosemennými.

Výklad tabulek.

Tab. I.

Obr. 1. Rhizom přesličky *Equisetum arvense;* následkem odumírání nadzemních os *b* a vyrůstání na jich zpodu vegetativných, vstříčných os *c* nabývá rozvětvení podoby vidlic.

Obr. 2. Schema hlavní osy a dvou pobočních, které padnou do téhož průměru.

Obr. 15. Schema pro vysvětlení postavení listů pošvitých.

Obr. 3.—6. Rozmnožovací pupeny plavuně *Lycopodium Selago.*

Obr. 7. *Selaginella pubescens;* přízemní oddenek s kolmou lodyhou; *b* vidličné větevky tvořící tetrachotomii.

Obr. 8. *Selaginella helvetica;* listnatá větevka jako příklad dichotomicky dělených os plavuní s nadvidličným listem *m.*

Obr. 9.—13. *Botrychium matricariaefolium;* obr. 9. devítiletá rostlina; obr. 10. jednoletá rostlinka s prvními pobočními kořeny, zakrnělým hlavním kořenem a prvním nevyvinutým listem; obr. 11. dichotomicky větvený rhizom; obr. 12., 13. průřez zpodu listu se zárodky listů pro dva roky.

Obr. 14. *Selaginella Martensii*; listnatá větevka s tetrachotomickými větevkami *a* a plodní větevkou *b.*

Obr. 16., 17. Schema dichotomie cevnatých tajnosnubných s nadvidličným listem.

Tab. II.

Obr. 1., 2. Zvětšený rhizom rodu Pilularia; *a* list nadvidličný; obr. 2. nadvidličný list *a* až ku zpodu rozdělený.

Obr. 2 *a.* *Lycopodium inundatum* v přir. vel.; *a—b* uhnilá část rostliny od lonska; *d*, *e* plodní kolmé větve; *k*, *f*, *i* vodorovné větve sterilní; z konečných pupenů větví *f*, *i* obnovuje se rostlina v příštím roce.

Obr. 3., 4. Pomnožovací pupeny téhož druhu.

Obr. 5. Normalní větevka *Lycopodium complanatum* s decussirovanými páry listů a nadvidličným listem *m.*

Obr. 6. Podobná větevka, na níž ale rozstupuje se střední řada listů, následkem čehož listy zaujímají postavení střídavé a list nadvidličný mizí.

Obr. 7. Rhizom rodu *Marsilia.*

Obr. 8. Rhizom rodu *Lygodium.*

Über die Morphologie der Achsen der Gefässcryptogamen.

Die allgemeinen Schlussfolgerungen der ganzen Abhandlung, auf deren Einzelheiten im böhmischen Texte hingewiesen wird, lassen sich folgendermassen zusammenstellen:

Die Achsen der Gefässcryptogamen sind durch die Blätter nicht gegliedert, sondern erscheinen sie als ein einheitliches Gebilde, welches sich auf jeder Stelle ohne Berücksichtigung der Blätter theilen kann. Die Verzweigung bekommt in einer Richtung die Form der Dichotomie, je mehr die beiden verzweigten Äste in jeder Beziehung einander gleich sind, in der anderen Richtung die Form des Monopodiums, je mehr die verzweigten Äste einander ungleich sind. Wenn die Verzweigung von einem bestimmten Blatte begleitet wird, so fällt dieses in die Ebene, welche den Gabelwinkel theilt.

Dieses Verzweigungsgesetz bei den Gefässcryptogamen erklärt uns alle Fälle der Achsentheilung in dieser Pflanzengruppe, während diejenigen, welche die Achsentheilung der Gefässcryptogamen auf die Verzweigungsgesetze der Phanerogamen zurückführen wollen, die Mehrzahl der Verzweigungsfälle zu erklären nicht vermögen, oder verschiedener Hypothesen und Umwege sich dabei bedienen müssen. Wenn man die Seitenzweige in die Blattachsel hinführen oder die Abhängigkeit der Seitenzweige von den Blättern anerkennen will, so erstrebt man die Einigkeit der vegetativen Achsenentwickelung der Gefässcryptogamen und Phanerogamen nachzuweisen.

Nach unserer Erklärung theilen sich die Achsen der Gefässcryptogamen einzig und allein nach der Art der Zellcryptogamen und mit den Phanerogamen haben sie in dieser Beziehung nichts gemeinschaftliches.

Eine jede phanerogame Pflanze ist bekanntlich aus so vielen Gliedern zusammengesetzt, wie viele Blätter sich auf derselben befinden. Die Verlängerung der Achsen wird durch die Vegetationsgipfel bewirkt, die Verzweigung findet aber nur auf den Vegetationsgipfeln der Glieder, welche den Blattachseln entsprechen, statt. Der Achselzweig erhält dann eine gesetzliche Stellung gegen-

über dem Mutterblatte. Normale Seitenzweige können demnach niemals zwischen den Blättern entstehen. Demzufolge kann auch bei den Phanerogamen eine echte Dichotomie, welche die Cryptogamen charakterisirt, nicht vorkommen. Die Dichotomie, welche ausnahmsweise bei den Phanerogamen vorkommt (die Ranken der *Vitis* und *Cucurbitaceae*, die männlichen Blüthen der Coniferen, die Verzweigungen der *Vallisneria* und *Hydrocharis*), ist als seltener Ausnahmsfall anzusehen.

Da nun die Bildung der Seitenzweige bei den Phanerogamen an die Blattachseln gebunden ist, so ist es ganz natürlich, dass sich die Seitenzweige vom Gipfel gegen die Basis hin stufenweise entwickeln und hiemit überall im Grundsatze ein Monopodium vorstellen. Bei den Gefässcryptogamen ist das Monopodium in diesem Sinne nur bei der Gattung *Equisetum* durchgeführt, bei allen anderen unterliegt es verschiedenen Unregelmässigkeiten. Die Achse kann nämlich auf jeder Stelle in neue Zweige hervorwachsen, wodurch es kommt, dass die nächststehenden Seitenzweige verschiedenen Alters sind, die akropetale Ordnung aber nicht behalten.

Wenn wir die Verzweigung der Achsen der Gefässcryptogamen aus diesem Standpunkte betrachten, so sind uns dann auch die Brutknospen des *Lycopodium Selago*, die so genannten Adventivzweige der *Struthiopteris, Nephrolepis* u. s. w. leicht begreiflich. Es sind Seitenzweige, welche zwischen den Blättern hervorgehen, einmal als Knospenstadium verbleiben und zur ungeschlechtlichen Fortpflanzung dienen, andersmal zu weitkriechenden Rhizomen sich umbilden und die locale Verbreitung fördern.

Wie hervorgehoben, ist die Verzweigung der Gefässcryptogamen gleich mit derjenigen der Zellencryptogamen. Schon unter den Algen findet man ähnliche Formen von Dichotomien und Monopodien. Die Cheraceen sind in dieser Hinsicht identisch mit dem Equisetum, die Lebermoose entsprechen den Lycopodien. Der Thallus der Zellencryptogamen kann ebenso gut auf jeder Stelle seiner Oberfläche neue Sprossungen bilden.

Ein wichtiges Merkmal theilt aber die Zellen- und Gefässcryptogamen von einander. Die Achse der Gefässcryptogamen trägt echte Blätter, während der Thallus der Zellencryptogamen überall blattlos erscheint. Die Blätter der Moose sind nicht homogen mit den Blättern der höheren Pflanzen, denn sie gehören der ersten Generation, sie sind auch nicht einmal morphologisch und anatomisch den echten Blättern ähnlich. Es sind wohl Thallusemergenzen, den Trichomen der Phanerogamen nicht ungleich. Das echte Blatt bei den Moosen ist die Fruchtkapsel. Die Blätter der Gefässcryptogamen sind aber echte Blätter in Sinne der höheren Pflanzen. Immerhin behalten die Achsen der Gefässcryptogamen in der Verzweigungsart und in dem Verhältnisse zu Blättern den Typus der Zellencryptogamen. Die gegenwärtigen Gefässcryptogamen und die nächstfolgenden Gymnospermen sind nur stark decimirte Überbleibsel der in geologischen Perioden überreichlich entwickelten Pflanzenabtheilungen.

Man kann daher mit allem Rechte zugeben, dass die Übergangsformen, welche den Übergang von dem jetzigen Gefässcryptogamentypus mit der Zellen-

cryptogamenverzweigung zum niederen Gymnospermentypus mit Phanerogamenverzweigung vermittelten, ausgestorben sind. Jedenfalls vermisst man zwischen den jetzt lebenden Gefässcryptogamen und den Gymnospermen oder den Phanerogamen überhaupt allmählige Übergangstypen. Es sind hier höchstens die *Cycadeen*, welche einigermassen verglichen werden dürften, diese sind aber in der jetzigen Natur nur durch monotone Typen vertreten, auf welchen keine Verzweigung wahrgenommen wird.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Rhizom von *Equisetum arvense*; infolge des Absterbens der oberirdischen Achsen *b* und des Hervorwachsens der vegetativen Achsen *c* an ihrer Basis bekommt die Verzweigung eine Form von Gabelung.

Fig. 2. Die Hauptachse und zwei Seitenachsen, welche an der Basis der Blattscheide entspringen.

Fig. 15. Ein Schema für die Erklärung der Blattstellung; das Blatt *a* fällt überall zwischen die Seitenzweige *n*, *p*; weil hier die Blätter an Seitenzweige gebunden sind, so soll das Blatt *a* ursprünglich in die Linie *c*, *b* fallen, oder näher dem Seitenzweige *p* als dem Seitenzweige *n* stehen; um aber die vortheilhafteste Stellung zu erhalten, weicht es um den Winkel α in die Lage *o*, *m* ab.

Fig. 3, 4, 5, 6. Brutknospen von *Lycopodium Selago*; Fig. 3 eine Knospe von hinten, Fig. 4 eine andere von vorn; Fig. 5 ein seltener Fall, wo die Knospe am Grunde mit drei gleichen Hüllblättchen umgeben ist.

Fig. 7. *Selaginella pubescens*; aus der kriechenden Achse, welche wie ein Wurzelstock dient, wächst die senkrechte Stengelachse *a* empor; *b* die hervorwachsenden Äste, welche die Tetrachotomie darstellen.

Fig. 8. *Selaginella helvetica*; ein beblätterter Zweig als Beispiel der Verzweigungsart der Lycopodiaceen, wenn die Dichotomie von dem obenständigen Blatte *m* begleitet wird.

Fig. 9—13. *Botrychium matricariaefolium*; Fig. 9 eine neunjährige Pflanze in natürl. Grösse; Fig. 10 eine einjährige Pflanze mit ersten Seitenwurzeln, mit verkümmerter Hauptwurzel und mit unentwickeltem Blatte; Fig. 11 ein dichotomisch verzweigtes Rhizom, bei *a* die jungen vertheilten Knospen; Fig. 12, 13 durchschnittene Blattbasis mit Blattanlagen für zwei Jahre.

Fig. 14. *Selaginella Martensii*; ein beblättertes Ästchen mit tetrachotomischen wiederum gegabelten Sprossen *a*; *b* die Fructification.

Fig. 16, 17. Schema für die blatttragende Dichotomie der Gefässcryptogamen.

Tafel II.

Fig. 1, 2. Vergrössertes Rhizom der *Pilularia*; *a* das gabelständige Blatt; *b* das erste, der Mutterachse zugekehrte Blatt des Seitenzweiges; Fig. 2 ein gegabeltes Rhizomstück mit einem bis zur Basis getheilten Deckblatte *a*.

Fig 2*a*. *Lycopodium inundatum* in natürl. Grösse; *a—b* verwesener Rhizomstheil vom vorigen Jahre; *d*, *e* senkrechte Fruchtzweige; *k*, *f*, *i* wagrechte, sterile Äste dieses Jahres; aus den Knospenspitzen *f*, *i* gehen im nächsten Jahre neue Pflanzen hervor.

Fig. 3, 4. Brutknospen derselben Art, vergr.

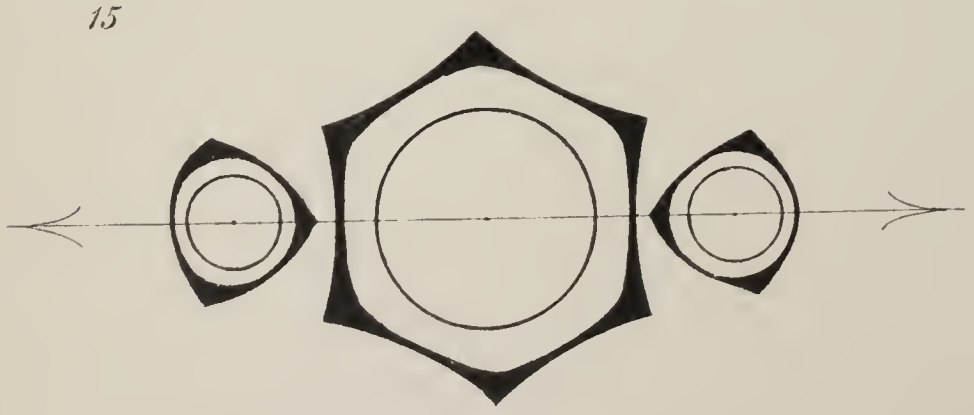
Fig. 5. Ein normales Ästchen von *Lycopodium complanatum* mit gegenständigen decussirten Blattpaaren und mit dem gabelständigen Blatte *m*.

Fig. 6. Ein ähnliches Ästchen, aber mit getrennter mittlerer Blattreihe, wobei die gabelständigen Blätter ihre Stelle verlassen und die Blätter abwechselnd stehen.

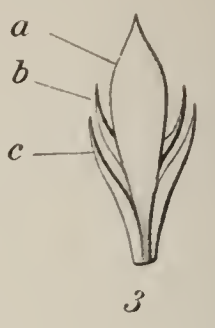
Fig. 7. Ein Rhizom von *Marsilia*, natürl. Grösse.

Fig. 8. Ein Rhizom von *Lygodium*, natürl. Grösse.

1

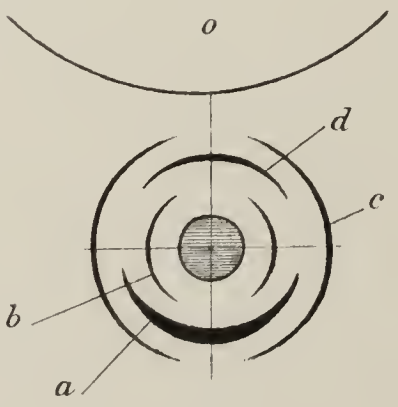


2



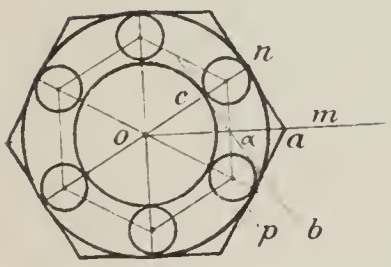
3

4

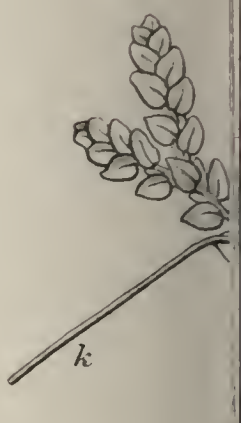


6

7



15



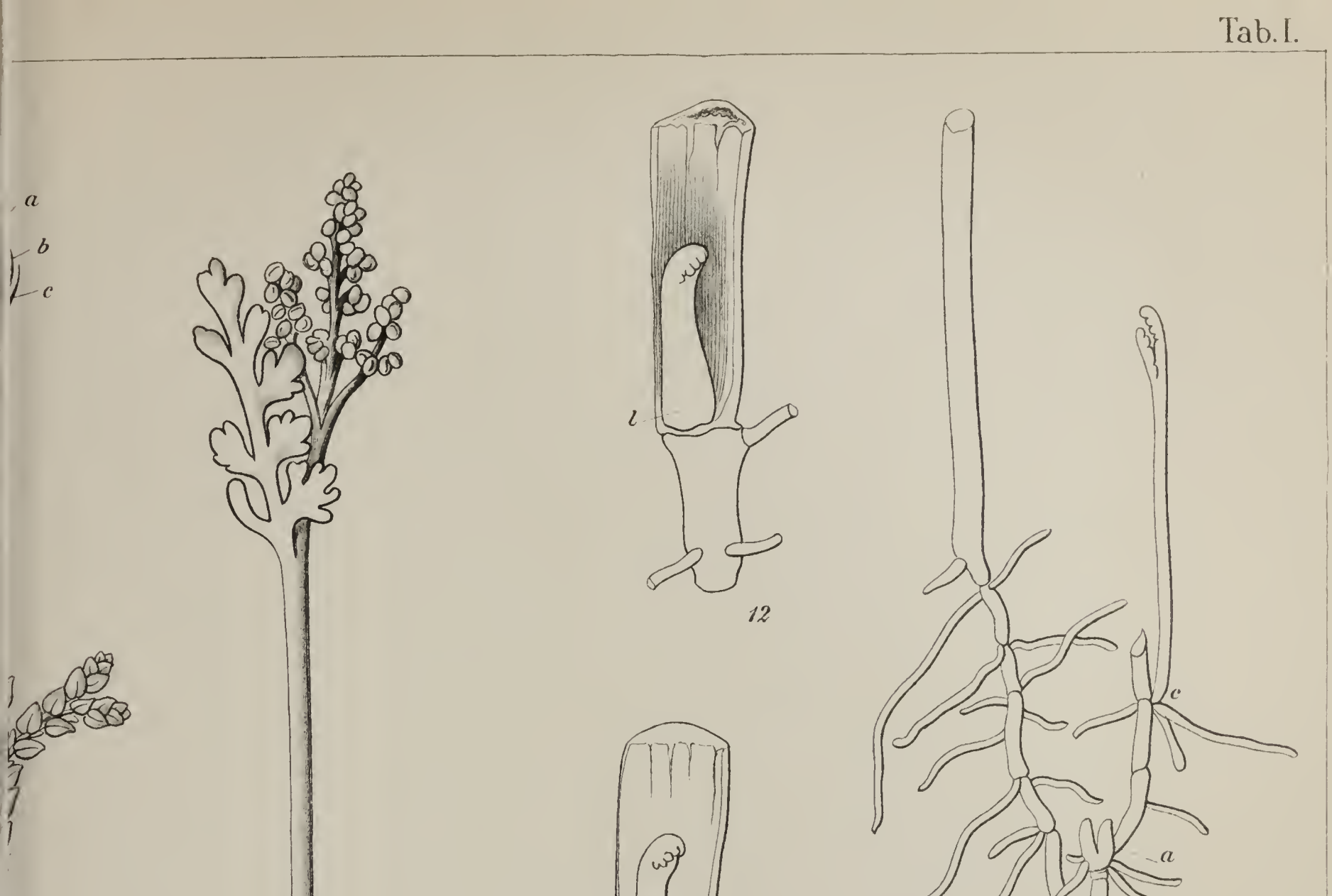
e

16

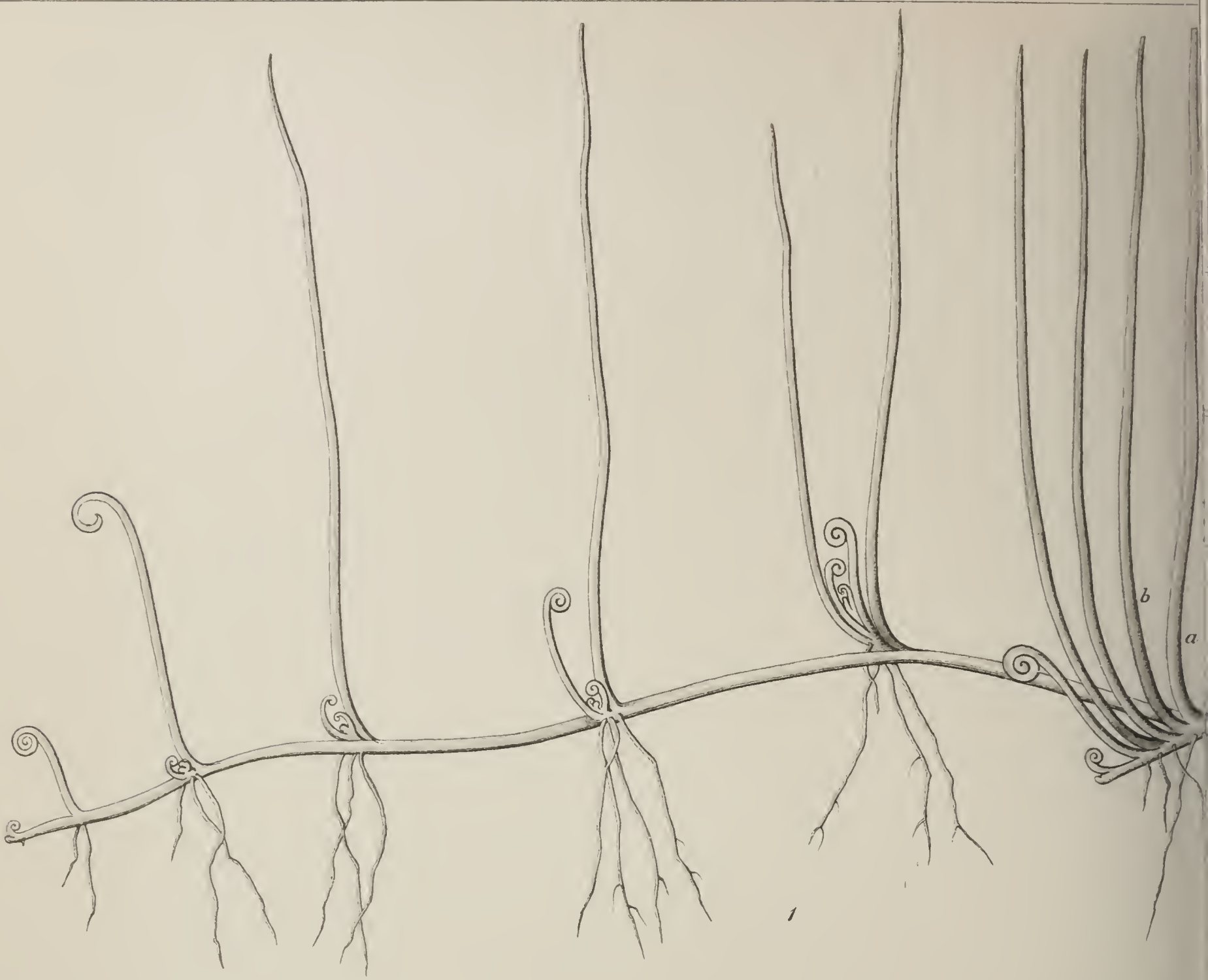
17

Velenovský del.

Rozpravy české Aka



Lith Farsky v Praze

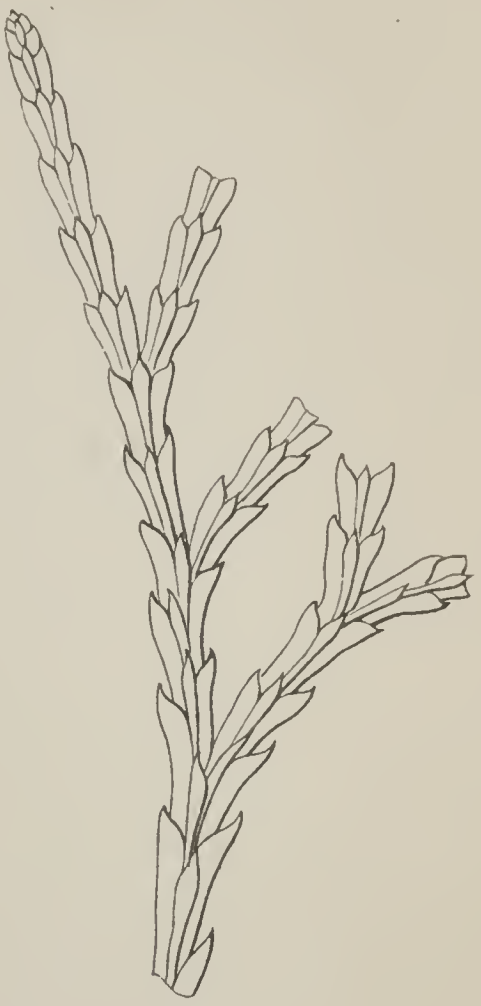


Velenovsky del.

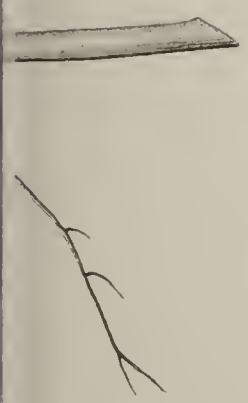
Rozpravy ceske Ak

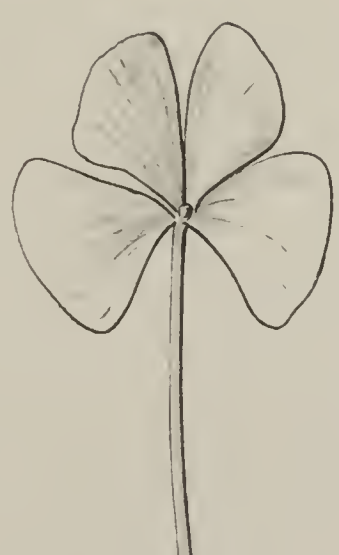
2

8



6





4

3

5

7

Lith. Fanicky & Fiala

nie Třída I. 1892

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 41.

O LISTECH ŠITÝCH A EXKRESCENČNÍCH.

TERATOLOGICKÉ PŘÍSPĚVKY K MORFOLOGII LISTŮ.

NAPSAL

Dr. LADISLAV JOS. ČELAKOVSKÝ.

SE DVĚMA TABULKAMI OBRAZCŮ.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

ÚVOD.

Abnormální listy, které na následujících listech popisuji a vyobrazuji, jsou samy o sobě zajímavy; větší ještě důležitosti nabývají tím, že nám dávají mnohé pokyny, jak třeba pojímati se stránky morfologické vytváření se plodolistů a prašníků rostlin jevnosnubných, poněvadž tyto rozplozovací listy na stejný způsob jak ony abnormity vegetativních listů jsou utvářeny. Normální tyčinky a plodolisty, tyto následkem svého srůstu, jsou přizpůsobením ke své zvláštní funkci tak nadobyčejně přeměněné listy, že jest nesnadno vniknouti v záhady jejich morfologické úpravy pouhým pozorováním jejich normálního tvaru, ba ani znalost vývoje tu mnoho nespomáhá. Vývojezpyt ukazuje sice přeměny, které nějaký ústroj od svého prvopočátku až do úplné vyspělosti své doznává, a tím ovšem také ledacos ze záhad hotového tvaru vysvětluje. Avšak listy rozplozovací jsou dle pravdivé náuky metamorfosní v základě svém totožny s listy vegetativními, zejména s lupeny, povstávají z těchto základů a do nich za jistých okolností, v tak zvaných abnormitách, opět se navrací. V tomto ohledu jest pak oprávněna otázka, jakého způsobu jsou ony přeměny, jimiž povstal by list rozplozovací z listu vegetativního neb tomu podobného, na př. z listu okvětního, když k tomu zároveň se přidruží ony vnitřní histologické změny, ve kterých záleží možnost funkce reproduktivní a sexuální. O tyto histologické pochody, které z vývoje nejlépe poznáváme, se ale nejedná, tážeme-li se po morfologickém zařízení plodolistů a tyčinek, nýbrž o přeměnu povšechného tvaru, která by i na listu rozplozování nesloužícím nastati mohla, a která by i nastati musila, aby povstal z něho tvar tyčinky neb plodolistu normálního. Tuto přeměnu však ani z hotového tvaru rozplozovacích ústrojů ani z jejich vývoje nade vši pochybnost jasně poznati nemůžeme, nýbrž toliko z pozorování oněch proměn, které ústroje tyto jeví, když přecházejí do formací listů vegetativních nebo též okvětních. Proto jsou přeměny abnormální řečeného druhu nejlepším a mnohdy i jediným prostředkem ku poznání čistě morfologickému. To jest tak jasné každé mysli nepředpojatě soudící, že jest s podivením posavadní předsudek mnohých botaniků, kteří, jde-li o morfologické poznatky, abnormitám co nejpečlivěji se vyhýbají a výhradně k vývinozpytu se utíkají, který jim přece v otázkách toho druhu žádné bezpečné odpovědi a objasnění dáti nemůže. Odtud pochází tak mnoho bludů v panující morfologii rostlinné.

Abnormální přeměny rozplozovacích listů fanerogamických jsou zvláště proto tak cenné, že nám ukazují všechny možné přechody z některého tvaru do tvaru jiného a že přeměny ty možná sestaviti v řadu, která vede od normálního listu rozplozovacího až do normálního listu vegetativního, takže srovnáním všech přechodních a prostředních tvarů poznáváme poznenáhlou proměnu a tím také význam všech tvarů jak přechodních tak konečně obou extrémů, o jejichž srovnávací poznatek v morfologii běží.

Ve vytváření listů rozplozovacích a vegetativních zachovává příroda zpravidla ostrý, pevnou hranicí stanovený rozdíl. Avšak v abnormálních případech, příčinami nám doposud namnoze neznámými, překročuje se tato hranice, jednak tedy řečeným abnormálním vývojem reproduktivních listů, které se jím k listům vegetativním přibližují, jednak se strany opačné abnormálními přeměnami listů vegetativních, kterými se tyto listy do jisté míry alespoň v principu připodobňují k listům rozplozovacím, tyčinkám neb plodolistům. Též i tyto abnormity vegetativních listů mají tedy pro poznání tvarozpytu listů reproduktivních značnou důležitost, ku kteréž jsem hned úvodními slovy poukázal. O takovýchto abnormitách bude jednáno v přítomné rozpravě.

Nabyv již před mnohými léty toho přesvědčení, studoval jsem dopodrobna abnormální přeměny plodolistů a jich vajíček, jakož i prašníků, jindy zase abnormální přeměny vegetativních listů, z nichž bylo možno nabyti dokladů pro tvarozpyt oněch částí rozplozovacích, o čemž jsem uveřejnil řadu pojednání.[1])

Jakožto pokračování níže uvedené řady prací předkládám Akademii rozpravu o listech šitých a výrostky nesoucích, jimiž rovněž nové se vrhá světlo na tvarozpytnou úpravu prašníků a plodolistů. Pozorování zde uveřejněná učiněna byla již před delší dobou; nebylo však času ani příležitosti, dříve přikročiti k jejich uveřejnění.

I.

Listy šité z abnormální odrůdy bezu černého.

V známém Chudenickém arboretu pěstuje se abnormální odrůda bezu černého, označená jakožto var. *linearis*.[2]) Listy této odrůdy jsou dílem jedno-

---

[1]) Buďtež zde uvedeny jich titule: Über die morphologische Bedeutung der Samenknospen, Flora 1874; Vergrünungsgeschichte der Eichen von *Alliaria officinalis*, Botan. Zeitung 1875; Vergleichende Darstellung der Placenten in den Fruchtknoten der Phanerogamen, Abh. d. böhm. Ges. d. Wissensch. 1876; Vergrünungsgeschichte der Eichen von *Trifolium repens*, Botan. Ztg. 1875; Chloranthien der *Reseda lutea*, Bot. Ztg. 1878; Über vergrünte Eichen der *Hesperis matronalis*, »Flora« 1879; Vergrünungsgeschichte der Eichen von *Aquilegia*, Botanisches Centralblatt 1882; Neue Beiträge zur Foliolartheorie des Ovulums, Abh. d. böhm. Ges. d. W. 1884; Teratologische Beiträge zur morphologischen Deutung des Staubgefässes, Pringsh. Jahrb. 1877; Untersuchungen über die Homologien der generativen Producte der Fruchtblätter bei den Phanerogamen und Gefässkryptogamen, Pringsh. Jahrb. 1880.

[2]) K. Koch praví ve své Dendrologii II. 1 str. 71, že jsou dvě odrůdy bezu černého s listy dvakráte zpeřenými známy, z nichž jedna, var. *laciniata*, má lístky ploché, druhá však, var. *linearis* čili *dissecta*, má je »velmi dlouhé, až i čárkovité a trochu ohnuté«. Lauche dí ve své Dendrologii o var. *linearis*, že má lístky »úzce čárkovitě střihané«. Chude-

duše, dílem však dvakráte zpeřené neb zpeřenosečné. Lístky mají velmi nepravidelný tvar s krajem všelijak vyštěrbeným, tvoří jenom částečně normální plochou čepel, opatřenou patřičnou svrchní a spodní stranou, totiž rubem a lícem, a vybíhají zhusta v dlouhý, úzce čárkovitý a oblý, kolkolem povahou rubovou se vyznačující konečný díl. Rub a líc poznají se snadno dle toho, že jest líc barvy sytě, ano tmavě zelené, rub pak mdle bledě zelené. Největší a právě charakteristická zvláštnost těchto lístků však záleží v tom, že morfologický kraj listový, dělící rub od líce, na různých místech čepele nalézá se jako pošinutý aneb zvrácený na stranu hoření, takže tam líc nezaujímá celou šířku listu. Rub na těchto místech sahá více méně daleko a hluboko do hoření strany listové. Vyhlíží to tak, jakoby kraj listu vyštěrbený ohrnut byl na stranu hořejší a na ní jako přirostlý neb přišitý, pročež tyto listy náležejí do kategorie tak zvaných listů šitých (genähte Blätter).

Jsou několikeré způsoby těchto šitých listů: ty, o nichž vedeme řeč, vyznačují se právě ohrnutím a »přišitím« kraje listového na stranu hoření, a sice buď se stran neb shora, nikdy ne z dolejška čepele. Nikdy nebývá kraj lístku na celé délce své ohrnut a přišit, nýbrž pouze sem tam na různých místech, nestejně hluboko do líce; tam, kde čepel jest široce vyvinuta, jako v obr. 1., 7. a 11., zaujímá šitý kraj toliko malou část celé šířky. Shora vniká rub ohrnutý někdy dlouhým chobotem do líce hořejší strany, jak na obr. 1. a 7. Čepel jest tu jako rozdělena v ušty neb laloky, které však nejsou ani zcela ploché, ani mezi sebou volné, nýbrž kraji proti sobě hledícími k líci ohrnuty a v této poloze rubem svým jako srostlými neb sešitými se býti zdají. Tam, kde čepel jest poměrně úzká a oba kraje ohrnuty a šity, zbývá mezi těmito pouze uzounký žlábkovitý proužek lícní strany, jako místy na obr. 9. a 10. Místy se sblížené ohrnuté kraje spojují, takže ani rýha lícní mezi nimi nezbude, tu pak obdává rub kolkolem celý povrch listů. Na některých lístkách se kraje opětně spojují a opět rozcházejí, což způsobuje vzhled velmi zvláštní, jelikož pak líc listu na několik částí nad sebou stojících jest rozdělen, mezi nimiž jsou místa súžená, bezlícná, na jejichž povrchu kolkolem pouze rub se vyvinul, což viděti na obr. 4., 5., 10., 12., 13. Někdy jest podélný pruh, ve kterém kraje listové jsou splynulé, ještě jemnou čarou naznačen, jak na obr. 4., 10. a 12. Velmi zhusta vybíhají lístky ve dlouhý, úzký, nitkovitý konec, jehož povrch má veskrze povahu rubu (obr. 1., 3., 9., 10., 11.), a také tu pozorujeme nezřídka jemnou čáru od spojených krajů níže ležícího líce po něm nějaký kus cesty vzhůru se táhnoucí (obr. 9., 10.). Někdy se na konci nitkovité zakončeniny vytvořil opět velmi úzký pruh lícní, jako na obr. 6., 10., 12. Je-li zároveň dolejší část lístku úplně ploše rozložena a od žebrovitého konce ostře oddělena, jako na obr. 6., zdá se, jakoby toto žebro vynikalo ze zadu ploché

---

nická odrůda má sice z části úkrojky úzké a dlouhé, z části ale také dosti široké a ploché; ale v tom nezáleží charakteristická její známka, nýbrž v tom, že náležejí mezi tak zvané listy šité, kteryžto znak řečení dendrologové při odrůdě *linearis* neuvádějí. Poněvadž pak netoliko jednotlivé, nýbrž veškeré listy téhož kře šité kraje mají, máme tu zajisté zvláštní odrůdu před sebou, kterou, protože jest patrně posud neznáma, nazval jsem var. *inversa*, podle krajů k líci obrácených. Možná ovšem, že povstala odrůda tato z odr. *linearis*.

čepelky. Zcela podobné tvary popsal a vyobrazil jsem také od *Codiaeum* (*Croton*) *variegatum.*[1], V principu shodují se s těmito šitými listy bezovými též tvary kornoutkovitých neb láčkovitých listů šeříka (*Syringa vulgaris*),[2]) z nichž jeden reprodukován v obr. 24. Též tento list šeříkový jest rozdělen ve dvě části; hoření část má svinuté a jako sešité kraje, zřejmým švem ještě znatelné, takže vnější povrch této kornoutovité části též odpovídá rubu listovému. Líc na vnitřní straně kornoutku jest takto oddělen od líce dolejší ploché části, která pode švem kornoutku se nalézá a ve které kraje listu ve švu spojené doleji se opět rozcházejí, jako na obr. 6. Patrně rovná se malá čepelka lícní na konci žebra v obr. 6. kornoutkovité části obr. 24. (toliko že není kornoutkovitě vyhloubena jak tato), neboť i její kraje jsou na zpodu jejím spojeny; velká, plochá, nahoře dvoulaločná čepelka basální tohoto lístku bezového však se rovná malé čepelce pod kornoutkem listu šeříkového z obr. 24.

Ježto čepel lístků abnormální odrůdy bezové jen částečně vyvinuta jest náležitě do šířky, jsouc všude tam, kde kraje její na hoření straně lístku se ohrnují a sbližují neb docela splývají, značně zúžena, jeví se nám v těchto tvarech více méně silné zakrnění čepele, zvláště tam, kde líc jen na úzký pruh obmezen neb na malé ostrůvkovité partie roztříštěn jest, jako na obr. 3., 4., 9., 10. Vrchol zakrnělosti listové jeví se tam, kde velká část lístku až i celý lístek na pouhé žebro redukován se spatřuje, jako v obr. 10., jenž představuje konečný lístek úplně žebrovitý, pouze na konci úzkým pruhem lícním opatřený, a dva postranní lístky v hoření celé polovici žebrovitě zakrnělé.

Proto, že s ohrnutím kraje spojeno bývá zakrnění čepele, stává se, že se nezřídka vyskytují též lístky velmi nestejnostranné, jelikož strana s krajem ohrnutým bývá užší než strana protější, nic neb málo ohrnutá, jak viděti na lístkách obr. 5., 7. Také není divu, že časem celá polovice neb část její bývá naprosto zakrnělá, takže ohrnutý, řeřabatý kraj u samého středního žebra se nalézá, jak to ukazují obr. 8. a 14.

Přirozeně má ohrnutí a »přišití« kraje listového ten následek, že tam, kde rub na hoření stranu se ohýbá, povstává dosti ostrá hrana, která nový, nepravý kraj listu přetváří a kterou nazveme hranou lomnou, poněvadž tam list vedle kraje jako list papíru složen a přelomen vyhlíží.

Posléze ještě třeba všimnouti si zvláštní odchylky v nervatuře, kterou způsobuje ohrnutý a šitý okraj listový. Odchylka tato záleží v tom, že podle ohrnutého kraje táhne se silný krajní nerv neboli svazek cévní, jenž na dolení straně listu žebrovitě vystupuje a pochází od obyčejného postranního nervu, jenž místo aby šikmo ku kraji odcházel a tam přestával, podle celého kraje parallelně se středním nervem běží a s jinými krátkými nervy postranními anastomosy tvoří V obr. 2. *A* vidíme na rubu lístku po levé straně takový podélný krajní nerv, jenž od nejdolejšího postranního nervu pochází; v pravé polovici tento nerv nedochází až do špičky, za to však hořeji jiný nerv ostatkem kraje probíhá. Obr. 13. *B* ukazuje tyto krajní nervy na rubu silně žebrovitě zúžené

---

[1]) Viz výše citované »Neue Beiträge zur Foliolartheorie des Ovulums«.

[2]) Viz výše citované »Untersuchungen über die Homologien atd.«

hoření polovice; v dolejší části čepele jest na pravo ležící polovice ještě dosti široce vyvinuta, ve které jiný obloukovitý nerv postranní vystupuje vzhůru do špice ohrnuté a sešívané; v druhé polovici (levé), zcela zakrnělé, běží podobný krajní nerv zcela blízko nervu středního.

Vylíčená modifikace nervatury má patrně ten účel, dováděti potřebné plastické látky ohrnuté a tam vždy silněji tlouštnoucí partii listové. Vytvoření se toho krajního nervu v ohrnutém a šitém lístku naší abnormální odrůdy bezové shoduje se úplně s vytvořováním se krajních nervů v placentách plodolistů uvnitř semeníku, které rovněž vyživují ztlustlou placentu a vajíčka na ní sedící. Přirovnání to jest tím více oprávněno, poněvadž také při plodolistech podobné ohrnutí kraje listovného se děje a podobné hrany lomné na nich povstávají. Vajíčka totiž jsou přeměněné úkrojky plodolistu [1]) (anebo, jsou-li ve více řadách na placentě, též listové výrostky čili exkrescence z líce plodolistu), tudíž odpovídá semeničná čára skutečnému kraji plodolistu, v úkrojky vajíčkové rozeklanému, ale tento kraj jest jak na šitých lístkách bezových do vnitř ohrnut a srostnutí plodolistů v semeníku děje se ohrnutým rubem až po hranu lomnou těchže plodolistů.

Nelze mi zde o věci té dle zásluhy se šířiti, avšak odkazuji k své rozpravě o abnormitách květů tulipánových, kterou zároveň s tímto pojednáním Akademii předkládám. Tam se dočte čtenář bližšího odůvodnění morfologické shody mezi normálním plodolistem ze semeníku pocházejícím a mezi listem s ohrnutými a šitými kraji a lomnými hranami, jaký jsem právě ve mnohých jednotlivých tvarech vylíčil u abnormální variety bezu černého.

Ku konci budiž připomenuto, že jsou také listy s krajem obšívaným, při kterýchž okraj ten ohrnut jest na stranu dolejší, takže líc listu po okraji ohnutý a lomený na rub listu přesahuje. Podobné listy viděl jsem a chovám ve sbírce od dubu zimního odr. peřenodílné (*Quercus sessiliflora* var. *pinnatisecta*).[2]) Okraj jest zde drobně vyhlodávaný (zdánlivě jako od housenky ožraný) a udaným způsobem podhrnutý a obšitý.

II.

Listy výrostky požeberními pošité od Phlox decussata.

Kdežto »šité« vyrostliny na hořejší straně listu bezu černého od vehrnutého kraje listového pocházejí, shledáváme na listech, o nichžto nyní vykládati zamýšlím, právě naopak výrostky, které podél středního žebra vznikly a které tudíž požebernými nazvány býti mohou. Listy toho druhu, na tab. II. vyobrazené, náležely abnormálně rostlé *Phlox decussata* Lyon (*Ph. acuminata* Pursh), na kterou mne v kuchyňské zahradě Chuděnické upozornil zahradník p. Wilda.

Začnu nejjednodušším případem, vyznačeným v obr. 15. Podle středního nervu vyrostly po obou stranách dvě dosti nízké, po kraji svém zprohýbané

---

[1]) Viz pojednání výše citovaná.

[2]) Tato abnormální odrůda, též v Chudenické školní zahradě pěstovaná, má listy hluboko, až blízko k samému střednímu nervu rozeklané, s úkrojky úzkými, čárkovitými, oddálenými a do širokého chobotu sbíhavými; zapsána jest pod názvem *pectinata*.

a chobotnaté lamelly, které daleko nedosahují ku konci listu jinak dosti pravidelně a široce vyvinutého, nýbrž něco nad polovičnou délkou do hoření plochy listové se ztrácejí, k dolejšku pak, výše povyrostše, obloukem přes zpodinu listu směřují a každá s krajem listu téže strany se pojí, takže tímto způsobem po každé straně zpodiny prohlubená kapsa nebo taška se vytvořila.

Tyto dvě vyrostliny netáhnou se veskrze rovnou čárou podle středního nervu, jsouce místy vynikajícími, místy zas ku středu vnikajícími choboty k hoření straně jako přišity, tedy podobně jako u bezu černého vehnuté kraje, které tam ovšem jen málo nad povrch lícní vyzdviženy jsou, kdežto vyrostliny požeberní naší *Phloxe* nad líc listový značněji povyrostly.

Dle zákona, jenž vůbec o exkrescencích platí, obrací obě vyrostliny svůj líc k lícní straně hlavního listu a odvrací tudíž od ní svůj bledý, nelesklý rub. Obě lamelly pak vespolek tvoří jako druhou čepel, lícem k líci hlavní čepele obrácenou a středním pruhem na střední žebro hlavní čepele přišitou; celý list nazván byl též dvoučepelným anebo i přečepeleným (überspreitet) nebo také čtyrkřídlým.

Jestliže se obě lamelly exkrescenční vespolek za jeden celek, totiž za druhou čepel na hlavní čepeli »přišitou«, považují, tož názor takový sice odpovídá neprostřednímu dojmu, jakým útvar ten na mysl působí, zvláště tam, kde, jak v obr. 19. a 20., obě lamelly nahoře i dole na středním nervu vespolek se spojují; avšak přesnější názor jest ten, že každá z obou lamell o sobě přináleží oné polovici listové, ze které vyrostla, a s ní vespolek jeden celek činí. To vychází na jevo zvláště tam, kde, jako v obr. 15., kraj lamelly na zpodu přechází přímo do kraje příslušné polovice listové a ve spojení s ní tvoří prohlubenou taštici. Každá polovina listu se svou exkrescencí budiž přirovnána k celému listu kornoutkovitému, jaký na obr. 24. vyobrazen; jako tam oba kraje celého listu jsou spojeny na lícní straně, tvoříce takto kornoutek nebo taštici, tak na listu obr. 15. každý kraj obou polovin jest spojen na lícní straně s krajem své exkrescence a každá polovina na zpodu tvoří zvláštní kornoutek neb taštičku. Každá polovina listu, ačkoli jsou obě v jeden celkový list spojeny, vytvořila si v exkrescenci na straně středního nervu další přírůstek a v kraji jeho druhý svůj kraj, jest tudíž jako zvláštní čepel individualisována a v tomto smyslu jest list ten skutečně dvoučepelný. Sluší jej tedy porovnati s listem, který buď normálně neb abnormálně uprostřed ve dvě parallelní čepele jest rozdělen. Mysleme si takové dvě čepele na konci společného řapíku tak proti sobě, aspoň v dolejší části, otočené, že rubem svým k sobě hledí, a pak opět podélným pruhem (nahoře krajem vnitřním) vespolek spojené neb srostlé: obdrželi bychom list jako v obr. 15. V skutečnosti ovšem obě polovice nejsou nikdy původně odděleny a tudíž také později nesrůstají, avšak stavba dvoučepelného listu jest vpravdě taková, jaká by byla, kdyby dvě zprvu oddělené čepele tím způsobem spolu byly srostly. Rozdělení čepele ve dví jest jen vnitřní, potenciální, jeví se však zřejmě ve vytvoření obou lamell výrostkových. Tímto významem a původem obou lamell exkrescenčních vysvětluje se zcela prostě, proč exkrescence ku hlavnímu listu stejnoznačný povrch, zde tedy svůj líc, obraceti musí.

Že tento názor a výklad jest správný, toho důkaz podám ještě předvedením obr. 16., 17. a 18. Zatím jen ještě slušno poukázati k jisté nápadné, a jak uvidíme, i závažné okolnosti. Pruh střední, mezi oběma vyrostlinami a jich kornoutky ležící, jest totiž velmi tenký, blánovitý, prosvítavý a velmi bledý, v pletivu svém chudý listovou zelení, a též postranní pruhy od něho vybíhající k chobotům, tvořeným od zprohýbané exkrescence, tutéž povahu mají.

Budiž tuto opět připomenuta abnormální varieta bezu černého, zejména ty formy jejích lístků, z nichž jedna vyobrazena v obr. 1. Choboty, jimiž v obr. tom vniká rub listový od kraje hořeního mezi výkrojky této čepele, jsou podobně tenké, blánovité a chudé na chlorofyll. Tvořeny jsou ohrnutými, obšitými a v jednu membránu spojenými neb jako srostlými kraji dvou laloků čepele listové. Magnus,[1]) jenž si jinde všimnul takovýchto blánovitých spojovacích pruhů, přirovnal je k plovacím blanám vodních ptáků, nazvav je »schwimmhautartige Verbindungslamellen«.

Na abnormálních listech naší *Phloxe* spojuje takováto blána obě poloviny listu, pokud sahají jejich exkrescence, tak jako spojuje podobná blána na obr. 1. z bezu černého dva úkrojky listové, čímž se toliko potvrzuje svrchu vyslovený názor, dle něhož listy s vyrostlinami požebernými ze dvou, sice v jedno spojených, čepelí se skládají aneb ve dvě takovéto poloviční čepele vniterně jsou rozděleny.

Nyní můžeme rozdíly a shodu mezi obšitými listy bezovými a mezi listy s výrostky požeberními ještě určitěji vytknouti. U bezu jsou normální kraje listu na lícní stranu ohrnuty a »obšity«, místy mezi dvěma úkrojky spojeny v blánu spojovací; na listech z rodu *Phlox* vytvořila si každá polovina listu na středním nervu zvláštním výrostkem nový okraj, rovněž k lícní straně ohrnutý a »přišitý«, a mezi oběma polovinami též takovou spojovací blánu. U bezu zasahují choboty spojovací blanou vyplněné od hořeního kraje listu mezi laloky dolů do čepele, v rodu *Phlox* chobot mezi oběma polovinami, jenž jest rovněž tvořen spojovací blanou, táhne se od řapíka vzhůru mezi oběma vyrostlinami do čepele listové.

Upravení listu v obr. 14. spočívá na témže základě jako na obr. 15., jenže jsou obě exkrescence velmi do šířky vyvinuty, tak že čepel hlavní až do polou výšky její zcela zakrývají; obě tato křídla končí mimo to nahoře řasnatým záhybem a výše nalézá se po každé straně ještě zvláštní malý, lasturovitě vydutý výrostek. Konečný záhyb levého křídla obrací se nahoře zpět a sbíhá nějaký kus dolů podle středního nervu listového; podobně se chová také hoření lalůček osaměle z té strany čepele vyrostlý. Křídlo pravé nejhořeji končí směrem vzhůru jdoucím; isolovaný lalůček nad ním vyniká půlkruhem, jsa na straně dolů obrácené, rub ukazující vydutý. Ty dva oddělené hoření výrostky jsou jako útržky od obou křídel se oddělivší, přece však k nim náležející. Mezera mezi lalůčkem odděleným a křídlem levé strany jest jenom širší, totiž podle středního nervu povytáhlý chobot mezi oběma; na pravé pak

[1]) Sitzungsberichte des botan. Vereines d. Prov. Brandenburg 1880. S. 100 atd.

straně jest přetržena souvislost mezi hořením koncem křídla oné strany a mezi pravým krajem isolovaného lalůčku, jehož líc a rub jest tak situován, že by líc jeho přecházel do líce křídla pravého a jeho rub do rubu křídla. Pozorný pohled na výkres, na němž líc jest veskrze temněji stíněn a rub světleji vyznačen, objasní, co zde praveno, lépe než veškerý popis.

Také na listu obr. 14. nalézal se mezi oběma vyrostlinami mázdřitý pruh čili blána spojovací, a z něho po každé straně vycházející (ve výkresu naznačený) krátký postranní blánovitý pruh, kterýmž totiž křídla výrostková k čepeli hlavní jsou ještě přirostlá neb přišitá. Tento pruh tvoří na každé straně listu jaksi příhrádku, dělící dolení až ke zpodu sahající tašku od menší tašky hořejší. Není v tom vlastně nic zvláštního; neboť také na listu obr. 15. jest každá exkrescence nad basální tašticí chobotem k čepeli hlavní přirostlá, tak že i zde chobot ten malou hořejší taštičku, však pro úzkosť exkrescencí velmi otevřenou obmezuje.

Jako lístky abnormální variety bezové, tak i listy abnormálního *Phloxe* ukazovaly častěji zakrnění čepele, v tom se jevící, že na místě celistvé čepele byly se vyvinuly toliko malé, částečné čepelky s povrchem lícním, v pravo a v levo na stažené, žebrovité, bezlícné střední části sedící. Obr. 16. a 17. představují takovéto listy ze strany hořejší. V obr. 16. sedí v pravo delší, na zpodu taškovitě uzavřená, nahoře do špičky listu vybíhající čepelka, která se patrně rovná téměř celé pravé polovici čepele v obr. 15. i s příslušnou exkrescenční lamellou, ježto však v obr. 16. až do špice listu se táhne a celý levý okraj částečné čepelky té tvoří. Levá polovice listu jest rozdělena ve dvě značně od sebe vzdálené, též tašticovité neb mískovité čepelky, o nichž platí totéž, co o čepelce pravé strany pověděno, jedině s tím rozdílem, že prohlubený jejich líc kolkolem uzavřen jest, ježto ani hoření z obou čepelek nevybíhá až do špice celého listu. Všecky tři čepelky obráceny jsou rubem svým vně položeným proti sobě i k žebru střednímu.

V obr. 17. zachovala se z čepele pouze nejhořejší, do špičky vybíhající část jako zvláštní, a sice plochá, pouze nad zpodkem, a to při středním nervu trochu vtisklá, podlouhlo-kopinatá čepelka, doleji jest opět žebrovitě neb řapíkovitě stažena, toliko na levé straně nesouc opět vydutou místičkovitou čepelku.

Ty dva posléze předložené listy podávají opětný jasný důkaz, že jest každá exkrescence integrující součástkou té polovice listové anebo části té polovice, ze které vznikla; neboť v místičkovitých čepelkách, které vždy po straně žebra, levé neb pravé, sedí a vznikají, spojena jest vždy exkrescence požeberní s příslušnou polovinou neb částí té poloviny čepelní v jeden celek.

K vůli úplně jasnému porozumění srovnejme ještě list žebrovitý, oddělené čepelky s patřičnou lícní stranou nesoucí, od *Phloxe* s listem žebrovitě vyvinutým a pouze malé oddělené lícní partie nesoucím od bezu černého, na př. v obr. 10 *b*. U bezu ony partie lícem obdařené, t. j. částečné čepelky, leží v řadě nad sebou na prostředku hoření strany listu, resp. lístku, poněvadž tam oba kraje lístku proti sobě jsou ohrnuty, tvoříce tak okraj jednotlivých malých částečných čepelek, které povstávají tím, že na hořením i dolením

konci vyvinuté partie lícní oba kraje se pojí a splývají; u *Phloxe* však leží čepelky jednostranně po pravé neb levé straně mediány, poněvadž tam kraje prvotní čepele listové vždy s krajem příslušné exkrescence na zpodu i konci, neb aspoň na zpodu každé čepelky se pojí, čímž právě mískovitý, kolem ohraničený tvar se žebrem podélně souvislé čepelky povstává. U bezu plochá část čepele nalézá se vždy na zpodu, žebrovitá část (s parciálními oddělenými čepelkami) tvořena vždy hořejškem lístku; u *Phloxe* naopak plochá lícní část nalézá se na konci a vybíhá ve špičku celého listu, žebro s čepelkami částečnými zaujímá dolejší část a přechází do řapíka. Posléze i v tom jest rozdíl, že čepelky obšitými kraji listovými ohraničené u bezu jsou úzké a málo prohlubeny; čepelky *Phloxe,* jejichž okraj na zpodu zvláště jest volně vyzdvižen, naproti tomu silněji vyduté a šířeji vyvinuté.

Jako na známých nám již listech bezových, tak i na listech abnormálních u *Phloxe* vyskytují se též listy polovičné, kde jedna polovice listu zakrněla až na úzký lem podle středního nervu. Takový list poloviční vyobrazen na obr. 18. Druhá dobře vyvinutá polovina má se strany středního nervu ovšem svou lamellu exkrescenční, tuto značně chobotnatě vykrajovanou a na čepel hlavní až blíže okraje lalůčky svými »přišitou«. Lamella tato se zde dosti podobá šitému a chobotnatě laločnatému okraji listů bezových, jako na obr. 7. neb 11., jednak i vykrajovanému a šitému kraji zakrnělé polovice listové na listech bezových, jaké jsou v obr. 8. a 13. Ale i zde ovšem jest zase ten podstatný rozdíl, že u *Phloxe* jest to exkrescence vyvinuté polovice, u bezu okraj zakrnělé polovice, které jsou laločnatě neb vlnkovitě vykrajovány.

Konečně nalezl jsem na *Phloxi* i takové listy, ovšem jen malé a úzké, tvaru kopinatého (obr. 19.), které na první pohled nezdály se v žádné souvislosti s listy, zvláště jako v obr. 16. a 17., žebrovitými a mískovité čepelky nesoucími. Na středním nervu čili v mediáně listu obr. 19. připevněna jest totiž velmi úzká, k oběma koncům do špičky súžená, ze dvou křídel sestávající čepelka. Souvislost s tvary dříve vylíčenými pozná se však srovnáním s listem obr. 15. Podstatný rozdíl listu obr. 19. záleží pouze v tom, že obě požeberní exkrescence nesahají dolů až ke zpodu čepele, tak aby se s kraji její mohly spojovati a tvořiti taštici; poněvadž k dolejšku dříve přestávají, pojí se mezi sebou na středním žebru, a tím povstává dvoukřídlá čepel výrostková, která s kraji hlavního listu nikde nesouvisí. Nicméně jsou to tytéž dvě požeberní exkrescence, které si vytvořil list obr. 15., a tudíž náleží i zde každá jako integrující část k jedné polovině tohoto listu. Jinými slovy: každá polovice vyrostla i zde na straně žebra v nový okraj ohrnutý proti líci jejímu a proto též lícem k ní hledící a částečně i »přišitý«; avšak taštičku na zpodu svém pro krátkost a nespojitost toho okraje výrostkového s protějším krajem hlavní čepele tvořiti nemůže.

Vyloživ rozmanité formy abnormálních listů od *Phlox decussata* a jich poměr k listům šitým bezu černého, chci k vůli porovnání ještě poukázati na požeberní vyrostliny, které se někdy na listech hlávkového zelí i kapusty *(Brassica oleracea* var. *capitata* et *sabauda)* vyskytují. Na obr. 25. vykreslena dolejší část takového listu se dvěma výrostky. Tyto vyrůstají též z hoření

lícní strany listu po obou stranách širokého středního nervu, jsou často četně nad sebou vyvinuty a mají podobu malých, jak hlavní list sám, síťovitě žilnatých lístků. Rozumí se, že dle zákona exkrescencí mají líc svůj na straně k líci své rodné poloviny listové, svůj rub ku žebru obrácený. Jak obrazec ukazuje, sbíhají jednou, a to dolejší svou polovinou podle středního nervu hlouběji dolů a krajem té poloviny jsou otočeny k nervu střednímu, někdy (jak na výrostku pravém) opět ku kraji listu ohrnuty. Tyto výrostky tedy s kraji listu nijak nesouvisí, jako výrostky obr. 19. a jako hoření lalůčky exkrescenční na obr. 14., z nichž na levo postavený ve své inserci velmi se podobá inserci vyrostlin zelných obr. 25., které však mají hoření konec v dosti velký, zaokrouhlený, lupenovitý ušet vyvinutý. Dle výše odůvodněného názoru požeberních exkrescencí jsou to úkrojky, vyrostlé z mediány na místě nedělených, nového, požeberního okraje, jenž jest podobně rozdělen, tak jako i hlavní čepel kapustová častěji bývá v laloky (ve výkresu na pravé straně) rozeklána.

Úkaz požeberních výrostků, na listech vegetativných pouze jako abnormita se vyskytující, jest typický a normální pro listy prašníkové, jak jsem to před léty vyložil v Pringsheimových Jahrbücher z r. 1877. Prašníky v plátky přeměněné anebo zlupenatělé a zazelenalé ukazují zcela podobné tvary, jako listy *Phloxe* v obr. 14., 15. a 19. Prašník krytosemenných rostlin má z pravidla 4 podélná pouzdra, po dvou v jedné théce (pytlíčku). Pozorují-li se přeměny prašníka při zlupenatění neb zplátkovatění jeho, vychází na jevo, že jsou théky tolik co poloviny listu čtyrkřídlého; pouzdra rovnají se čtyřem křídlům, z nichž dvě hoření jsou křídla výrostková, dvě krajní neb dolení pak se rovnají polovinám čepele hlavní.

Abych ukázal, že zlupenatělé tvary prašníka v tvarozpytném smyslu úplně se shodují s jistými vegetativními, vyrostliny nesoucími listy, položil jsem na tab. II. v obr. 20., 21., 22. tři takové přeměny prašníka třemdavy (*Dictamnus albus*), vzaté z mého pojednání v citovaném sborníku Pringsheimově. Obr. 22. jest tyčinka ještě méně přeměněná, prašník od nitky tu zřejměji oddělen. Na místě čtyř pouzder jsou zde vyvinuta 4 křídla listovitá, jemně vroubkovaná, dvě širší krajní a dvě užší hoření (neboť prašný list hledí svou hoření plochou na pozorovatele). Že jsou křídla tato skutečně přeměnou pouzder, viděti ještě i z toho, že na hořením konci, kde se ve špičce listu sbíhají, mají posud zachovanou povahu a ráz antheroidní, jako pouzdra normální.

A nyní porovnejme tento čtyrkřídlý list prašný s listy *Phloxe* obr. 14. a 15. Shledáme morfologickou shodu úplnou: neboť exkrescenční lamelly prašníka pojí se na zpodu s kraji čepele hlavní a tvoří dvě postranní tašky, zrovna tak jako na listech *Phloxe*. Na obr. 21. jest prašný list dokonale zlupenatělý, jeho lamelly výrostkové sahají hluboko ke zpodu celého listu, kdež se opět spojují s kraji čepele hlavní. Konečně v obr. 20. pojí se obě lamelly dole mezi sebou na středním žebře, zrovna tak, jako na vedle stojícím listu *Phlox*ovém v obr. 19.

Dále bylo by lze porovnati list *Phloxe* v obr. 14. s plátkovitě přeměněnou tyčinkou kamelie, kterou jsem též v Pringsheimových Jahrbücher l. c.

na tab. VII. v obr. 34. vyobrazil. Jedna polovice tohoto pylového listu jest přeměněna jako plátek, druhá zachovala svou theku dvoupouzdrou podle svého kraje; pak byl ještě rudiment pouzdra středního z druhé poloviny vyvinut. Nad oběma středními a lícními pouzdry pylovými, které se polohou rovnají vyrostlinám v obr. 14., byly vyrostly dva malé, oddělené, plátkovité lalůčky, které se tedy úplně shodují s oddělenými exkrescenčními lalůčky z líce listu v obr. 14. Také s vyrostlinami na listu zelném v obr. 25., co se volného lístečkovitého vývinu dotýče, daly by se lalůčky z kameliového prašného listu porovnati.

Tytéž tvary jako na prašníku zezelenalém neb zplátkovatělém opakují se tudíž na abnormálních listech *Phloxe*. Morfologická srovnalost těchto s oněmi jest zřejma a nepopíratelna. Neméně zřejmo však jest, že čtyři křídla zlupenatělého prašního listu ze čtyř pouzder normálního prašníka původ mají. Jestliže však pouzdra prašníková v lupenovité metamorfose ve čtyři křídla listu dvěma vyrostlinami opatřeného se vyvinouti mohou, tedy i v normálním pylorodém stavu nemohou míti jiného tvarozpytného významu, dle téže konkluse, kterou tyčinku celou musíme považovati za list metamorfovaný, poněvadž vegetativní přeměnou lupenovitým, nepochybným listem státi se může.

Z teratologických úkazů, tedy ze skutečných fakt a nikoli pouze z domyslu, následuje zcela určitě tento morfologický názor prašníka a tyčinky vůbec. Jest to list čtyrkřídlý, t. j. dvěma lícními (ventrálními) vyrostlinami listovými opatřený, v samém vnitřním pletivu jak obou polovin hlavní čepele listové, tak i obou exkrescencí pylorody a tudíž za účelem a výkonem rozplozovacím a pohlavním zvláštním způsobem vytvořený. Tatáž křídla, která v lupenovité metamorfose pouze vegetativní pletiva ve vnitřku svém tvoří, v metamorfose prašníkové vytvořují zvláštní pylorodné pletivo, a též stěny pletivo to na zevnitř obkličující jiným, funkcí prašníkové přiměřeným způsobem si upravují. Přechází-li prašník normální zlupenatěním ve tvar čtyrkřídlého lupenu, nemění tím nikterak své morfologické složení, nýbrž toliko anatomickou úpravu, jak jí vyžaduje funkce rozplozovací. Funkce a anatomické zařízení se mění, ale morfologický základ zůstavá, a poněvadž tento na zlupenatělém prašníku jest mnohem zřetelnější, srozumitelnější a vší pochybnosti prázden, nelze morfologický význam a složení prašníka poznati lépe a bezpečněji, nežli právě abnormální přeměnou ve tvar lupenovitý.

Morfologický tento výklad prašníka, nejprve od Al. Brauna a Wydlera, dvou nejlepších morfologů německých, poznaný, ode mne dalším pozorováním opřený a odůvodněný, vyplývá tedy jednak z nepopíratelných fakt, jednak z přesně logických vývodů. Mělo by se očekávati, že všickni botanikové pravdu tak jasně dokázanou musí uznávati. Zatím však mnozí, zvláště v Německu, které zrodilo Al. Brauna, morfologa nad jiné výtečného, uznání té pravdy se vzpírají. Že vůči patrným faktům jsou slepi — jinak to nazvati nelze — tohc příčiny jsou dvě: předně zakořenělý a též slepý předsudek, který abnormity neboli monstrosity (s příhanou často tak nazývané) pokládá za nezpůsobilé k vyvozování pravd a zákonů normální morfologie, — a za druhé theo-

retická, u botaniků fysiologického směru vzniklá představa, že ústroje rozplozovací od ústrojů vegetativních netoliko fysiologicky, nýbrž i morfologicky naprosto jsou rozdílny.

Pylová pouzdra — praví tito domnělí reformatoři zastaralé prý pouze formální morfologie — jsou samčí výtrusnice rostlin jevnosnubných a jako výtrusnice vůbec jsou to ústroje rozplozovací, »fysiologicky i morfologicky dobře charakterisované, které tvarozpytným ponětím listu neb stonku podříditi naprosto nelze; list (tyčinka) sice je nese, jest však fysiologicky i morfologicky od nich zcela rozdílný«. — Tak tvrdí zejména Sachs, Goebel [1]) a j. Sachs pro tento svůj náhled, velmi rozhodně a peremptoricky hlásaný, dovolává se i zoologů, kteří prý, co se rodidel živočišných dotýče, jsou úplně spokojeni s tím, že jsou to ústroje pohlavně rozplozovací, aniž by komukoli z nich napadlo, vydávati je za přeměnu nějakých ústrojů vegetativních.

Přihlédněme blíže ke všem těmto námitkám. Co se týče morfologické platnosti takových abnormit, které na metamorfose se zakládají, dovodil jsem již mnohokrát, posléze opět ve své rozpravě o Gymnospermech,[2]) že jsou opovrhovatelé abnormit těch úplně v neprávu; pročež se zde obmezím na to nejnutnější.

Staří autoři, jako Al. Braun, H. v. Mohl, Brongniart, Aug. de St. Hilaire a j., vážili si abnormit metamorfosních náležitě jakožto zřídla, z něhož čerpali — ovšem s náležitým důmyslem a rozšafnou opatrností — mnohá morfologická poučení. Teprve úspěchy methody vývinozpytné a nadšení pro tuto methodu (v Německu od časů Schleidenových) zplodily nedůvěru a nevážnost abnormit. Vývinozpyt má sice velkou cenu i pro morfologa, ale ku poznání původu a k odvození metamorfovaných údů rostlinných ve mnohých případech se nehodí, poněvadž první stadie, ze kterých vývinozpytci hlavně soudí, často již bývají fylogeneticky přeměněny, tak že pravou povahu a podstatu pochybného dílu rostlinného ohledáním prvních stadií seznati nelze. Vzdor tomu mnozí vývinozpytci veškerou svou náuku morfologickou výhradně z vývoje odvozují, při čemž z uvedené příčiny nevyhnutelně v hojné bludy upadávají. Poněvadž pak abnormity metamorfosní s takovýmito bludnými thésami se nesrovnávají a z bludu je usvědčují: tož morfologové vývinozpytečtí (čili genetikové), místo aby bludů svých poznali a se vzdali, naopak methodu abnormit (anamorfos) za klamnou a nespolehlivou vyhlašují. Jiného důvodu krom lichých vytáček pro své zavrhování této methody nemají.

Co se týče tvrzení, že jsou pouzdra pylová a výtrusnice vůbec od vegetativních údů fysiologicky i morfologicky naprosto rozdílny, odpovídám toto. Že jsou rozdílny fysiologicky, t. j. jako ústroje pro určitou funkci, jest pravda, ale že jsou i morfologicky rozdílny, to jest pouhé autoritativní tvrzení fysiologických morfologů, pro které žádný důkaz podán není, které však v první

---

[1]) Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie 1887. — Goebel, Entwickelungsgeschichte der Pflanzenorgane 1883.

[2]) Die Gymnospermen. Eine morphologisch-phylogenetische Studie. Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss. 1890.

řadě přeměny abnormální, potom ale též úvahy fylogenetické rozhodně porážejí. Odvolání se k zoologii nic neplatí, neboť, ačkoli v obou říších ústrojných mnohé zákony stejně vládnou a mnohé úkazy oběma jsou společny, přece má také každá říše své zvláštní úkazy a zákony. Jestliže plodidla živočišná jsou právě jen plodidla, nemusí tomu tak býti u rostlin, které vzdor tomu mohou míti ústroje rozplozovací přeměněné z ústrojů vegetativních, majících rozličnou funkci, ale stejnou tvarozpytnou povahu, tudíž i v ústroje vegetativní — v abnormálních případech — přeměnitelné. Že však skutečně jsou takto přeměnitelny, že tedy na prašním listu, jako i jinde, fysiologická funkce ve sloučení s anatomickou úpravou není nerozlučně vázána na zvláštní morfologický podklad, to dokazují právě abnormity, ve kterýchž ze základu a takořka zárodku pylových pouzder vyvinují se vegetativní křídla lupenu čtyrkřídlého. Fysiologičtí botanikové, kteří pro funkci pylového vaku a výtrusnic vůbec dekretují zvláštní, od každého vegetativního údu naprosto rozdílný a tudíž vegetativně neproměnlivý úd morfologický, staví se naproti jasným faktům abnormálních přeměn, a poněvadž tyto jsou jim nepohodlny, tedy je buď ignorují neb morfologickou platnost jich jako výstřední vývinozpytci popírají. Ačkoli pak sami sobě vindikují povýšené stanovisko moderně vědecké — poněvadž jsou fysiologie a vývinozpyt moderní vědy — přece si počínají nevědecky, poněvadž jest nevědecké, ignorovati neb svévolně popírati a vykrucovati nepopíratelná fakta vědecká, která jimi jsou, třeba jen v mimořádných případech, totiž abnormálně se objevovala.

Fysiologičtí botanikové tvrdí o listu prašném, že on pouzdra pylová čili výtrusnice pouze na sobě nosí, však ze sebe anebo v sobě netvoří, pročež učí Sachs ve své učebnici, že pouze nitka a konnektiv tvořeny jsou listem, théky však že jsou cosi od listu naprosto rozdílného, něco, co na listu vegetativním naprosto se nenachází. Pravda však jest, že toliko funkce a anatomická úprava pouzdra prašného na listu vegetativním schází, poněvadž jsou nahrazeny funkcí a anatomickým slohem vegetativním. Mylné však jest tvrzení, že spolu i morfologický substrát neb základ, jenž v normálním prašníku rozplozovací funkcí obdařen jest, ve vegetativní přeměně listu prašného více se nenachází. Vždyť čtyři křídla zlupenatělých tyčinek v obr. 20.—22. nejsou a nemohou býti nic jiného nežli vegetativně vytvořená čtyři pouzdra prašníková, jichž stopy ještě na hořením konci těch křídel v obr. 22. bylo spatřovati. Vždyť od normálního prašníka vede celá řada poznenáhlých přeměn, skrze tvary obr. 22., 21., 20. až do obyčejného listu, na němž zmizela poslední stopa obou prašníkových exkrescencí, jak jsem v Pringsheimově sborníku zcela očividně ukázal. Kde by se vzaly v zlupenatělých tvarech prašníka ony vyrostliny, kdyby nepocházely od přeměněných, vegetativně vyvinutých pouzder lícních? Nemůže to přece býti náhoda, že právě současně s mizením normálních pylových pouzder vegetativní exkrescence se objevují; takové tvary jako v obr. 22., prašníku tak podobné a ještě částečně antheroidně vyvinuté, náhodu naprosto vylučují.

Mylný náhled, jemuž se zdají ústroje rozplozovací u rostlin býti i morfologicky naprosto rozdílny od údů vegetativních, vyvrací se též úvahou fylo-

genetickou. Mezi zákony fylogenetického vývoje rostlinstva, které geniální Nägeli [1]) nejprve vystihnul, jest jedním z nejznamenitějších zákon zvegetativnění buněk a celých ústrojů rozplozovacích. Není zde na místě, o zajímavém předmětu tom se šířiti, stane se tak na jiném místě. Ale aspoň tolik připomenouti třeba, že celá cévnatá rostlina od kořenů až do výtrusů neb semen jakožto druhá generace antithetická rovná se plodu mechovému (sporogónu). Cévnatá rostlina se všemi svými údy vegetativními i rozplozovacími musela se vyvinouti ze sporogónu mechového, jednak jeho rozvětvením, jednak zvegetativněním výtrusorodného pletiva a celých výtrusnic. Sympodium stopek oněch výtrusnic vyvinulo se v stonek; výtrusnice samy, postranní na sympodiu, stavše se vegetativními ústroji, vyvinuly se v listy a po dalším rozvětvení v části listové. Proto také výtrusnice cévnatých rostlin, prašní pouzdra a jádro vaječné fanerogamů původně vždy na listech se nalézají. Kdyby ústroje rozplozovací, totiž výtrusnice a již sporogón mechů, nebyly schopny přeměniti se v části vegetativní, nebylo by nikdy povstati mohlo oddělení rostlin cévnatých tajnosnubných a pak veliké oddělení jevnosnubných. A tuto možnost zvegetativněti mají výtrusnice a jich pozdnější přeměny, jako pouzdra pylová, podnes; ovšem že se to stává jen v případech abnormálních. Tentýž pochod zvegetativnění, jenž nyní v malé míře v abnormitách se pozoruje, stal se v pradávné minulosti ve velkém zcela normálně velkolepou zákonitostí a opakuje se i nyní neustále, jestliže místo samých výtrusnic rostlina cévnatá vyvinuje stonky a listy.

Jestliže však se rozplozovací ústroje, sporangie, vaky pylové i vajíčka zvegetativněním přeměniti mohou v ústroje vegetativní, v části listu, na němž sedí (o čemž svědčí abnormity i fylogenetické úvahy), tedy nejsou od těchto částí morfologicky rozdílny, nýbrž toliko fysiologicky. Ježto pak ze čtyř pouzder pylových zvegetativněním vyvinují se čtyři křídla, z nichž dvě jsou původní polovice, dvě pak exkrescence zlupenatělého listu pylového, tedy i ona pylová pouzdra mají morfologický význam těchto křídel.

Odpor fysiologických botaniků proti srovnávání prašníka se čtyrkřídlým listem vegetativním byl kromě mylným náhledem, že ústroje rozplozovací od údů vegetativních, totiž listových, morfologicky jsou rozdílny, jak se zdá, způsoben též nedorozuměním, které u nich vzniklo označením prašníka jakožto metamorfovaného čtyrkřídlého listu. Onino odpůrci tomu podkládali nepochybně ten význam, jakoby měla býti tyčinka ve smyslu fylogenetickém přeměněna z původnějšího tvaru čtyrkřídlého listu vegetativního neb lupenovitého. To by ovšem byl názor chybný, proto že sporangie cévnatých rostlin fylogeneticky nepovstaly, jak právě jsem vyložil, přeměnou vegetativních údů, nýbrž naopak tyto vznikly vegetativní přeměnou (zvegetativněním) z původnějších sporangií. Tudíž také prašník se svými čtyřmi pouzdry pylovými jest fylogeneticky původnější [2]) nežli čtyrkřídlý list vegetativní, ve který se onen v abnormitě přeměniti může. Ale právě proto, že se zvegetativněním v takový list zvrátiti

---

[1]) Mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre 1884.

[2]) Původem svým se odnáší k fertilní, nikoliv lupenovité čepelce na listu v rodu *Ophioglossum*, o čemž níže ji.

může, má on i ve svém rozplozovacím ustrojení, se svými čtyřmi pouzdry, totéž morfologické složení jako vegetativní list čtyrkřídlý, a jest mu roven morfologicky, ačkoli fysiologicky a protož i anatomicky podstatně rozdílen.

Goebel [1]) ještě namítá, že prý závěrek z abnormit, odvozený ve příčině morfologického složení prašníka, již proto musí býti chybný, poněvadž se na prašníky Cykasovitých a Sosnovitých rostlin nikterak nehodí, ačkoli analogie těchto prašníků s oněmi u Angiospermů nemůže býti popírána. — V této námitce zračí se opět ono sofistické zahrávání s nejasnými, dvojsmyslnými pojmy, ve které autor ten tak často upadá. Co jest to analogie? Celá analogie záleží v tom, že u Gymnospermů jak u Angiospermů prašný list nese pylová pouzdra neb váčky, totiž samčí sporangie. Ale poměr těchto sporangií k listu prašnému, tudíž morfologické složení, jest u Cykadeí a Conifer velice rozdílný od onoho u Angiospermů a proto se ovšem morfologický typ prašníka Angiospermů nehodí na prašníky Gymnospermů, což oné vytčené analogii nikterak nevadí. Však i výtrusorodné listy kapradin, které též všude nesou sporangie a v tom svou analogii mají, nejsou všude dle stejného morfologického typu sestrojeny. Sporofylly Ophioglosseí na př. jsou v morfologickém ohledu velice rozdílny od sporofyllů Polypodiaceí. U oněch jest plodní list dvoučepelný a výtrusnice fertilní čepelky jsou v morfologickém smyslu úkrojky čepelky této, ovšem jako rozplozovací výtrusorodné ústroje vyvinuté; u Polypodiaceí však jsou plodolisty jednočepelné, lupenovitě vyvinuté, a sporangie jejich, v kůpkách na nervech zpodní strany (rubu) sedící, nerovnají se nikterak úkrojkům toho listu, nýbrž jsou to výrostky povahy metablastémů, určitěji povahy trichomové (chlupovité), pročež sám Goebel viděl se pohnuta, nazvati je leptosporangiemi na rozdíl od eusporangií, jaké mají na př. Ophioglossey. Když tedy již u kapradin tajnosnubných panují takové rozdíly v morfologické úpravě sporofyllů, proč by nemohly býti podobné rozdíly morfologické mezi prašníky Angiospermů a Gymnospermů? Také u Angiospermů jest prašný list exkrescencemi dvoučepelný a každé pylové pouzdro jeho rovná se celé řadě malých pouzder výtrusných u rodu *Ophioglossum*,[2]) což dosvědčují zcela určitě takové tvary prašníků (u Mimosovitého rodu *Parkia*, rodů *Clarkia* a *Gaura* mezi Oenothereami a p.), ve kterých každé podélné pouzdro rozděleno jest příhrádkami parenchymovými v celou řadu pouzdérek nad sebou stojících, zrovna jako v rodu *Ophioglossum*. Jestliže Goebel srovnání prašníka angiospermického se sporofyllem rodu *Ophioglossum* nazval »rêve de l'imagination«, cituje jistý výrok St. Hilaire'a, dlužno připsati to na vrub opačné vlastnosti, totiž nedostatku imaginace. Prašník Cykasovitých má zcela jiný sloh morfologický, podobný složení sporofyllu u Marattiaceí (*Angiopteris*), jelikož nese na zpodní straně skupiny nemnohých sporangií čili váčků pylových, které na způsob emergencí (ve smyslu Sachsově) vznikají. Opět jiné morfologické složení má prašník Conifer, upomínající podstatně na štítkovitý sporofyll Equise-

---

[1]) Vergleichende Entwickelungsgeschichte der Pflanzenorgane. (Schenk, Handbuch der Botanik 1883, str. 399.)

[2]) Viz citované mé pojednání v Pringsh. Jahrb., ročník XI.

taceí, což nejdokonaleji se jeví při rodu *Taxus* (tisu), od něhož i odchylnější tvary Cupressineí a Abietineí odvozeny býti mohou.

Musel jsem poněkud odchýliti se od vlastního předmětu této rozpravy, od líčení listů *Phlox*ových; měl' jsem zapotřebí obhájiti význam zlupenatělých přeměn prašníka, které se s listy *Phloxe* tak dokonale shodují, proti námitkám výstředních vývinozpytců a některých rostlinných fysiologů. Neboť mi šlo o to, abych ukázal, že abnormální listy *Phloxe* a vůbec listy s požeberními vyrostlinami tentýž typ morfologický představují, kterým prašní listy Angiospermů se vyznačují. Zajímavo při tom jest to, že i vegetativní listy mohou v abnormálních případech dle téhož principu se vyvinovati, kterým se řídí vytváření prašníků ve stavu normálním a který teprve v abnormitách prašných listů morfologickému porozumění přístupným se stává. Zároveň potvrzuje se tu stará, zvláště od St. Hilaire-a jasně vyslovená pravda, že to, co v abnormitách metamorfosních toliko výjimkou mimořádnou se děje, při jiných orgánech zcela normálně a stále se uskutečňuje, pročež takové abnormity vší pozornosti morfologa zasluhují. To tím více, že v abnormitách tentýž tvar, který v normálním případě působením vedlejších vlivů neb přizpůsobením k funkci reproduktivní méně průhledným, ano pochybným se jeví, morfologicky často mnohem srozumitelnějším se stává. Tak jest to i s prašníkem Angiospermů, jehož morfologické složení bez abnormit zůstalo by nám dojista navždy zatajeno, zůstaveno bludným domyslům, které jsem právě opět vyvrátiti se snažil.

Vysvětlení obrazců.

Tabulka I.

Obr. 1.—12. Lístky šité z listů abnormální odrůdy bezu černého (*Sambucus nigra* var. *inversa*). Všecky lístky vidí se ze strany své hořejší, v obr. 2. jest *A* lístek ze strany dolejší se svou zvláštní nervaturou, *B* týž ze strany hořejší.

Tabulka II.

Obr. 13. Lístek šitý od *Sambucus nigra* var. *inversa*, *A* ze strany hoření, *B* ze strany dolení, na níž zvláštní nervatura.

Obr. 14.—19. Listy šité a dvoučepelné od *Phlox decussata*.

Obr. 14. Výrostek z hoření strany listu přikrývá celou dolení polovici jeho; skládá se ze dvou v mediáně s hlavním listem spojených křídel, nad nimiž ještě po každé straně jeden mušlovitě neb kornoutovitě zakroucený malý výrostek. Morfologická strana hoření jest tmavě, strana zpodní na výrostcích světleji provedena.

Obr. 15. Podobný list, leč výrostky podélné na hoření straně listu podle mediány se táhnoucí jen úzké, kadeřavě zprohýbané a na zpodu s oběma kraji listovými se spojující, čímž povstávají dvě kapsy neb kornoutky.

Obr. 16. List malý, rozdělený v čepeli na tři partie, úplně pro sebe v kornoutkovité čepelky vyvinuté.

Obr. 17. List podobný, rozdělený v konečnou čepelku a v čepelku v levo postranní, mističkovitě vydutou.

Obr. 18. List poloviční; levá strana zakrnělá, pravá s šitou, vyštěrbovanou, s krajem se spojující mediánní exkrescencí.

Obr. 19. List dvoučepelný; čepelka vedlejší na hoření straně listu malá, úzká, ze dvou výrostků mediánních složená.

Obr. 20.—22. Dvoučepelné, čtyrkřídlé listy povstalé zlupenatěním prašníků třemdavy (*Dictamnus albus*). Čtyři křídla každého listu povstala ze čtyř pouzder prašníkových.

Obr. 20. Kraje čepelky exkrescenční dole na mediáně listu vespolek spojené, jak na obr. 19.

Obr. 21. Kraje mohutnější čepele výrostkové dole s kraji hlavní čepele spojené.

Obr. 22. Podobně jak v obr. 21., leč čepelka malá, tvaru prašníka bližší, pod ní se list stahuje v delší nitkovou část.

Obr. 23.—24. Abnormální listy šeříka (*Syringa vulgaris*). — Z Pringsheimových Jahrbücher f. wiss. Botanik XIV, Tab. XX.

Obr. 23. List dvouklaný, s kraji v rozkrojku na hoření stranu listu ohrnutými a k ní jako přišitými.

Obr. 24. List kornoutovitý, kraji svými doleji jako sešitý a na zpodu pod švem kornoutku opět na plocho rozložený.

Obr. 25. Dolejší část listu zelí hlavatého (*Brassica oleracea* L.), na hoření straně podél středního nervu se dvěma sbíhajícími výrostky.

RÉSUMÉ.

Teratologische Beiträge zur Morphologie des Blattes.

I.

Gesäumte Blätter von einer abnormalen Varietät von Sambucus nigra.

Die Figuren 1—13 auf den beifolgenden Tafeln stellen sogenannte genähte, genauer gesäumte Blätter von einer abnormen Abart des schwarzen Flieders dar. Die im Chudenicer Arboretum gepflanzte Varietät besitzt theils einfach, theils doppelt gefiederte resp. fiederschnittige Blätter mit eigenthümlich missbildeten Blättchen. Sie ist dort als var. *linearis* bezeichnet, obwohl die Beschreibung dieser Gartenabart in den Dendrologien von Koch und von Lauche (wo ihre Fiederblättchen nur »sehr lang, selbst linienförmig und etwas gekrümmt« und »schmal-linienförmig eingeschnitten« genannt werden, ohne dass ihre genähte Beschaffenheit erwähnt wird) nicht recht stimmt. Da nicht nur einzelne, sondern alle Blätter durchwegs genäht erscheinen, so muss man in ihr eine eigene abnormale Varietät anerkennen, welche vielleicht aus der var. *linearis* entstanden ist, und welche ich als var. *inversa*, wegen des inversen Blattrandes bezeichne.

Die Eigenthümlichkeit dieser gesäumten Blätter besteht darin, dass stellenweise die physiologische Unterseite, die durch matte Farbe und Glanzlosigkeit von der physiologischen Oberseite sich unterscheidet, vom Rande her nach der räumlichen Oberseite hinübergreift, so dass der beide physiologischen Flachseiten trennende wahre Blattrand nach aufwärts verschoben, scheinbar umgerollt und der oberen Seite wie angeheftet oder angenäht erscheint. Die eigentliche Oberseite wird hierdurch in ihrer vollen Breitenentwickelung beeinträchtigt, stellenweise wird sie so schmal, dass sie nur eine Rinne darstellt, z. B. in Fig. 9, 10. Nicht viel mehr fehlt, dass dort die Ränder einander berühren und sich vereinigen, so dass an solcher Stelle die Oberseite gänzlich verschwunden ist, und dass der dort schmale und dickliche Blatttheil rundum nur von einer Blattunterseite umgeben wird. Unter wiederholter Vereinigung

und Wiedertrennung der Ränder werden öfter mehrere übereinander liegende getrennte Oberseitenpartien gebildet (Fig. 4, 5, 10). Vom Vereinigungspunkte der Ränder verlauft oft eine feine vertiefte Linie als Spur der vereinigten Ränder auf den schmalen, oberseitenlosen Theil (Fig. 4, 9, 10). Die untere Partie des Blättchens ist gewöhnlich normal flach ausgebreitet, mit ungenähtem Rande und einer in voller Breite ausgebildeten Oberseite; der Endtheil meist oberseitenlos und zusammengezogen rippenartig entwickelt. (Fig. 1, 9, 10, 11.) Der invertirte Blattrand ist meist zackig und buchtig hin und hergebogen, wie ausgefressen; bisweilen springt die inverse Unterseite vom oberen Rande her mit schmaler tiefer Bucht in die Oberseite ein (Fig. 1); es ist, wie wenn je zwei Abschnitte der Blättchenspreite mit den umgebogenen Unterseiten nächst ihren Rändern verschmolzen wären. So ist die Bildung der einspringenden Verschmelzungslamellen auch aufzufassen, obzwar natürlich an eine wirkliche nachträgliche Verwachsung nicht zu denken ist: die Zipfel sind nicht anfänglich getrennt gewesen und später verwachsen, sondern haben sich von Anfang an verschmolzen gebildet. Die Verbindungslamellen sind membranös, durchscheinend, »schwimmhautartig«, wie sie Magnus, dem dergleichen anderwärts schon vorgekommen sind, genannt hat. Gebilde wie in Fig. 6, wo die der Grundspreite oben von rückwärts aufgesetzte stiel- oder hornförmige Spitze am Ende eine schmale Partialspreite gebildet hat, sind analog solchen *Syringa*blättern (Pringsheim's Jahrbücher XIV. Taf. XX. Fig. 39 und 43, diese letztere in vorliegender Fig. 24 reproducirt), wo aus dem Rücken einer kleinen Grundspreite eine gestielte Tute entspringt, welche aussen die physiologische Unterseite, innen die Oberseite aufweist. Auch eine nach der Oberseite stattfindende Einrollung der Ränder zweier benachbarten, theilweise vereinigten Abschnitte kommt bei *Syringa*blättern vor (Fig. 20), an die Bildung von Fig. 1 erinnernd und angenähert.

Halbseitige Blättchen kommen bei der Fliedervarietät ebenfalls vor (Fig. 8, 13), wo die eine Hälfte bis auf einen nach dem Mittelnerven oberseits invertirten, genähten Randsaum verkümmert ist. Bemerkenswerth ist noch die abweichende Nervatur in den gesäumten Blättern, welche auf der Blattunterseite (Fig 2 *A*, 13 *B*) wahrnehmbar ist. Die Abweichung von den normalen ungesäumten Blättchen besteht darin, dass sich nahe dem invertirten Blattrande ein vorspringender Längsnerv bildet, welcher dadurch entsteht, dass jederseits ein unterer Seitennerv, statt gerade schief zu einem Randzahn zu verlaufen, bogig empor sich wendet und dem Rande entlang eine Strecke weit oder auch bis zur Blattspitze verlauft, wobei er auch mit weiterhin vom Mittelnerv abgezweigten Seitennerven anastomosirt, nebstbei, soweit er den flachen breiten Blatttheil durchzieht, feine Seitenzweige zu den Randzähnen abgiebt, wie in Fig. 13 *B*. Er bildet sich offenbar zu dem Zwecke, um die zum geförderten Dickenwachsthum des invertirten Blattrandes nöthigen plasmatischen Stoffe zuzuleiten. Die Bildung dieses Randnerven lässt sich mit der Bildung des Gefässbündels in der Randplacenta eines Carpells in Parallele ziehen und dies mit um so grösserer Berechtigung, als auch bei den Carpellen eine ähnliche Einrollung oder Invertirung des die Ovula tragenden Blattrandes stattfindet,

wie in einer gleichzeitig der Akademie vorgelegten Arbeit über Abnormitäten in der Tulpenblüthe des Näheren ausgeführt wird.

II.

Excrescenztragende Blätter von Phlox decussata.

Das Exemplar der genannten *Phlox*art, welches die in Fig. 14—19 abgebildeten abnormalen Blätter vor mehreren Jahren erzeugt hatte, war im Chudenicer Küchengarten gewachsen. Die Blätter hatten längs des Mittelnerven zu beiden Seiten und zwar auf der Blattoberseite je eine longitudinale Excrescenzlamelle erzeugt. Diese Lamelle, die nach dem bekannten Gesetz der Spreitenverkehrung ihre physiologische Oberseite der gleichartigen Oberseite der Hauptspreite zukehrt, endet sich verflachend noch unter der Blattspitze, meist etwa in halber Höhe des Blattes, verlauft aber mehr oder weniger gekraust und gefaltet, und an ein paar Stellen mit je einer schmalen Bucht der Hauptspreite angeheftet, sich verbreitend bis zum Grunde derselben, wo sie mit dem Rande der zugehörigen Blatthälfte sich verbindend eine Art Tasche oder flache Tute bildet. In Fig. 15 sind die beiden Excrescenzlamellen schmal, beziehungsweise niedrig, in Fig. 14 aber so breit entwickelt, dass sie die untere Hälfte der Hauptspreite ganz bedecken. Dort sind oberhalb der grossen Excrescenzflügel noch zwei isolirte, kleine, muschelförmige Excrescenzen hervorgewachsen, welche wie abgelöste Endstücke der grossen Flügel anzusehen sind. Sie haben auch eine ausgesprochene Ähnlichkeit mit den blättchenartigen Excrescenzen am Mittelnerven der Oberseite der bekannten Krautblätter, davon ein Basaltheil mit zwei solchen Auswüchsen in Fig. 25 abgebildet ist.

Halbseitige Excrescenzblätter kamen bei der *Phlox* auch vor (Fig. 18); nur eine Blatthälfte derselben war entwickelt und mit ihrer medianen, zackig ausgerandeten und »genähten« oder angehefteten, taschenbildenden Excrescenz versehen, die andere bis auf einen schmalen glatten Saum zur anderen Seite der Mittelnerven verkümmert. Die Verschiedenheit von den ähnlichen halbirten Blättchen des Flieders (Fig. 8 und 13) ergiebt sich danach von selbst. Obwohl die meisten abnormen Blätter am Grunde taschenbildend waren, so kamen doch auch Excrescenzblätter ohne Taschen, wie in Fig. 19, vor, die dann klein, lanzettlich waren und sehr schmale Excrescenzflügel am Mittelnerven trugen, welche aber unterwärts nicht mit den Rändern der Hauptspreite, sondern unter sich am Mittelnerven, ebenso wie am oberen Ende verbunden waren, daher keine Taschen zu Stande kommen konnten.

Endlich gab es auch ganz merkwürdige, auf eine ähnliche Rippe, wie manche der früher beschriebenen Fliederblättchen, reducirte, dabei aber einzelne isolirte, schüssel- oder tutenförmig geschlossene, auf der inneren Hohlfläche die Beschaffenheit der physiologischen Oberseite aufweisende Partialspreiten in Mehrzahl tragende Blätter. Diese Spreitchen sassen immer entweder rechts oder links von der Mediane des sonst rippenartig zusammengezogenen Blattes. In Fig. 16 sitzt rechts eine längere solche Spreite, welche oberwärts in die lanzettförmige Blattspitze ausgeht, links eine von der Blattspitze ent-

fernte obere und unter dieser weiter entfernt eine zweite schüsselförmige Partialspreite. In Fig. 17 endet das Blatt mit einer flachen, am Grunde nicht geschlossenen bilateralen Theilspreite, darunter trägt der stielartig zusammengezogene und in den Blattstiel übergehende Theil links nur noch eine schüsselförmige Theilspreite. Wie diese Bildung zu verstehen sei, lehrt ein Vergleich mit den Blättern Fig. 14 und 15, sowie 18. Die rechtsseitige Partialspreite in Fig. 16 entspricht der ganzen rechten Hälfte des Blattes Fig. 15 sammt zugehöriger Excrescenzlamelle; die linke Hälfte ist aber auf eine Rippe reducirt; nur 2 getrennte Theile der Spreite sind übrig, welche mit dem zugehörigen Excrescenzstücke die schüsselförmig umrandeten zwei Partialspreiten bilden. Fig. 17 ist im unteren Theile der Spreite halbseitig; nur ein Basalstück der linken Hälfte bildet mit zugehöriger Excrescenz das Becken; die rechte Hälfte ist unterwärts auf die Rippe ganz reducirt.

Die Blätter Fig. 16. u. 17., wie auch schon die halbseitigen Fig. 18. beweisen, dass die beiden Excrescenzlamellen nicht, wie es in Fig. 19 den Anschein hat, eine ventrale, angewachsene Spreite repraesentiren, sondern dass es integrirende Theile der beiden Spreitenhälften sind, welche sich zu besonderen Partialspreiten zu individualisiren beginnen, indem sie eine jede an der Mediane, wo sie zusammenhängen, einen Zuwachs mit einem zweiten Blattrande bekommen. Daher auch die so häufige basale Taschenbildung; denn es bildet jede Hälfte ihre Tasche, ganz ebenso wie in Fig. 24 die ganze bilaterale Spreitenpartie mittelst Vereinigung ihrer beiden Halbseiten und der zugehörigen Ränder eine einzige Tasche bildet. Wir müssen uns also Blatt 14 u. 15 in der unteren Partie als getheilt, beide Hälften als nach oben umgerollt und tutenbildend, mit den Unterseiten aber in der Blattmediane vereinigt denken. Damit stimmt die eigenthümliche Erscheinung, dass der Medianstreif zwischen beiden Excrescenzlamellen ebenso häutig, durchscheinend, chlorophyllarm, kurz »schwimmhautartig« entwickelt ist, wie die Verbindungslamelle der Spreitenabschnitte der Blättchen des Flieders in Fig. 1.

Sowie nun der morphologische Typus der am Rande genähten Blätter von *Sambucus* den Typus des Carpells wiederholt und in der Laubblattformation nachbildet, beziehentlich, weil die Laubblätter den Carpellen im Entwickelungsgange der Pflanze vorhergehen, vorbildet: ebenso bilden die Excrescenzblätter von *Phlox* den morphologischen Typus des Angiospermen-Staubblatts vor. Denn es ist, wie schon Al. Braun und Wydler gefunden haben und wie ich es in Pringsheim's Jahrbüchern Bd. XI. genauer ausgeführt habe, das Staubblatt der Angiospermen ein ebensolches vierflügliges Excrescenzblatt, an welchem die zwei vorderen oder inneren Staubfächer von den sexuell reproductiv ausgebildeten Excrescenzlamellen und die zwei äusseren oder seitlichen Fächer in den beiden Hälften der primären Hauptspreite gebildet werden. Das erweisen am deutlichsten die verlaubten Formen des Staubblatts, in welchen die 4 Antherenfächer in die vier Flügel eines solchen Excrescensblattes auswachsen. Des Vergleiches wegen sind in Fig. 20—22 drei Formen vergrünter Staubblätter von *Dictamnus albus* (aus Pringsheim's Jahrb. entlehnt) reproducirt. Es entsprechen Fig. 22 und 21 den *Phlox*blättern Fig. 14 u. 15;

Fig. 20 von *Dictamnus* entspricht genau dem *Phlox*blatte Fig. 19. Die isolirten Läppchen der Excrescenz in Fig. 14 entsprechen überdies den Excrescenz-Läppchen oberhalb der beiden mittleren Staubfachexcrescenzen eines halbseitig petaloid gewordenen Staubblatts Fig. 34, Taf. VII in Pringsh. Jahrb. XI.

Diese Übereinstimmung des morphologischen Baues der *Phlox*blätter und der verlaubten Staubblätter ist unbestreitbar, ebenso die Umbildung der letzteren aus normalen Staubblättern, nämlich die Umbildung reproductiver Organe (Pollenfach oder Sporangium) in vegetative Organe (Flügel des Excrescenzblatts). Gleichwohl wird diese eclatante Wahrheit von den Anhängern der entwickelungsgeschichtlich-mechanisch-physiologischen Schulen, zumal in Deutschland bestritten.[1]) Zwei Gründe sind es, aus welchen man sich den klarsten und aufgeklärtesten Thatsachen gegenüber blind stellt: erstens das eingewurzelte Vorurtheil, dass die Abnormitäten durchwegs für morphologische Deductionen unbrauchbar seien, und zweitens die ganz willkürliche Annahme, dass die Fortpflanzungsorgane von den vegetativen Organen »nicht nur physiologisch, sondern auch morphologisch durchaus verschieden seien, daher es gar nicht angeht, sie den morphologischen Begriffen Blatt oder Stamm zu subsumiren«. Ein namhafter Physiologe beruft sich noch darauf, dass es doch auch den Zoologen nicht einfällt, die Geschlechtsorgane der Thiere anderen Organbegriffen zu subsummiren, dass sie sich vielmehr mit Recht begnügen, sie einfach nur als Geschlechtsorgane (als Gebilde sui generis) hinzunehmen.

Was das Vorurtheil gegen die Abnormitäten (nämlich die auf Metamorphose beruhenden Anamorphosen) betrifft, so habe ich schon so vielfach dagegen gekämpft, zuletzt noch in meiner Arbeit über die Gymnospermen, dass ich hier darauf verzichte. Wem die von mir beigebrachten Vergleichsserien nicht die Augen zu öffnen vermögen, mit dem ist eben nicht zu rechten. Die Anamorphosen werden zumeist nur darum zurückgewiesen, weil sie viele aus der oft unzulänglichen und durch ihre Zweideutigkeit trügerischen Entwickelungsgeschichte geschöpfte Irrthümer und falsche theoretische Vorstellungen, wie z. B. eben die in den Fortpflanzungsorganen der Pflanze erblickten »Gebilde sui generis«, widerlegen.

Was diesen zweiten Irrthum betrifft, so wird er eben durch die abnormen Metamorphosen der Stamina, Ovula etc. als solcher nachgewiesen, doch wird natürlich dieses Argument Jene, die von dem ersten Irrthum nicht abzubringen sind, auch nicht überzeugen. Die Berufung auf Analogien der Zoologie ist unstatthaft, weil die beiden organischen Reiche, wenn sie auch viele Bildungsgesetze mit einander gemein haben, doch auch ihre eigenen Gesetze besitzen, die auf das andere Reich nicht anwendbar sind. So mögen immerhin die Geschlechtsorgane der Thiere nur Geschlechtsorgane sein, während es sich mit den pflanzlichen Reproductions- und Geschlechtsorganen anders verhalten kann.

---

[1]) Zu vergleichen namentlich Goebel's Vergleichende Entwickelungsgeschichte der Pflanzenorgane (1883), S. 118 und 399.

Und es verhält sich auch in der That anders, da die Fortpflanzungsorgane der Pflanze, indem sie bei Zeiten aufhören Fortpflanzungs- resp. Geschlechtszellen zu bilden und dafür vegetative Zellgewebszellen erzeugen, in vegetative Organe und zwar ganz bestimmter Art umgewandelt werden können. Dabei ändert sich nur die Function und anatomische Ausbildung; der morphologische Bau bleibt derselbe in der Verlaubung wie im reproductiven Zustand. Der vegetative Zustand zeigt aber den morphologischen Bau und Werth der Fortpflanzungsorgane erst klar und deutlich und darin besteht eben der morphologische Werth der vegetativ gewordenen Abnormität.

Dass Fortpflanzungsorgane vegetativ werden können, das ergiebt sich auch aus einer phylogenetischen Betrachtung. Die Gefässpflanze ist die zweite antithetische Generation, welche ursprünglich (bei den Bryophyten) ein blosses Fortpflanzungsorgan war. Die vegetativen Organe der Gefässpflanzen können nicht aus Nichts entstanden seien, müssen also einem Processe des Vegetativwerdens im Verein mit Verzweigung des Sporogóns ihr Dasein verdanken. Wer dies eine »Rève de l'imagination« nennen wollte, würde sich damit zum Gegner der Descendenztheorie bekennen. Das »Vegetativwerden« [1]), welches im phylogenetischen Entwicklungsprocess eine so hervorragende Rolle spielte, wiederholt sich noch immer, und zwar als abnormaler Process in den Vergrünungsabnormitäten.

Diejenigen, welche die Fortpflanzungsorgane für Gebilde sui generis ausgeben, leugnen im Gegensatz zu den Thatsachen der Vergrünung und zum Grundsatz der Descendenzlehre die Möglichkeit des Vegetativwerdens; sie behaupten z. B. vom Staubblatt, dasselbe sei nur der Träger der Pollenfächer, welche, wie sie vorgeben, bei der Verlaubung total verschwinden; das von letzteren völlig verschiedene Staubblatt bestehe nur im Staubfaden und im Connectiv. »Nichts ist verfehlter — heisst es in der citirten Vergleichenden Entwicklungsgeschichte der Pflanzenorgane — als jene Blättchen (nämlich die 4 Flügel der verlaubten Anthere) für Umwandlungsprodukte der Pollensäcke zu halten — diese haben sich gar nicht ausgebildet, oder es findet sich ein sehr reducirtes pollenerzeugendes Gewebe.« — Vor- und Nachsatz dieser eigenthümlichen Beweisführung widersprechen einander aber nicht im geringsten: ausgebildet haben sich die Pollensäcke freilich nicht, aber umgebildet, vegetativ umgebildet haben sie sich und die Flügel sind daher ganz gewiss deren Umwandlungsprodukte. Es kann doch kein Zufall sein, dass dort, wo die normale Anthere ihre 2 vorderen Fächer hat, in der Verlaubung die 2 Excrescenzflügel sich finden, dass in weniger verlaubtem Grade, wie in Fig. 22, noch die ganze Form der Anthere erhalten bleibt, und völlig ausgeschlossen wird der Zufall dadurch, dass z. B. in Fig. 22. die Flügel oberwärts noch pollenfachartige Beschaffenheit haben.

Der Widerspruch gegen den aus den Abnormitäten erkannten morphologischen Bau der Anthere scheint noch durch ein Missverständniss des Aus-

---

[1]) Siehe Nägeli's geniale Theorie der Abstammungslehre; dann auch meine Abhandlung über die Gymnospermen.

drucks, dass die Anthere ein metamorphosirtes Excrescenzblatt ist, genährt zu werden, als ob damit gesagt würde, die Anthere sei zuerst (phylogenetisch) ein vegetatives Excrescenzblatt gewesen und habe später die Flügel in Pollenfächer ausgebildet. Dies wäre freilich gefehlt, denn phylogenetisch hat, wie gesagt, das Gegentheil stattgefunden. Das Staubblatt mit seinen 4 Pollenfächern ist also ursprünglicher als das 4flügelige vegetative Blatt, welches erst in der Abnormität entsteht, es ist ebenso ursprünglich wie die fertile Blattspreite von *Ophioglossum*, die demselben Typus angehört. Dies spricht aber nicht dagegen, dass die normale Anthere nicht bereits ein 4flügeliges Blatt ist von morphologisch gleichem Werthe wie das vegetative Blatt, welches aus ihr hervorgehen kann.

Der Verfasser der »Vergleichenden Entwickelungsgeschichte« wendet gegen die Richtigkeit der ebengenannten These noch das ein, dass dieselbe »auf die Staubblätter der Cycadeen und Coniferen gar nicht anwendbar ist, obwohl deren Analogie mit denen der Angiospermen nicht in Abrede gestellt werden kann.« — Wiederum sind Vor- und Nachsatz — jene Nichtanwendbarkeit und diese Analogie — mit einander ganz wohl verträglich. Die Analogie besteht nur darin, dass das Staubblatt bei Angiospermen und Gymnospermen Pollenfächer oder Pollensäcke, männliche Fortpflanzungsorgane trägt. Aber das Verhältniss dieser Pollenfächer oder Sporangien zum ganzen Staubblatt, somit der morphologische Bau des letzteren ist bei Gymnospermen und Angiospermen sehr verschieden. Sind ja doch die Sporophylle der Farne, deren Analogie ebenfalls darin besteht, dass es sporangientragende Blätter sind, auch nicht überall nach dem gleichen Typus gebaut. Die Sporophylle der Ophioglosseen z. B. sind morphologisch sehr verschieden von jenen der Polypodiaceen. Bei jenen sind sie doppelspreitig, und die Sporangien sind fertile Blattglieder (Blattzipfel) der ventralen Excrescenzpreite; bei den Polypodiaceen sind sie einfachspreitig und die Sporangien, die in Soris auf der Blattunterseite stehen, sind selbstverständlich keine Blattzipfel, nicht einmal Excrescenzen, sondern Metablasteme, resp. Trichome (freilich nicht vegetativer, sondern reproductiver Ausbildung, Leptosporangien, nach ihrem Ursprung aus der Epidermis genannt). Ähnliche Verschiedenheiten, wie unter den Farnen, bestehen auch zwischen den Angiospermen und Gymnospermen im morphologischen Bau der Staubblätter. Das Staubblatt der Cycadeen hat einen ganz anderen Bau, als das angiosperme Staubblatt, einen Bau, der dem des Sporophylls des Polypodiaceen und mehr noch der Marattiaceen analog ist; wiederum nach anderem Typus gebaut ist das Coniferenstaubblatt, welches dem Sporophyll der Equiseten am nächsten steht. Die Übereinstimmung im Typus des angiospermen Staubblatts und des Sporenblatts von *Ophioglossum* halte ich dagegen entschieden aufrecht. Nur mangelhafte Imagination kann diese Übereinstimmung als eine »rève de l'imagination« bezeichnen. Nur insofern besteht ein relativer Unterschied, als die ventrale Excrescenzpreite bei *Ophioglossum* frei ausgegliedert ist, während die Excrescenzlamellen des angiospermen Staubblatts es nicht sind.

Nach Widerlegung aller Einwände gegen den durch die Abnormitäten erwiesenen morphologischen Bau der angiospermen Anthere kann es mit Be-

stimmtheit ausgesprochen werden, dass die vegetativen Excrescenzblätter von *Phlox decussata* den morphologischen Typus jenes Staubblatts im Wesentlichen genau wiederholen.

Erklärung der Figurentafeln.

Tafel I.

Fig. 1—12. Am Rande genähte oder gesäumte Blättchen der Laubblätter einer abnormalen Varietät (var. *inversa*) von *Sambucus nigra*, von der Oberseite; Fig. 2. A von der Unterseite betrachtet.

Tafel II.

Fig. 13. Genähtes Blättchen von *Sambucus nigra* var. *inversa*, A. von der Oberseite, B. von der Unterseite.

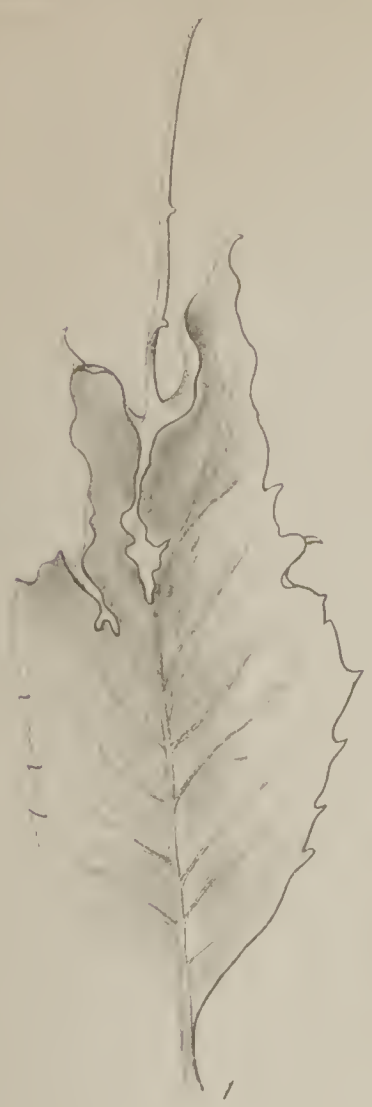
Fig. 14.—19. Excrescenztragende Blätter von *Phlox decussata.*

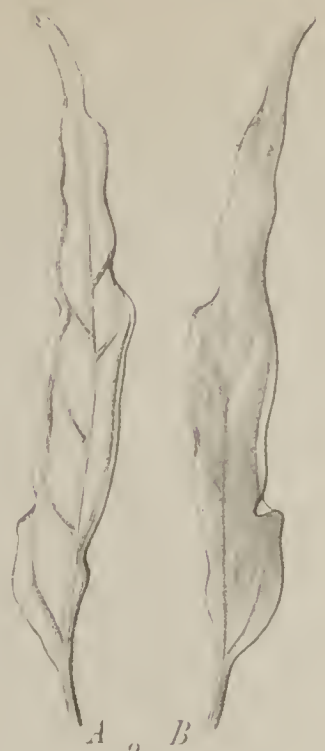
Fig. 20.—22. Verlaubte excrescenztragende Staubblätter von *Dictamnus albus.*

Fig. 23.—24. Abnorme Blätter von *Syringa vulgaris.*

(Fig. 20.—24. aus Pringsheim's Jahrbüchern wiederholt.)

Fig. 25. Untere Partie eines Krautblatts mit zwei Excrescenzspreiten am breiten Mittelnerven.

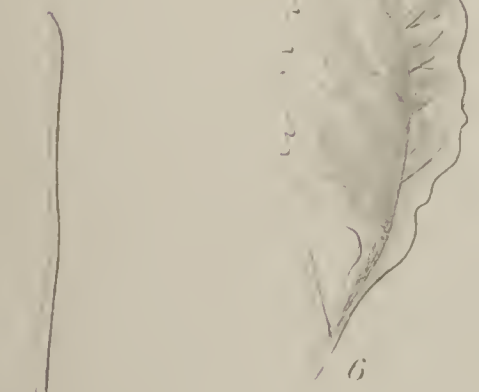

1


A 2 B

3

4

5


6

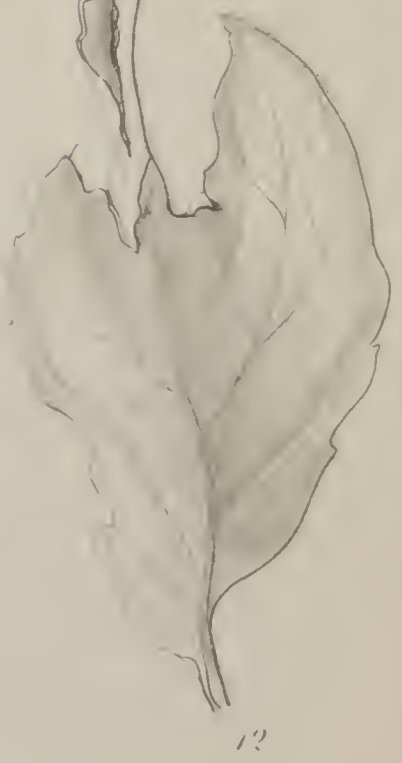
7

8

9

10

11

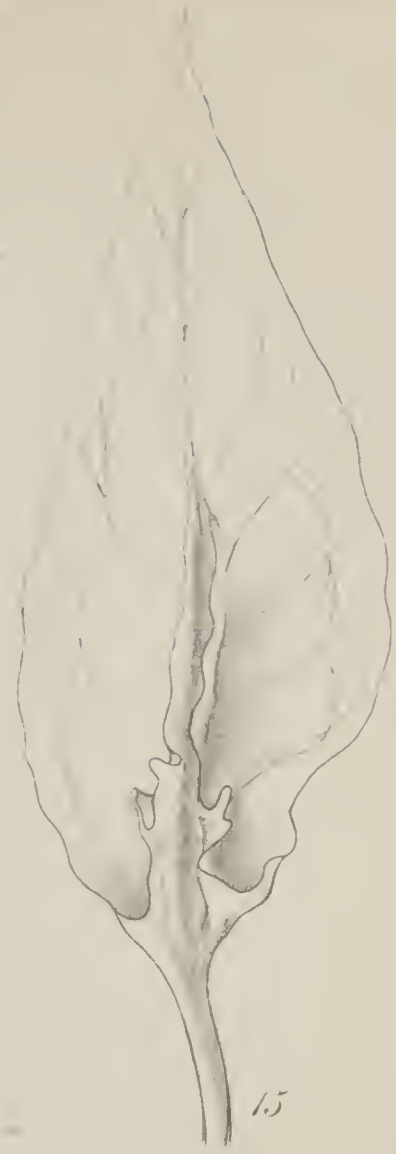

12

A

B

13

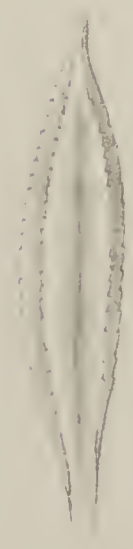
14


15

16

18

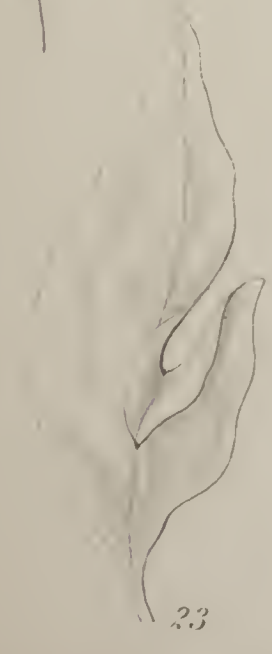
22

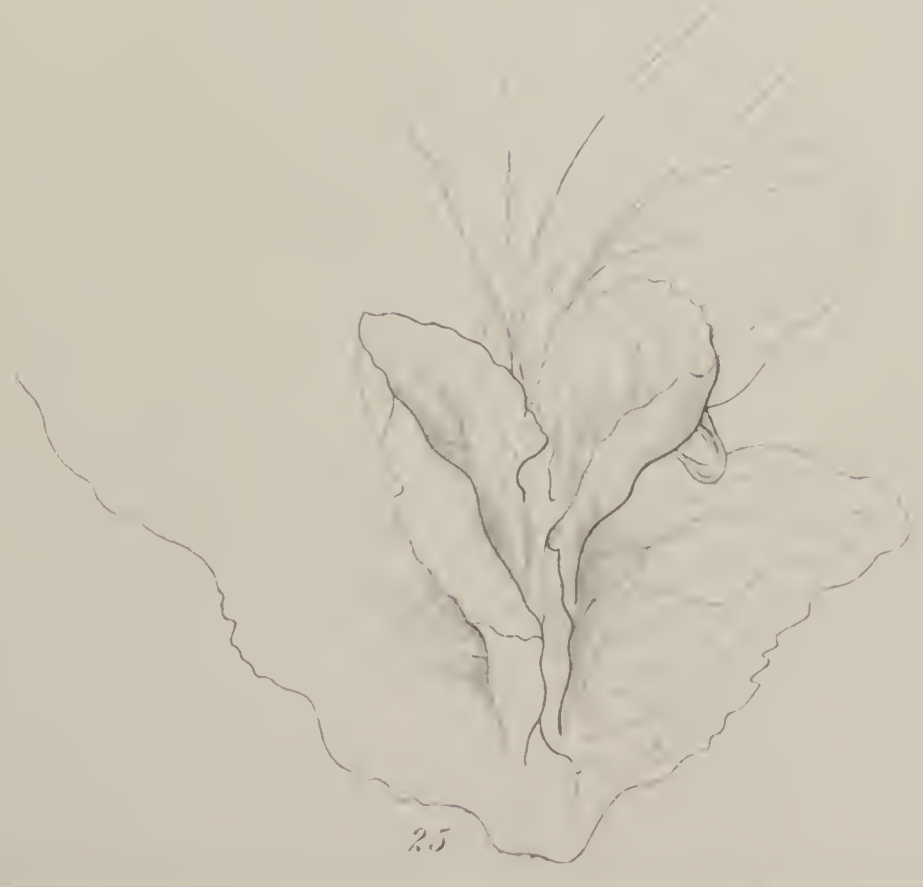

21

20

19

17


23


25

24

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 42.

O PHYLLOKLADIÍCH RODU DANAË.

PODÁVÁ
J. VELENOVSKÝ.

S JEDNOU TABULÍ.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

TISKEM J. OTTY V PRAZE.

O phyllokladiích rodu Danaë.

Rody *Asparagus*, *Myrsiphyllum*, *Ruscus*, *Semele* a *Danaë* jsou památny vytvořováním tak zvaných *phyllokladií*. Listy mají z pravidla podobu blanitých, malých, nezelených šupin, které obalují dole basi lodyhy a nahoře podporují větve. V úžlabí jich sedí také zelené, listům docela podobné osy či kladodie.

U rodu *Asparagus* jsou kladodie podoby jehlicovité a u větším počtu spojeny ve svazeček, vynikající z úžlabí listenu šupinovitého. Již r. 1845 správně poukázal *Wydler* k tomu, že jehlice tyto tvoří svým sestavením dvojitý vijan, jehož první jehlice bývá také zastoupena prodlouženou větví. Že zdánlivé zelené jehlice zde nejsou listy, nýbrž osami, plyne nejen z jich postavení vzhledem k matečné ose a skutečnému listu mateřskému, ale i z té okolnosti, že první z jehlic nesou skutečně co osy na konci květy. O významu zelených jehlic chřestu není tudíž žádné pochybnosti.

Rod *Myrsiphyllum* spojují mnozí také s rodem *Asparagus*. Liší se hlavně od tohoto tím, že úžlabní kladodium má tvar plochého, širokého, kopinatého listu a sterilní větve připomínají proto velmi větve rodu *Danaë*, jak sám na sklenníkovém materiálu mohl jsem srovnati. Po stranách listovitých kladodií vynikají květy.

Rod *Semele*, na Kanarech domácí, má větve opletavé a kladodie opět jako kopinaté ploché listy. Květy sedí ve svazečkách za listenem na ploché straně, asi uprostřed kladodia — tedy docela jako u rodu *Ruscus,* nebo — a to jest případ velice významný — ve více svazečkách na pokraji kladodia.

Středomořské a orientalské tři druhy *Ruscus aculeatus*, *R. Hypophyllum* a *R. Hypoglossum* mají lodyhy nadzemní kolmé, více méně větevnaté, dole blanitými šupinami, které na lodyhu vystupují, obalené. Kladodie jsou listovité, ploché, kožovité, lesklé, kopinaté neb vejčité. Kvítky stopečkaté sedí ve svazečku za dosti velkým listenem (obr. 7.) *buď na hořejší neb na dolejší straně kladodia.* Sestaveny jsou dle *Eichlera* podobně ve chudokvětý vijan jako u chřestu.

Přicházíme k rodu *Danaë*. Jediný druh *D. racemosa* (*L.*) rozšířen jest v Persii, Syrii, Zakavkazsku a, jak *Janka* udává, roste také v Byzancii na půdě evropské. U nás se často pěstuje pro ozdobu v sadech, kdež se mu celkem dobře daří a nezřídka i do květů dospívá. Kolmé větvité lodyhy (obr. 1., *b*, *o*) nadzemní vyrůstají z podzemních tlustých, málo dělených a uzlovitých oddenků (obr. 1., *a*).

*

Vzrůst oddenků jest vlastně sympodiální, poněvadž dorůstají co rok z úžlabních pupenů šupin (obr. 1., *š*) a po krátkém běhu vodorovném přecházejí v kolmé osy nadzemní. Tak jest na obr. 1. osa *b*) okončením oddenku *a*), z jehož některé šupiny vyrostla nová osa s oddenkem *c*). Podobně na obr. 2. Jako *Ruscus* tak i *Danaë* nese na basi kolmých lodyh větší počet šupin (obr. 1., *š*), které jsou z počátku sestaveny střídavě ve dvou řadách, dále ale přecházejí v pořádek spirální. Postupují i výše na lodyhu (obr. 1., *c*), až nahoře konečně podporují co blanité listeny postranní větve. Že jsou šupiny tyto přeměněné listy, jest nade vši pochybnost jisté. Zelené listy vůbec u všech jmenovaných rodů scházejí a jich biologickou funkci assimilační zaujímají zelené phyllokladie. Tak jest v obyčejných případech také u rodu *Danaë*.

Na tenkých, často dolů sehnutých větevkách sedí v úžlabí blanitých listenů kopinaté, špičaté, kožovité, velmi lesklé, zelené kladodie listovité. Stojí i s listenem na větevce dvouřadě a tím, že se na kratičkém, téměř kloubnatém řapíčku skrucují, staví se skoro do vodorovné plochy. Rub a líc nedá se tu dobře rozeznávati. Skroucením přišel by patrně líc na místo rubu a opačně, jak to ostatně v řádu *Liliaceae* často se stává a biologicky následkem toho také rub a líc se přeměňuje. Tak připomínám rod *Luzuriaga* (Velenovský, Morphol. Studien auf dem Gebiete der exot. Flora, 1888), *Eustrephus* a t. d. Vysoce pozoruhodným jest, že listeny i s kladodiemi postaveny jsou k medianě transversálně (obr. 4.). Známo, že zákonitě jest na pobočných osách u jednoděložných rostlin postaven první list k ose či adossirován. Jen vzácné výjimky posud se od pravidla toho uvádějí, tak u rodu *Dioscorea* a *Smilax* (Velenovský, O seriálních pupenech, 1884 a Über die Achselsprosse einiger Smilax-Arten, 1885). Zde u rodu *Danaë* jest postavení toto tím podivnější, protože, jak později ještě uvidíme, jest listenec na basi stopečky květní (obr. 5., 6.) ku hlavní ose hroznu zcela normálně adossirován. K této nesrovnalosti morfologické skutečně těžko se nějakého výkladu domysliti, rovněž jako u zvláštních případů výše vzpomenutého rodu *Smilax*.

Květy tvoří na konci větví konečné chudé hrozny (obr. 5.). Poslední phyllokladie *k*) sedí v úžlabí svých listenů *α*) a hrozen *o*) přímo přechází v osu větve, tak že kladodium *k*) vyniká co úžlabní úd na společné této ose. U rodu *Danaë* nenesou tedy phyllokladie ani listence ani květy a jsou tudíž ještě více listům podobny. Ano, nemáme vlastně ani závažného důvodu, abychom je za osní útvar považovali, leda pouhou analogii s příbuzným rodem *Ruscus*. Že vynikají z úžlabí listenů, že tedy nemožno, aby list z úžlabí listu vycházel, není důvodem dostatečným, abychom je za list nepovažovali. Vždyť možno přijímati i ten výklad, že zde máme úžlabní *brachyblast* se zakrnělým vrcholem vegetačním, jehož místo terminální zaujímá. Podobné brachyblasty máme u konifer a příkladů s terminálním listem (v podobě tyčinek atd.) máme také více.

Nejen že vážného důvodu pro výklad phyllokladií u rodu *Danaë* není a že je jen co takové přijímáme z analogie k rodu *Ruscus*, přistupuje tuto jeden úkaz, který vysoce zajímavým způsobem vzbuzuje pochybnost, že bychom

tu měli pravé útvary osní. Ne všude na všech trsech, které jsem ohledával, ale přec na mnohých, nalézáme totiž na *oddencích zelené, kopinaté, dlouze řapíkaté listy* (obr. 1., *l*, obr. 2.. *l*). *Listy tyto jsou pravými listy*, neboť zařaděny jsou aequivalentně jako listové šupiny *š*) na oddenku, neboť někde (obr. 2., *š*) skutečně v šupiny se přeměňují tím, že šupiny tyto ještě zelenými prodlouženými řapíky jsou opatřeny. Listy tyto nestojí v úžlabí ničeho, nýbrž jako šupiny sousední, jichž distichické neb spirální postavení zachovávají, mají v úžlabí pupeny, z nichž příštím rokem oddenek a nová osa nadzemní se obnovují. Pochva na dolejšku řapíku jest objímavá, široká a docela stejná jako pošvité sousední šupiny. Řapík jest trojkýlný a čepel s vyniklým středním a dvěma postranními silnějšími nervy vedle množství jemných souběžných žilek.

Listy tyto jsou skutečné, pravé listy a nejsou abnormním úkazem na rostlině, ačkoliv ne na všech trsech se objevují. Zdá se, že hlavně tam se tvoří, kde letos vyrostlý výběžek oddenkový nevyvine žádnou kolmou nadzemní lodyhu, jako na obr. 2. V tom případě okončí se pro letošek jen jedním až třemi listy. A teprv příštím rokem počnou se tvořiti dále nové šupiny a teprv kolmá mladá osa nadzemní, jak na obr. 1. jest naznačeno. V úžlabí na basi obr. 2., 3. objímá pochva listu mladý pupen *l'*, pro příští rok.

O pravých těchto listech obyčejně botanikové nečiní zmínky ani u rodu *Danaë* ani *Ruscus*, kdež snad vůbec se neobjevují.

Význam pak listů popsaných, jak je na př. na obr. 1. vidíme, jest pro rostlinu celou značný. Všude tam, kde phyllokladie v rostlinstvu se objevují, jsou listy pravé, zakrslé na tvar nepatrných šupinek. Vždyť tu phyllokladie vzaly na se úkol samých listů. Listy zde tedy zelené, vegetativní, jako u *Ruscus* jsou neznámy. V našem případě máme totéž, ale s tou výjimkou, že tu přec pravé listy někdy se vyvinují. Jsou to se stanoviska historické evoluce ty pravé původní listy, jaké asi prarodič rodu *Danaë* druhdy nesl, jež ale během věkového vývoje sklesly na zakrslé šupiny.

Podivuhodno jest však, že phyllokladie (ku př. obr. 5. *k*) v rodu našem převzavše vývojem a funkcí životní úkol pravých zelených listů, vzaly na se také tvar jejich! Vždyť přibližně phyllokladie rodu *Danaë* mají podobně tvar kopinatý, jsou skoro téže nervatury (jen hlavní nerv jest méně vyznačen), stejně lesklé, nečítaje řapík, který u přízemních listů vůbec bývá delší.

Podivuhodno zajisté, že by zde listovitě přetvořená osa vzala na se tvar listů, jež během věků zakrsaly! Jsou-li zde skutečně phyllokladie pravými osami, byl by to zjev v rostlinstvu vysoce památný. A kdybychom jej měli rozšířiti na rody příbuzné, musili bychom se domnívati, že *Myrsiphyllum* a *Ruscus* měly druhdy listy také ploché, kopinaté, ale *Asparagus* listy úzce čárkovité.

Uvažujeme-li o tomto zvláštním úkaze, dojdeme ale také k výkladu jinému. Můžeme vším právem z podobnosti phyllokladií rodu *Danaë* ku pravým přízemním listům souditi, že jsou tyto phyllokladie pravé listy. Měli bychom zde tedy již zprvu připomenutý výklad o brachyblastech úžlabních s konečným listem. Brachyblasty tyto, nebéřeme-li zřetel ku koniferám, mají obdoby také v samém řádu *Liliaceae*. U rodů již jmenovaných *Eustrephus* a *Luzuriaga*

nejsou sice brachyblasty, ale krátké postranní větve s omezeným vzrůstem jako by zpeřené listy. A tyto vynikají z úžlabí šupin. Prodlužování děje se jen na hlavních větvích. U naší české byliny *Polygonatum verticillatum* nalézáme opět velmi často na místě zakrnělého vrcholu hlavní osy lodyžní terminálně postavený list. A snad, kdyby se dále v řádu liliovitých pátralo, nalezlo by se v tom směru více dokladů.

Podle tohoto výkladu byly by domnělé phyllokladie rodu *Danaë* pravými listy. Ke zvrácení náhledu toho, jak již řečeno, nemáme zde vlastně žádných důvodů, leda analogii ku příbuzným rodům *Ruscus, Semele*, *Myrsiphyllum* a *Asparagus*.

Pokusme se, nedaly-li by se i u těchto rodů phyllokladie převésti na tvar pravých listů. Mám za to, že tu přísně nutno rozeznávati rod *Asparagus* a na druhé straně *Ruscus* a *Semele*. O rodu *Myrsiphyllum* nemohu sám úsudku si utvořiti, nemaje čerstvého kvetoucího materiálu po ruce; a údaje v tom ohledu u autorů jsou velmi kusé. Ponechávám jej tudíž stranou.

Svazečky vijanové jehlicovitých lístků rodu *Asparagus* jsou nade vši pochybnost svazečky os, neboť často místo centrálního bývá větev a některé z nich končí vyvinutým neb zakrslým květem. Tytéž vijany květné, celé, jak jsou, máme nyní v úžlabí bractey na phyllokladiu rodu *Ruscus*. Mysleme si, že odstraníme zelené phyllokladium i bracteu a že vynikají z úžlabí blanité šupiny na větvi, máme zde pak totéž jako u chřestu. U rodu *Ruscus* jest tudíž o zelené ploché phyllokladium a na něm sedící bracteu více než u rodu *Asparagus* a v tom proto spočívá jich podstatný rozdíl. Kdybychom měli považovati phyllokladium rodu *Ruscus* za rovné střední jehlici neb větvi chřestu, musily by kvítky pak seděti ve dvou vijanech po obou jeho stranách — pak by poměry obou těch rodů byly stejné. U rodu *Myrsiphyllum* prý tomu tak skutečně jest.

Srovnejme nyní květenství rodu *Danaë* s rodem *Ruscus* a *Asparagus*. U rodu *Ruscus* jsou kvítky sestaveny do vijanu, u rodu *Danaë* (viz obr. 5.) tvoří ale konečný hrozen. Kladodium *k*) není v žádném poměru ke hroznu tomu, neboť vzhledem k ose hroznu *o*) vyniká postranně z úžlabí své bractey. Stopečky kvítků jsou článkovité výše nad prostředkem a dole opřeny bracteou. K listenu *a'*) (obr. 6.) stojí ještě za stopečkou menší listenec *k*) adossirován k ose *o*). Květenství toto nedá se nijak v souhlas uvésti ani s květenstvím rodu *Ruscus* ani *Asparagus*. Jediná srovnalost byla by asi následující: Považujeme-li jeden kvítek *Danaë* za aequivalentní prvnímu kvítku ve vijanu rodu *Ruscus* a přimyslíme-li si, že nese v pravo a v levo listenec, za nímž stojí nový kvítek a tento podobně — tož bychom měli opět vijan aequivalentní vijanu rodu *Ruscus*. Pak by tedy každý kvítek *Danaë* odpovídal ochuzelému (až na jeden květ) vijanu rodu *Ruscus*. Pak ale máme i další shodu nápadnou. Bractea *a*) na obr. 7. odpovídá bractee *Danaë* obr. 6., *a'*), kvítek první 7., *a*) odpovídá kvítku *o'*) a kladodium 7., *k*) odpovídá listenci 6., *k*). Listenec 7., *e*) dle toho na kvítku 6. schází, ale možno si jej mysliti za druhý vstřícný, ale zakrnělý obr. 6., *b*). Toto doplnění není tak protimyslné, neboť z jednoděložných obyčejně v tomto postavení předběžné listence se vyskytují.

A tak bychom převedli květenství rodu *Ruscus* na květenství rodu *Danaë*. Pak ovšem patrno, že phyllokladium rodu *Ruscus* (obr. 7., *k*) jest přeměněný listen buď obr. 6., *k*) neb obr. 6., *b*). Pravíme buď *k*) neb *b*) proto, že skutečně u rodu *Ruscus* sedí bractea obr. 7., *e*) brzo na vrchní, brzo na spodní straně kladodia *k*).

A srovnáme-li rod *Asparagus,* musíme přijmouti, že zde ani listen obr. 6. *k*) ani obr. 6., *b*) se nevyvinul.

Výklad tento jest sice dosti složitý, přece ale na správných faktech založený. Celou věc bychom si ještě mohli mysliti u rodu *Ruscus* takto: Z úžlabí bractey obr. 7., *a*) vyrůstá úžlabní osa, která končí květenstvím. Osa tato má jeden adossirovaný a druhý protistojný lístek, což tak zhusta u liliovitých se vyskytuje. Osa tato ale sroste neb splyne s listem adossirovaným v jedno, a listen sám silně se zveličiv sbíhá po ose dolů ve stopách listových. Listen druhý *e*) pak výše jemu vstříčně následuje. Odpovídala by tedy dolejší část kladodia obr. 7., *k*) ose, hořejší vak listenu.

Velmi pěkně mohli bychom to celé srovnati s květenstvím druhu *Juncus conglomeratus* a příbuzných. Zde také celé zelené stéblo zdá se býti jednolitým. Známo ale, že ta část, která jest pod květenstvím, odpovídá ose, a ta, která prodlužuje se nahoru, jest ve směr osy postavený hlavní listen, jemuž pak jiný vstříčně a jiné po stranách v květenství následují. Podobnost jmenovaného druhu rodu *Juncus* s rodem *Danaë* byla by ještě větší v tom smyslu, že jak *Danaë* tak *Juncus* tvoří pravé přízemní listy, které podobají se květonosným osám.

U druhu *Ruscus aculeatus* činí tuhé, tvrdé phyllokladium se svou malinkou blanitou bracteou skutečně dojem listovité osy, na níž phyllom šupinovitý sedí. Druh *Ruscus Hypoglossum* však takovýto dojem nečiní, neboť na phyllokladiu sedící bractea jest zelená a někdy tak veliká, že i tvarem i žilnatinou vůbec vlastnímu phyllokladiu se podobá. Jest to tak, jako by sedělo jedno phyllokladium na druhém a z kornoutovitého jich úžlabí vyrůstalo květenství. Tato podobnost bractey s phyllokladiem jest proto vysoce podezřelá a zřejmě ukazuje na stejnou morfologickou hodnotu obou. Ba dokonce u druhého jmenovaného druhu (rozeznávají vlastně, však neprávem dva druhy: *R. Hypoglossum* a *R. Hypophyllum*) sedí bractea také opačně na druhé straně phyllokladia. Nic zajisté pravdě podobnějšího tu pak není, než že nyní přeměnila se dřívější bractea ve phyllokladium a phyllokladium samo v bracteu.

To všechno souhlasně podporovalo by náš výklad phyllokladií *Ruscus* a *Danaë*.

Našemu výkladu o povaze phyllokladií rodu *Ruscus* a *Danaë* zdá se odporovati rod *Semele*. Zde totiž tvoří se květy brzo na ploché straně phyllokladia, brzo na pokraji, a to pak ve více svazečkách. Tento poslední případ bylo by ovšem velmi nesnadno převésti na význam, který vyložili jsme pro květenství rodu *Ruscus* a *Danaë*. Nemám bohužel živých kvetoucích rostlin rodu *Semele*, abych je mohl ohledati a samostatného náhledu v tom smyslu si utvořiti.

Snad konečně jest i ta možnost připustitelná, že i *Asparagus* i *Ruscus* i *Danaë* a *Semele* mají své phyllokladie a květenství jinakého významu. Podali jsme jen tuto výklad, který stejně jest oprávněn jako výklad těch, kteří zde phyllokladie šmahem co osní útvary přijímají. A u rodu *Danaë* nikdo vůbec důkazu pro osní povahu jeho phyllokladií podati nemůže, kdežto zde popsané pravé listy přízemní aspoň do jisté míry na listovou povahu jich poukazují.

Zajímavo by bylo v naznačeném tuto směru konati pozorování na mladých rostlinkách všech probíraných rodů. Snad v prvním roce rostlinka po vyklíčení hned netvoří nadzemní osy s phyllokladiemi a snad místo jich zaujímají vegetativní tvary pravých listů.

Výklad k vyobrazením.

Obr. 1. *Danaë racemosa*, *a*) starý lonský oddenek s uschlou osou *b*); *o*) mladá lodyha nadzemní, sterilní, s phyllokladiemi, *l*) pravé přízemní listy, *š*) šupiny listové basi lodyhy obalující, *c*) šupina, v jejíž úžlabí sedí mladičká větevka.

Obr. 2. Část lonské, přezimovavší lodyhy nadzemní a s ní souvisícího oddenku, z něhož letos vyhání nový článek oddenku, šupinami obaleného, z nichž hořejší prodlužují se v zelený řapík a poslední konečně nese pravou čepel listovou *l*.

Obr. 3. Poněkud zvětšený list z předešlého obrazu. V úžlabí jeho na basi sedí mladý pupen *l'*) pro příští rok.

Obr. 4. Diagram úžlabní větevky obrazu 1. *d*) se šupinou *c*) a osou *o*). Listeny *α*), *β*) stojí příčně k medianě a phyllokladie *k*) v jich úžlabí.

Obr. 5. Konec větevky s květným hroznem, nepatrně zvětšen, *k*) phyllokladie přesně dle tvaru provedeny, *o*) osa hroznu, *o'*) květ, *α*) listen podpůrný.

Obr. 6. Diagram květu; *k*) listenec adossirovaný k ose *o*), *α'*) podpůrný listen, *o'*) květ, *b*) druhý listenec předpokládaný.

Obr. 7. *Ruscus Hypoglossum*, část větevky v přirozené velikosti, *α*) podpůrný listen, *k*) phyllokladium, *e*) bractea, *a*) první kvítek vijanu.

Über die Phyllokladien der Gattung Danaë.

Resumé des böhmischen Textes.

Die blattartigen Phyllokladien der Gattung *Ruscus* und *Danaë* werden allgemein als achselständige, verflachte Achsen oder Zweige angesehen. Für den *Ruscus* wird diese Deutung dadurch unterstützt, dass das Phyllokladium in der Mitte der Oberfläche eine Bractee trägt, in deren Achsel die Blüthen sitzen. Die Phyllokladien der Gattung *Danaë* tragen aber auf der Oberfläche weder eine Bractee noch die Blüthen; diese bilden hier an den Seitenzweigen endständige Trauben. Die Phyllokladien der *Danaë* können daher als solche nur aus der Analogie zur Gattung *Ruscus,* mit welcher die Gattung *Danaë* nahe verwandt ist, erklärt werden; directe Beweise fehlen hier gänzlich.

Wir könnten mit gleichem Rechte die Phyllokladien der *Danaë* als endständige Blätter der achselständigen Brachyblaste ansehen. Derartige Brachyblaste im Pflanzenreiche sind wohl auch bekannt und kürze, beblätterte Zweige von blattartiger Form und mit beschrenktem Wachsthum kommen sogar in naher Verwandtschaft, z. B. bei der *Luzuriaga*, vor. Die Phyllokladien der *Danaë* werden noch mehr verdächtig, weil wir auf dem Würzelstocke echte, grüne Blätter finden, welche eine flache, den Phyllokladien ähnliche Blattspreite besitzen. Sie sind als echte Blätter zwischen den Blattschuppen am Stengelgrunde eingereiht und gehen nicht selten in diese allmälig über. Sie sitzen in keiner Achsel und tragen selbst in ihrer Achsel kleine Knospen, welche im nächsten Jahre in einen Stengel emporwachsen. Diese Blätter werden zumeist nicht bei Autoren erwähnt. Sind nun die Phyllokladien wirkliche achsenartige Bildungen, so ist es ein höchst merkwürdiger Fall, dass sie die Form der echten Blätter derselben Pflanze erhalten haben.

Wenn man dagegen die Phyllokladien der *Danaë* für Blätter erklärt, so können auch die Phyllokladien des *Ruscus* auf eine ähnliche Weise interpretirt werden. Vergleichen wir den Blüthenstand des *Asparagus, Ruscus* und der *Danaë*. Die Nadelbüschel des *Asparagus* sind wickelartige Zweige, welche seitlich häufig Blüthen tragen und von welchen sich die mittleren in grosse Zweige umbilden. Der Blüthenstand des *Ruscus* ist auch eine Wickel, welche aber um das Phyllokladium und die Bractee reicher ist als der *Asparagus*. Bei der *Danaë* findet man eine Blüthentraube. Das nächststehende Phyllokladium ist in keinem Verhältnisse zu derselben, weil sie aus der Achsel der Bractee auf derselben Achse hervortritt. Die gestielte Blüthe sitzt in der Achsel

einer Bractee und trägt noch eine andere adossirte Bractee. Vergleichen wir diese Blüthe mit dem *Ruscus*, so entspricht sie der ersten Blüthe der Ruscus-Wickel, die adossirte Bractee entspricht dem Phyllokladium.

Wir können nun den Blüthenstand des *Ruscus* auch so auffassen: der wickelartige Blüthestand entspringt aus der Bracteenachsel wie beim *Asparagus*, ist aber mit zwei Bracteen verwachsen, von welchen eine blattartig wird und beiderseits am Blüthenstande herabläuft. Der untere Theil des Phyllokladiums würde also eine echte Achse, der obere ein echtes Blatt darstellen. Derselbe Fall kommt bei den blühenden Stengeln des *Juncus conglomeratus* vor.

Die Phyllokladiumsbracteen des *Ruscus Hypoglossum* sind häufig in Grösse und Form dem Phyllokladium, auf dem sie sitzen, so ähnlich, dass man fragen muss, was das Phyllokladium und was die Bractee vorstellt. Wenn man endlich weiss, dass sich hier die Bractee bald oberseits, bald unterseits auf dem Phyllokladium befindet, so ist es ganz klar, dass dem Phyllokladium einmal die Bractee Fig. 6, *k*), andersmal die Bractee Fig. 6, *b*), entspricht.

Dieser Deutung der Phyllokladien des *Ruscus* widerspricht aber die Gattung *Semele*, welche mehrere Blüthenbüschel am Rande des Phyllokladiums trägt. Ich konnte leider lebende *Semele* nicht untersuchen und kann daher kein Urtheil in dieser Hinsicht fällen.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. *Danaë racemosa*, *a*) alter Wurzelstock vom vorigen Jahre mit vertrocknetem Stengel *b*), *o*) junger, oberirdischer, steriler Stengel, welcher die Phyllokladien trägt, *l*) echte, grüne Blätter, *š*) Schuppenblätter, welche die Stengelbasis umhüllen, *c*) ein Schuppenblatt, in dessen Achsel junger Seitenzweig sitzt.

Fig. 2. Vorjähriger Stengel mit immergrünen Ästen sammt dem Wurzelstocke, aus welchem ein diesjähriges, mit Schuppen verhülltes Wurzelstockglied entspringt; die oberen Schuppen verlängern sich in einen grünen Blattstiel und die oberste trägt endlich eine grüne Blattspreite.

Fig. 3. Ein wenig vergrössertes Blatt der vorhergehenden Abbildung. An der Basis in der Achsel sitzt die junge Knospe *l'*) für das nächste Jahr.

Fig. 4. Diagramm zum Achselzweige der Abbildung 1. *d*) mit der Schuppe *c*) und Axe *o*). Die Bracteen *α*), *β*) sind zur Mediane transversal gestellt. In ihrer Achsel befinden sich die Phyllokladien.

Fig. 5. Ein Seitenzweig mit endständiger Blüthentraube; *o*) Traubenaxe, *o'*) Blüthe, *α*) Stützbractee.

Fig. 6. Blüthendiagramm; *k*) zur Achse *o*) adossirte Bractee, *α'*) Stützbractee, *o'*) Blüthe, *b*) die zweite Bractee, welche als Analogon zur Bractee Fig. 7 *e*) vorausgesetzt wird.

Fig. 7. *Ruscus Hypoglossum*, ein Zweigtheil in natürlicher Grösse, *α*) Stützblatt, *k*) Phyllokladium, *e*) Bractee, *a*) die erste Blüthe der Wickel.

o
k
d
c
4
k
o'
k'
o
5
o
k
o'
b
a'
6
l
l'
3
o
d
c
l
s
š
2
l
b
a
1
a
c
k
7

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 43.

O SMĚRU
SAMOČINNÝCH LUČEBNÝCH REAKCÍ.

NAPSAL

F. WALD.

(PŘEDLOŽENO DNE 28. ŘÍJNA 1892.)

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

TISKEM J. OTTY V PRAZE.

Lučebné theorie naší doby dají sice předvídati neznámé ještě sloučeniny, nevykazují však *na jisto* cestu, jíž lze jich dobyti. Experimentatoru lze postupovati jen dle známých mu analogií, které sice zhusta vedou k cíli, nezřídka však i selhávají, aniž by z theorie vysvítal důvod nezdaru. I když obmezíme se na reakce známé a dobře studované, nemůžeme z theorie běžné vyvoditi podmínky temperatury, tlaku a podobných vlivů, potřebných k uskutečnění dané rovnice reakční.

Snaženo tudíž docíliti obecně platných vět o průběhu lučebných reakcí úvahami *z jiných* oborů věd přírodních, a sice z nauky o teple. Známí thermochemikové, pánové J. Thomsen a Berthelot přišli k témuž názoru, jejž posléze jmenovaný považoval dokonce za »třetí větu mechanické theorie tepla«: oba mají za to, *že každá samočinná lučebná reakce vybavuje teplo,* a naopak že reakce, která může teplo vybaviti, nastupuje samočinně.

Známo, že k početí mnohých reakcí zapotřebí podnětu plamenem, jiskrou elektrickou a pod., načež reakce postupuje sama; i zoveme *samočinnými* všecky reakce, jež *v postupu* svém nejsou vázány na zevní vlivy, bez ohledu na to, zdali k *početí* jejich podobných vlivů potřebí či nikoli.

Ač náhled shora uvedený o směru lučebných reakcí všeobecně uhájiti nelze, musíme přece přiznati, že skoro všecky *intensivné* samočinné reakce vybavují teplo. Zvláště platí to o všech reakcích kovů s prvky elektronegativnými, o slučování mnohých oxydů s vodou, o spalování uhlíku a jeho sloučenin, dále o spalování vodíku, síry a fosforu.

Za to jsou vzájemné rozklady solí skoro thermoneutrálné, a nezřídka též endothermické; ale intensivných samočinných reakcí lučebných, jež by jen přibližně tolik tepla zabavovaly, jako jej prve jmenované vybavují, vůbec není. Vyjimky z hořeního pravidla, že samočinné reakce jsou exothermické, vztahují se vždy jen buď na reakce s nepatrnou výměnou energie, nebo na reakční rovnice, dle nichž by se vybavila značná energie, jež ale vzdor tomu samočinně nenastupují.

Vedle názoru toho stojí druhý, zakládající se na druhé větě mechanické theorie tepla. Již Clausius učil, že při každé lučebné reakci *roste entropie*, a na základě tom zbudována theorie, řešící s úspěchem i nejtěžší problemy, jako jsou zjevy dissociační, elektromotorická síla galvanických článků a podobné.

*

Shodujíc se však v konkretních případech do všech podrobností s výsledky experimentálnými, *nepodala* theorie tato posud dostatečného vysvětlení nápadné té okolnosti, *že intensivné, samočinné reakce lučebné z pravidla teplo vybavují.*

Z nauky o entropii nevyplývá, zdali se při reakci teplo vybavuje či zabavuje, a dlužno tedy najisto očekávati, že počet samočinných lučebných reakcí exothermických bude roven počtu reakcí endothermických; ze zkušenosti však víme, že samočinné reakce teplo vybavující jsou daleko pravděpodobnější. Shledáváme tudíž důsledky druhé věty mechanické theorie tepla v případě tom *v nepochybném sporu* s výsledky experimentálnými, a musíme hledati důvody pro převahu reakcí exothermických na poli jiném.

Pan prof. Ostwald ovšem příležitostně vysvětluje větší pravděpodobnost reakcí energii vybavujících okolností, že vybavené teplo entropii okolí zvětšuje, a tím reakci umožňuje. [1]) Důvod ten platí však jen za tou podmínkou, když vnitřní energii, vybavenou reakcí, předem již považujeme za energii z větší části *volnou;* to skutečně odpovídá z pravidla faktickým poměrům, ale nemůže je *objasniti.* Nikdo posud netvrdil, že i nelučebné reakce musí být převahou exothermické; mezi reakcemi nepochybně lučebnými a reakcemi tak zvanými fysikálnými (o jichž vlastní povaze posud jsou spory), jako jsou změny skupenství, rozpouštění a podobné, není rozdílu takového, z něhož by se dalo dovoditi, že energie lučebná *musí* býti volně proměnlivou. Pustíme-li však z mysli náhled, že vnitřní energie lučebnými reakcemi se jevící bývá vždy energií volnou, pak odpadá i důsledek že reakce lučebné z pravidla teplo vybavovati musí. Látka, jež *teplo* vydává, snižuje svou entropii, okolí, jež je přijímá, ji zvyšuje a obě změny entropie se skoro ruší. Výslední změna závisí pak jen na *směru spádu* temperatury, což se na samočinných reakcích lučebných neosvědčuje. Z toho plyne, že při reakcích těch nepřechází *teplo* s látky na látku, ale že mění se energie *působivější* v tepelnou. *Proč* ale vnitřní energie při reakcích lučebných se vybavující bývá energií volnou, odtud nevysvítá.

Obecný náhled o věci té tlumočí pan prof. Horstmann, [2]) pravě, že lučebné síly, mezi atomy působící, vždy snaží se způsobiti reakce exothermické, kdežto reakce endothermické jsou výsledkem protivného působení tepla. Souvisí náhled ten zajisté s představou, že atomy působí na sebe silami přitažlivými, proti nimž účinkuje živá síla atomů a molekul.

Jsem přesvědčen, že pan prof. Horstmann sám náhled ten nesdílí, ale rovněž z nauky o entropii došel k důsledku, že reakce exothermické nejsou pravděpodobnější, než reakce endothermické; vždyť on byl prvním, jemuž podařilo se luštiti lučebné problemy pomocí druhé věty mech. theorie tepla. V učebnici ovšem musil čtenáře své seznámiti s obecným o věci té názorem, zvláště když náhled ten dobře vyhovuje lučebné praxi. Ale upozorňuji, jak úzce srostla představa o vybavení energie s představou samočinné lučebné reakce, když

[1]) Ostwald, Allg. Chemie II., str. 388.

[2]) Theoret. Chemie 1885, pag. 576.

obecně přisuzuje se vlastnost ta již atomům; chci dokázati, že faktická ta souvislost není lučebné affinitě *vlastní*, ale zá isí jen na okolnostech *nahodilých*.

Z druhé věty nelze vyvoditi důvod pro větší pravděpodobnost reakcí exothermických, kdežto v praxi vidíme, že intensivní samočinné reakce z pravidla teplo vybavují. Nerozřešený tento spor dlouho již poutal pozornost moji, a nenadál jsem se, že rozluštění jeho bude tak jednoduché, tím méně pak že zakládati se bude na poměrech jednak kosmografických, jednak technických.

Větší pravděpodobnost exothermických reakcí nelze ovšem dovoditi z přesných mathematických důkazů, ale jen z úvah, o nichž předem zřejmo, že nemají platnost naprostou, nýbrž jen přibližnou.

Přehledneme-li souhrn všech známých nám reakcí, neubráníme se přesvědčení, že *v přírodě* se reakce samočinné a intensivné *skoro ani nevyskytují;* takové reakce známe téměř výhradně jen ze svých továren a laboratoří — a tím již dostavuje se podezření, že problem, o nějž se nám tu jedná, nemá důvod svůj snad ve vlastnostech lučebné affinity, nýbrž že příčina jeho leží *v nahodilém zařízení našich lučebných továren a laboratoří.* Dovolím si věc tu objasniti nejprve příkladem.

Pan prof. v. Helmholz došel ve své práci o thermodynamice lučebných pochodů [1]) k nápadnému důsledku, že by v galvanickém článku, složeném na příklad ze zinku a platiny v okyselené vodě, elektromotorická síla v prvním okamžení musila býti *nekonečně velikou.* Na verifikaci tohoto důsledku druhé věty mechanické theorie tepla ovšem nelze pomýšleti, a jeví se tu tedy též spor theorie se skutečností. Rozluštění jeho však jest na snadě; při odvození nápadného důsledku toho předpokládáno, že tekutina neobsahuje *ani stopy* reakčních produktů (vodíku a zinkové soli). Z analytické praxe však víme, že žádná methoda není absolutně správna; musíme tudíž připustiti, že ani naše reagentie nejsou *naprosto* čisty; pakli však tekutina v článku obsahuje jen *stopy* vodíku nebo soli zinečnaté, třeba tak malinké, že nižádným způsobem je lučebně dokázati nelze, tedy nápadný ten výsledek o nekonečně veliké elektromotorické síle článku odpadne. O správnosti úsudku toho nelze tedy pochybovati, ale premissy jeho *z praktických* příčin nelze realisovati.

Podobně snad nedostává se nám pomůcek, abychom získali sloučenin dávajících samočinných lučebných reakcí se zabavením tepla; nebo snad nám pomůcky ty ani nescházejí, ale byly posud zanedbány.

Než k důkazu některé z vyslovených zde domněnek přistoupím, dovolím si připomenouti stručně formu druhé věty mechanické theorie teple pro lučebné pochody dle prof. v. Helmholtze. Značí-li U vnitřní energii nějaké látky, S její entropii a T absolutnou temperaturu, pak jest volná energie F

$$F = U - TS .$$

Označíme-li veličiny, vztahující se na látky původní, indexem 1, veličiny, vztahující se na produkty reakce, indexem 2, bude

[1]) Sitzungsber. d. k. preuss. Academie 1882, str. 22 a 825.

$$F = \Sigma F_1 - \Sigma F_2 = \Sigma U_1 - \Sigma U_2 - T(\Sigma S_1 - \Sigma S_2)$$

pro reakce při stálé temperatuře.

Aby reakce byla možnou *samočinně,* musí volná energie F býti positivnou.

Upozorňuji dále, že $\frac{dF}{dT} = -\left[\Sigma S_1 - \Sigma S_2\right]$.

O převládání exothermických reakcí mezi reakcemi samočinnými přišel jsem k následujícím úvahám:

Po čas nesmírně již dlouhý vyrovnávají se na povrchu země všecky lučebné protivy. *Suroviny, jež z přírody béřeme ku svým lučebným pracím, jsou tudíž veskrze látky, jež nejsou schopny intensivných, samočinných reakcí. Značnější vyjimku činí jen uhlík a sloučeniny jeho, jež působením slunečných paprsků tvoří se v rostlinách z kysličníku uhličitého a vody. Ostatní suroviny naší lučby dosáhly stálým vyrovnáváním affinit téměř úplně* **minima volné energie.**

Kdyby slunečnými paprsky udržovaný život na zeměkouli naší nerušil stále konečnou rovnováhu, k níž látky na povrchu jejím tíhnou, byly by látky člověku dostupné *každé další reakce naprosto neschopny,* a kdyby i za těch okolností existovati mohl lidský duch, *lučebných reakcí nepoznal by vůbec* — leda na meteoritech.

Mimo kyselinu sírovou jest však *uhlík* co redukující látka, zvláště však **co palivo** téměř výhradným prostředkem k lučebné změně přírodou nám poskytnutých surovin.

Kyselinu sírovou vyrábíme buď ze síry nebo ze sloučenin jejích s kovy. Netřeba ani vyšetřovati, zdali tyto suroviny nejsou též jen výsledky reakcí podmíněných organickými látkami.

Zajisté by nám bez paliva kyselina sírová sotva byla dostupna, najisto však málo či nic platna, a smíme tudíž směle tvrditi, *že bez uhlí nebylo by naší lučby.*

Pomocí uhlí co paliva (a po případě co prostředku redukčního) dobýváme všecka svoje lučební činidla: kovů buď přímo nebo oklikou přes kalium nebo natrium.

Horkem rozkládáme vápenec; chlornatrium rozkládáme kyselinou sírovou za horka, síran sodnatý pak zase v žáru calciumoxydem a uhlím, abychom dobyli sody neb natriumhydroxydu. Ani methodou Solvayovou nelze dobývati sody ze soli bez paliva, neboť třeba ku příkladu regenerovati čpavek páleným vápnem. Podobně při výrobě chloru regenerujeme manganhyperoxyd pomocí vápna.

Uveďme si kterékoliv mocnější lučebné agens na mysl, každé vyžaduje při výrobě své ze surovin zvýšené temperatury, a tudíž paliva.

Smísíme-li své suroviny za obyčejné temperatury, z pravidla žádaná reakce nastati nemůže, *jelikož přítomný stav surovin těch je beztoho stavem rovnovážným*, stavem minima volné energie.

My ze všech reakcí, jež mezi surovinami těmi zevními vlivy *vynutiti* lze, nemůžeme *prakticky* využitkovati než těch, jež způsobiti lze *zvýšením temperatury* — proto, že jiného, levnějšího prostředku nemáme.

Kdyby uhlí při spalování teplo *absorbovalo,* využitkovali bychom technicky těch reakcí, jež dají se způsobiti *snížením* temperatury.

Za daných poměrů volíme ty reakce, jichž volná energie *roste* se *zvýšením* temperatury.

Jelikož pak $\frac{dF}{dt} = -(\Sigma S_1 - \Sigma S_2)$ a při všech nám se hodících reakcích jest $\frac{dF}{dt} > 0$, tedy výrobou reagencií pomocí paliva ze surovin, přírodou nám poskytnutých, *roste entropie jejich* na účet volné energie, již disponujeme reakcí uhlíku s kyslíkem.

Dostoupíme-li konečně té temperatury T_1, kde volná energie reakce námi zamyšlené z původní negativné hodnoty přechází v positivnou, tu prochází volná energie nulou, a tudíž jest

$$\Sigma U_1 - \Sigma U_2 = T_1 (\Sigma S_1 - \Sigma S_2) .$$

Jelikož difference v závorce *musí* být v reakcích nám se hodících negativnou, jest i

$$\Sigma U_1 < \Sigma U_2$$

a reakce *zabavuje teplo.*

Známe ovšem i reakce, jež zvýšením temperatury se zahájí, ale pak samočinně pestupují za *vybavení* tepla, a tím zdánlivě hořením úvahám odporují; avšak tyto výjimky jsou, pokud se jedná o *suroviny* skutečně vzácné; mimo síru a sloučeniny její (kyzy a blejna) jedná se tu jen o uhlík a sloučeniny jeho, ale právě na tyto výjimky jsme při výrobě reagentií odkázáni; kdyby jich nebylo, nemohli bychom surovinám ostatním reakci *vnutit,* a lučba byla by u konce před počátkem svým.

Dobyté reagentie a vedlejší výrobky mají tudíž dohromady při temperatuře dobývací větší energii vnitřní i větší entropii než suroviny; ochladíme-li je na temperaturu obecnou (z temperatury T_1 na T), nezmění se difference vnitřních energií, aniž difference entropií *podstatně.* Obě mění se jen, pokud průměrné spec. teplo surovin liší se od průměrného spec. tepla výrobků, a pokud se jedná o změny skupenství. Tyto veličiny lze však zanedbati vzhledem k velice značnému teplu reakčnímu; ani difference entropií $\Sigma S_1 - \Sigma S_2$ nezmění se vlivem jejich, leda výjimečně, *nikdy* však co do znaménka svého, jinak by suroviny dávaly již před ohřátím reakci, a v praxi by zbytečné zahřívání odpadlo. Smíme tudíž v první limitě považovati difference $\Sigma U_1 - \Sigma U_2$ (energie vnitřní) a $\Sigma S_1 - \Sigma S_2$ (differenci entropií) za stálé a dojdeme k výsledku, že při obyčejné temperatuře T bude volná energie

$$F = \Sigma U_1 - \Sigma U_2 - T(\Sigma S_1 - \Sigma S_2)$$

zápornou. Produkty reakce tíhnou tudíž *samočinně do původního stavu,* a volná energie tím uvolněná jest jen částí vybavené *vnitřní energie.*

Rationelní výroba čelí vždy k nejlepšímu zužitkování vedlejších výrobků; bez dalšího upotřebení zůstávají tudíž jen takové produkty reakce, jež buď se v přírodě všude vyskytují, a jež lze tedy lehce nahraditi surovinami; nebo látky, které jen z praktických ohledů (na př. co látky suroviny znečišťující) podrobujeme reakcím výrobním, a které z pravidla bez valné změny se vylučují (jako silikaty při hutnických pochodech). Když některá z látek těch lučebnou reakcí nabyla značnější volné energie, zajisté nalézá též upotřebení co reagens, tak že jsme oprávněni k úsudku, že výrobní reakcí nashromážděná volná energie obsažena jest téměř cele ve vyrobených reagenciích; reakce jejich *samočinné* jsou pak ovšem *exothermické*. Ošem nejsou reakce ty vždy pouhým *obrácením* reakce výrobní, ale přece vždy stupni na cestě *zpět do původního stavu,* v jakém se nalézaly suroviny v přírodě, a jenž jest stavem s minimem volné energie: *proto vybavují teplo*.

My ovšem reagencie z lučebné továrny neb laboratoře často ještě opětně podrobujeme novým procedurám za účelem dobytí nových zase činidel, ale práce ty zase jen z pravidla provádíme za zvýšené temperatury a zabavení tepla. Kruh, z něhož nevycházíme, jest tudíž: buď reakce, již zamýšlíme, není samočinnou, a pak zahříváme; nebo jest reakce samočinnou, ale reagentie povstaly ze surovin zahříváním. Reakcí, jež by z rámce toho vybočovaly, téměř ani neznáme, a v okolnosti té jest kořen tak zvané »třetí věty mechanické theorie tepla«.

Poslední příčinu, podmiňující exothermický průběh našich samočinných reakcí nesmíme dle toho hledati na zemi, ale — na slunci.

Pramenem veškerých lučebných affinit na zemi jsou slunečné paprsky, jichž volná energie *shromažďuje* se v organických látkách našich rostlin. Odtud čerpá lučebník volnou energii potřebnou k lučebné změně surovin, jež o sobě nejsou žádné značnější reakce schopny. *Rozklad kyseliny uhličité* v chlorophyllu na světle jest nejdůležitějším faktorem naší lučby, bez rozkladu toho žádný člověk, kdyby třeba existovati mohl, nemohl by prováděti reakcí. Rozkladem tím mění se však *energie slunečních paprsků* v energii vnitřní, a z toho plyne, že většina samočinných reakcí našich teplo *vybavovati* musí, neboť vybavují jen část spalného tepla uhlíku a jeho sloučenin.

Ale ani okolnost, že při rozkladu kyseliny uhličité se energie zabavuje, není zcela nahodilou. Látka kterákoliv, nalézající se ve stavu rovnovážném, ve stavu minima volné energie, nemůže zajisté působením slunečných paprsků utrpěti jiné změny stavu svého, než také, při níž se energie zabavuje; kdyby tedy na zemi kyseliny uhličité nebylo, neměly by sluneční paprsky v zápětí buď nižádné trvalé změny v lučebném složení povrchu zemského, nebo vyskytla by se některá jiná reakce, slunečními paprsky způsobená, ta by však zajisté zase *zabavovala* energii slunečných paprsků. Lučebník by pak pracoval s jiným palivem, ale přišel by zase k samočinným reakcím, jež teplo vybavují.

Přítomný stav země podmíněn jest okolností, že střední temperatura její udržuje se paprsky slunečními *nad* temperaturou světového prostoru.

Můžeme si představiti jiný stav země, v němž by světový prostor měl temperaturu vyšší, než jest nynější střední temperatura země, a místo slunce

nalezalo by se těleso nesmírně studené, s temperaturou poblíže absolutného bodu nultého; pak vysýlala by země »ve dne« mocné proudy tepelných paprsků k tělesu centrálnému, a »v noci« přijímala by zase teplo z prostoru světového, a kryla by tím své ztráty na teple, tak že by celkem podržela nynější svou střední temperaturu.

Mohutná emisse tepelných paprsků ze země na těleso centrálné *mohla* by zajisté též vésti k shromažďování se volné energie ve formě sloučenin, ač naše vědomosti nestačí, abychom uhodnouti mohli, který lučebný pochod by asi nastal; zajisté by to však byla reakce, jež by *zmenšovala* energii vnitřní a vysýlala ji co paprsky k tělesu centrálnému.

Kdyby pak i za těchto poměrů existovati mohl člověk a obíral se lučbou, tedy zajisté užíval by pomůcek od našich naprosto rozdílných. Základní reakcí jeho bylo by uvedení oněch látek, jež povstaly sáláním, v původní stav; tímto »spalováním« nabýval by ovšem nikoliv tepla, ale zimy, neboť zabavilo by se tolik tepla, co vysáláno ho při reakci původní. V »Bunsenově kahanci« jeho tvořil by se děsný mráz, a v pecích svých »zatápěl« by na temperatury poblíže — 273° C.

Nuž, a kdyby si pak od sousvětného fysika vypůjčil k studiu svých reakcí větu o entropii, jež by i za změněných tak poměrů zajisté platila, shledal by, že samočinné reakce jeho větě té v jistém smyslu nevyhovují, jsouce převahou — endothermické!

My pomocí paliva umíme i značně snižovati temperaturu, a časem lučebníci prostudují zajisté i reakce, jichž z daných nám přírodnin docíliti lze *snížením* temperatury. Budou to reakce exothermické, ač nikoliv samočinné; ale produkty jejich při obecné temperatuře budou pak do sebe působiti samočinně *endothermicky*, a pak vymizí zajisté i z elementárních učebnic lučby názor, že lučebná affinita z pravidla vybavuje teplo.

Z příčin zřejmých bude však snižování temperatury pomocí paliva vždy nákladnější, než zvyšování její, a proto zůstanou nejhojněji užívanými reagenciem ty, jež ohříváním dobyty při samočinných reakcích teplo vybavují.

---

nalezalo by se těleso nesmírně studené, s temperaturou poblíže absolutného bodu nultého; pak vysýlala by země »ve dne« mocné proudy tepelných paprsků k tělesu centrálnému, a »v noci« přijímala by zase teplo z prostoru světového, a kryla by tím své ztráty na teple, tak že by celkem podržela nynější svou střední temperaturu.

Mohutná emisse tepelných paprsků ze země na těleso centrálné *mohla* by zajisté též vésti k shromažďování se volné energie ve formě sloučenin, ač naše vědomosti nestačí, abychom uhodnouti mohli, který lučebný pochod by asi nastal; zajisté by to však byla reakce, jež by *zmenšovala* energii vnitřní a vysýlala ji co paprsky k tělesu centrálnému.

Kdyby pak i za těchto poměrů existovati mohl člověk a obíral se lučbou, tedy zajisté užíval by pomůcek od našich naprosto rozdílných. Základní reakcí jeho bylo by uvedení oněch látek, jež povstaly sáláním, v původní stav; tímto »spalováním« nabýval by ovšem nikoliv tepla, ale zimy, neboť zabavilo by se tolik tepla, co vysáláno ho při reakci původní. V »Bunsenově kahanci« jeho tvořil by se děsný mráz, a v pecích svých »zatápěl« by na temperatury poblíže — 273° C.

Nuž, a kdyby si pak od sousvětného fysika vypůjčil k studiu svých reakcí větu o entropii, jež by i za změněných tak poměrů zajisté platila, shledal by, že samočinné reakce jeho větě té v jistém smyslu nevyhovují, jsouce převahou — endothermické!

My pomocí paliva umíme i značně snižovati temperaturu, a časem lučebníci prostudují zajisté i reakce, jichž z daných nám přírodnin docíliti lze *snížením* temperatury. Budou to reakce exothermické, ač nikoliv samočinné; ale produkty jejich při obecné temperatuře budou pak do sebe působiti samočinně *endothermicky*, a pak vymizí zajisté i z elementárních učebnic lučby názor, že lučebná affinita z pravidla vybavuje teplo.

Z příčin zřejmých bude však snižování temperatury pomocí paliva vždy nákladnější, než zvyšování její, a proto zůstanou nejhojněji užívanými reagenciem ty, jež ohříváním dobyty při samočinných reakcích teplo vybavují.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 44.

O ABNORMÁLNÍCH METAMORFOSÁCH KVĚTŮ TULIPÁNOVÝCH.

PŘÍSPĚVEK K MORFOLOGII SROVNÁVACÍ.

NAPSAL

Dr. LADISLAV JOS. ČELAKOVSKÝ.

SE DVĚMA TABULKAMI OBRAZCŮ.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Plné květy tulipánu zahradního *(Tulipa Gesneriana)* s všelijak abnormálně vyvinutými lístky květními nejsou ani novým ani příliš vzácným úkazem. Některé anomalie těchto květů jsou dávno známy a Masters-ova Teratology zmiňuje se o takových na různých místech, ačkoli jen povrchně. Důkladnější analysa jich však posud nebyla uveřejněna. Obšírnější pojednání o tom předmětu znám toliko jedno, od Schlechtendal-a již r. 1826, v době, kdy se ještě abnormitám věnovala větší pozornost, v časopise Linnaea otištěné.[1]) Auktor tam popisuje toliko jeden nalezený květ naplněný a abnormální, z většího počtu lístků ve více než pěti kruzích složený; v němž shledal tyčinky plátkovitě přeměněné a toliko polovičným neb zakrnělým prašníkem nadané, též plodolisty dílem plátkovité, bezvaječné, pouze bliznové laloky nesoucí, dílem »na krajích nemnohá vajíčka mající«; konečně i listy obojaké, na jedné polovici prašným pytlíčkem, na druhé bliznou a »na kraji neúplně do vnitř vehnutém« vajíčky opatřené. Podrobnější analysu uvedených částí květních jakož i výkresy, k porozumění toho popisu nezbytné, pohřešujeme. Závěrky, z pozorování těchto učiněné, jsou dílem bezvýznamné, dílem podivné, dílem i nesprávné. Že jsou na př. »okvětní lístky (plátky), tyčinky a semenníky toliko výše vyvinuté listy«, nebylo třeba abnormálním květem tulipánu na novo dotvrzovati; že jest semenník druhé poupě ve květu obsažené a přeměněné, které se při bujném vývoji květu v úplný květ druhý vyvinouti může, takže by se vlastně úplný květ z devíti kruhů skládati měl: to jest závěrek z abnormity neoprávněný a tudíž podivný; že kraj prašního listu ve švu, jímž pytlíček se puká, jest obsažen, to jest závěrek chybný, jakož jsem již dávněji dokázal[2]) a jakož i z abnormit květu tulipánového na novo dovodím. Správné však jest připomenutí auktorovo, že »semenník povstává z listů, jejichž kraje se do vnitř vehrnou a tu vajíčka zplodí«, čehož však nikterak sám nedokazuje, ačby toho právě zde při abnormitách tulipánu, jak uvidíme, velice zapotřebí bylo.

Já sám jsem měl v rukou velmi hojný a zajímavý materiál, kteréhož se mi po několik let dílem laskavostí p. Lenečka, vrchního inspektora drah, dílem prof. Dra. Sitenského, mého bývalého žáka, dostávalo a jehož jsem srovnávacím

---

[1]) Dr. F. L. von Schlechtendal: Über eine Monstrosität der gemeinen Gartentulpe (*Tulipa Gesneriana* L.) Linnaea I. 1826.

[2]) Čelakovský: Teratologische Beiträge zur morphologischen Deutung des Staubgefässes. Pringsh. Jahrbücher. XI. 1.

způsobem v této rozpravě použil, doplniv pozorováním pozdnějších let mezery z dřívějších let pozůstalé, takže celá řada veškerých abnormálních forem, jak za to mám, nemůže býti úplnější.

Abnormální úkazy ve květech mnou studovaných budtež nejprve v povšechném výkazu zhruba uvedeny, a jsou tyto:

1. Mnoholistnost (polyphyllia), záležející v pomnožení trojčetných cyklů neb kruhů květních, zároveň tedy od Masters-a tak zvaná pleiotaxie. Jmenovitě kruhy okvětní bývají často pomnoženy.

2. Dva nejdolejší lístky okvětní byly častěji hlouběji, a sice zhusta nestejně hluboko na ose lodyhy dolů pošinuty; což se ostatně vysvětluje tím, že vnější kruh okvětní u Liliovitých (i jinde) dle Payer-ových vývinozpytných výzkumů již i v normálním květu jest vlastně cyklus spirální, jehož tři lístky po sobě se objevují. V abnormitě tedy nastalo jen značnější prodloužení osy mezi těmito lístky. Dolů pošinuté listy okvětní měly pravidelně insercí šikmou, na straně anodické (myslíme-li si spirálu genetickou na kratší cestě taženu) často hlouběji sbíhajíce, anebo také jeden list na anodické, druhý opět na katodické straně, anebo oba na obou stranách značně křídlovitě po lodyze dolů sbíhajíce.

Tím se vyvrací Schimper-ův a Braun-ův náhled, že by příroda tvořila listy ve spirále na dlouhé cestě, což oni soudili z toho, že kraj katodický (sestupující) dle spirály na dlouhé cestě vskutku často níže inserován bývá. Již Hofmeister proti tomu namítal, že šikmá insercc listů teprva později nestejným vzrůstem obou stran článků osních způsobena bývá, jest tedy nezávislá od spirálního vzniku listů. Genetická spirála jest sice pořadem ve vzniku listů dobře odůvodněna, avšak co se směru jejího na krátké neb na dlouhé cestě týče, jest to úplně libovolná konstrukce subjektivní. To potvrzují též abnormální květy tulipánu, jelikož nejdolejší dva lístky okvětní, ač v téže spirále položené, hned na té, hned na oné straně, hned na obou sbíhati mohou.

Nejzevnější dva lístky okvětní nezřídka ukazovaly přechod v metamorfose do zelených lupenů, neboť byly někdy zcela neb po jedné straně zelené a lupenovité.

3. Nezřídka byly lístky okvětní pod koncem aneb i hlouběji ku zpodu ve dva až tři laloky rozeklány.

4. Tyčinky nalézány v některých květech částečně ještě dosti normální, dílem ale částečně plátkovitě přeměněny, s prašníkem obyčejně neúplným; anebo byly dokonale jako plátky vyvinuty, takže jenom z postavení jich na původní tyčinkovou povahu souditi možno bylo. Stala-li se přeměna ta se všemi tyčinkami, následovaly po četných lístkách okvětních ovšem ihned plodolisty.

5. Přechodní anebo spíše kombinační formy tyčinek a plodolistů nacházejí se zhusta a v rozmanitosti veliké; ty budou později do podrobna vylíčeny.

6. Také mezi plátky a plodolisty jsou mnohé přechody, dílem plátky s bliznovým zakončením, dílem karpidy více méně plátkovitě vyvinuté.

7. Postup metamorfosy bývá někdy nepravidelný, ježto po normálních lístcích okvětních následují hned plátky s bliznami anebo i s vajíčky, a po těch teprva tyčinky neb plátkovité přeměny tyčinek.

8. Plodolisty uprostřed květu byly buďto úplně prosté a otevřené, aneb v dolejší části do různé výšky vespolek srostlé.

Lístky okvětní krom toho, co již o nich praveno, neposkytují nic zvláštního, pročež přistupujeme hned k vylíčení listů sexuálních. Vyrozumívám tímto názvem všecky listy květní, které buď pylová pouzdra, byť i nedokonale vyvinutá, anebo vajíčka a blizny aneb jen tyto poslední vyvinuté mají, i když jinak plátkovitě jsou vytvořeny. Abychom nabyli jasného přehledu všech zde se vyskytujících forem, kteréž nám bude popsati a vyobraziti, rozdělíme si všecky listy pohlavní ve tři hlavní skupiny: I. v listy pouze samčí, II. v listy obojpohlavní, obojaké čili androgynické, a III. pouze samičí. Listy androgynické, jevící největší rozmanitost, opět rozdělíme ve dvě skupiny, totiž A. v takové, při nichž pohlaví mužské převládá a celkový tvar stanoví, jelikož po obojí straně nesou pouzdra pylová, kdežto pohlavnost samičí toliko ve přítomnosti blizen aneb nanejvýš na pouzdrech pylových sedících vajíček záleží; B. v takové, při nichž pohlaví oboje toliko na jednu polovici listu se obmezuje, druhá polovice však nepohlavně a sice plátkovitě se vyvinula, a C. na takové, při nichž jedna polovice zcela neb převládně mužský, druhá výhradně ženský ráz jeví, tak že oboje pohlaví stejnou měrou v nich ku platnosti přichází.

I. Sexuální listy jsou čistě samčí.

1. Listy tyto mají dosti normální tvar, nejsouce plátkovitě přeměněny.

(Obr. 1., 2.)

První známka abnormální přeměny tyčinek s celým dvoupytličným prašníkem jeví se v tom, že na spodině listu již poněkud rozšířené, po obou stranách anebo někdy jen po jedné, větší neb menší zub téže povahy jako nitka sama se vyvinul (obr. 1.). Konec nitky vniká tu ještě dle pravidla do výkrojku prašníka na zpodu dvoulaločného. Na obr. 2. viděti podobnou tyčinku, však s nitkou již značněji rozšířenou, a s prašníkem od nitky, zvláště na pravé straně, méně ostře odděleným. Dvě pouzdra táhnou se po obou krajích v pravo i v levo; levé pouzdro ještě slabým výkrojkem poněkud od nitky jest odděleno, pravé však již zcela do kraje nitky přechází a vybíhá. Ostatní dvě pouzdra leží na vnitřní čili hoření k pozorovateli obrácené straně listu prašníkového, jak to i jinde jest pravidlem, jsouce od sebe toliko mělkou ryhou děleny.

2. Prašník ještě úplný, čtyrpouzdrý, nitka však plátkovitě vyvinuta.

(Obr. 3., 4.)

Zhusta se spatřují v abnormálních květech tulipánu prašníkové listy plátkovitě, t. j. na způsob okvětních lístků široce do plochy vyvinuté a též tak (červeně, doleji žlutě) barvené. Na prvním stupni této plátkovité přeměny bývá

konec listu ještě v úplný čtyřpouzdrý prašník vyvinut, a toliko část nitková na způsob plátku vytvořena. Toho způsobu jest prašný list obr. 3., při němž zároveň obě strany nestejně jsou vyvinuty, pravá strana vychází v mohutný, vzpřímený, červeně barvený ušet, jenž vyrostl v prodlouženém směru dolejší části listu a odklonil prašník, jenž jest vlastně na listu konečný, dle zákona fytostatického do postranní polohy; kdežto levá strana jest mnohem méně rozšířena a mnohem menším, níže stojícím lalůčkem neb zoubkem, asi jako v obr. 2. opatřena. Patrně vyrostl veliký pravý ušet na místě podobného zoubku v obr. 2., ana celá pravá strana plátkovitě a zvětšeně se vyvinula. Podobný jest také prašný list obr. 4., leč pravý ušet mnohem menší a prašník poměrně mnohem mohutnější, proto také zřetelněji konečný; obě mediánní pouzdra prašná, dole spojená, sbíhají po nitkové části níže, nežli pouzdra postranní. Na jiných plátkovitých tyčinkách toho druhu byl časem širší plátkovitý lalok sám zase ve dva laloky rozeklán.

Prašné listy obr. 1.—4. poučují nás zcela určitě o tom, kterak u příbuzných liliovitých, na př. *Allium* sect. *Porum, Ornithogalum* sect. *Myogalum* tyčinkám s nitkami trojklanými rozuměti třeba. V nejedněch morfologických spisech (na př. v Eichler-ových Blüthendiagramme) považují se postranní zuby anebo nitkovité přívěsky těchto nitek za útvary palistové, ale neprávem, neboť jak z plátkovitých tyčinek tulipánových zřejmo, jedná se tu pouze o trojklanou čepel, bez řapíku a bez palistů. Nitka normální tyčinky jest toliko velice stažená dolejší část čepele, jak plátkovité přeměny u tulipánu i jiných rostlin svědčí, nesmí se nikoliv všeobecně s řapíkem porovnávat, což se častěji stává toliko dle povrchní podobnosti, ale bez ohledu na fyllomorfosu v abnormitách jak tuto se jevící. O palistech tedy nemůže býti mluveno a bylo by s podivením, kde by se ve květu liliovité rostliny vzaly palisty, které ani zeleným lupenům vegetativním netoliko u liliovitých, ale vůbec u všech jednoděložných (vyjma jazýčky trav a stipulae intravaginales) nepříslušejí.

3. Prašníky neúplné, polovičné na listu prašném zcela plátkovitém.

(Obr. 5.—8.)

Tyčinky dokonaleji plátkovitě přeměněné rovnají se obyčejným lístkům okvětním dle barvy i konsistence; na zpodu a kolem prašných pouzder jsou žluté, ostatně tmavočervené. Prašní pouzdra na nich obyčejně již nesáhají až ku konci plátkovitého listu, jehož obě strany bývají tím způsobem nestejně vyvinuty, že při jednom kraji nalézáme pouzdra prašná, kdežto druhá sterilní polovice zcela plátkovitý tvar ukazuje. Tyčinka v obr. 5. má ještě velkou podobnost s onou na obr. 3., avšak pravé krajní pouzdro tu chybí, toliko tři pouzdra, obě prostřední a levé krajní, jsou vyvinuta. Špička prašníka, ač již mohutným lalokem po pravé straně poněkud na stranu pošinuta, přece ještě jest znatelna jako terminální část celého listu. V obr. 6.—8. však již prašník, jenž jest pouze poloviční, nabyl zcela polohy postranní, jelikož obě pouzdra jeho ponenáhlu do pravého plátkovitého laloku přecházejí, jenž zároveň konečnou část listu představuje. Z porovnání celé řady od obr. 1. do obr. 8.

vysvítá, jak malý postranní lalůček obr. 1. a 2. poznenáhla zveličev v plátkovitý lalok stává se konečným, kdežto prašníková, původně konečná část listu do postranní polohy přechází. Viděti z toho, že dvě sousední části rostlinné, z nichž jedna konečná, druhá postranní, mohou vzájemně vyměniti své postavení, jestliže poměrná jich mohutnost se změní, tak sice, že vždy mohutnější část postavení terminální zaujímá. Jeví se v tom zákon fytostatický, jejž jsem nejprve vytknul ve svých »Terminale Ausgliederungen«, jenž v morfologii rostlinné má zvláštní důležitost a jehož neznalost neb nedbalost mnohé morfology nejednou do těžkých bludů zavedla. Příčina zmohutnění toho laloku jest ale jeho zlupenatění či vlastně zplátkovatění pravé strany listové, kdežto lalůček na levé straně pod pouzdry prašníkovými v obr. 6. a 8. zůstal malým, nezlupenatělým. V obr. 7. levé pouzdro krajní ještě, jak v obr. 2., vybíhá na svém zpodu v oddělený lalůček; v obr. 6. již sbíhá zpovlovna do kraje listového. Mediánní pouzdro levé jest v obr. 6. a 7. ještě dobře vyvinuté, protáhlé, v obr. 8. však již velice redukované a krátké.

Charakteristický znak všech prašných listů obr. 5. až 8. spočívá v tom, že jedna strana listu ještě více méně zachovává ráz normální tyčinky, druhá strana neboli polovice pak ve způsobě plátku se vyvinula. Tyčinkovitá strana levá jeví ještě povahu nitky, jest žlutá, přitlouštlá; mediána mezi thékou levou a mezi plátkovitou pravou polovicí leží v žlabovité prohlubenině.

Co se dotýče pouzder prašných, tož potvrzují plátkovité tyto přeměny tyčinek tulipánových na novo, co již dříve vícekrát konstatováno, že totiž pouzdra krajní samým naduřelým, pylorodným krajem listovým tvořena jsou, jelikož, jako v obr. 2. 3. 4. 6., na zpodu a též i na vrcholku svém zřejmě v listový kraj přecházejí, kdežto pouzdra mediánní na vnitřní straně prašného listu jako dvě vyvýšené parallelní lištny se vyzdvihují. Jsou to výrostky neboli exkrescence listové z hoření (lícní) strany toho listu podél středního nervu vyniklé a tak jako obě polovice hlavní čepele listové pylorodným pletivem vyplněné. Čtyrpouzdrý prašník rovná se tedy čtyrkřídlému čili dvojčepelnému listu, jakové jsem nověji opět vyobrazil v rozpravě »o listech t. zv. šitých a exkrescenčních«, současně v Akademii předložené, ku kteréž v té věci odkazuji. Ostatně následující řada abnormálních forem poskytne nám další doklady a též morfologický poměr prašníka k plodolistu patřičně objasní.

II. Sexuální listy obojpohlavné (androgynické).

A. **Tytéž na obou stranách s pouzdry prašnými, na konci s dvěma bliznovými laloky.**

1. Bez vajíček.

(Obr. 9.)

Lalůčky bliznové na konci obojpohlavního listu prašního tvoří se na ten způsob, že list výkrojkem do mediány jeho vnikajícím rozštěpen jest ve dva laloky, kteréž více méně mají tvar lasturovitý a krajem svým dolů do krajních

pouzder prašníkových sbíhají. Oba bliznové laloky jsou tuhé, přitlouštlé, žluté, jak vosk kruché, zvláště podle kraje a zevnitř papillosní.

Ženskost dotčených listů obojetných záleží tedy toliko v bliznách; pohlaví mužské na nich velice převládá, takže jim přísluší název tyčinek bliznami opatřených. Takovýto prašný list představen v obr. 9.: týž se skládá ze dvou dlouhých krajních pouzder a ze dvou krátkých, toliko na zpodu prašníka pod širokým spojidlem vyvinutých pouzder středních; nitka má na zpodu 2 postranní zoubky (jako na obr. 1. a 2.) a na vrcholku dva veliké lasturovité laloky bliznové.

2. S vajíčky (zárodky semen) na některých pylových pouzdrech.

(Obr. 10.—12.)

Tyto obojpohlavné listy jsou rozmanitější a také zajímavější než ty, o nichž právě řeč byla. Povšechný tvar pořád ještě pochází od prašníka, ovšem že ve dva bliznové laloky rozeklaného. Konnektiv spatřuje se častěji porozšířen, takže obě théky, více méně dobře vyvinuté, jím jsou odděleny a dosti oddáleny, což zejména v obr. 11. a 12. se spatřuje. Vajíčka vznikají vždy na vnitřním kraji některého středního pouzdra pylového a sice v husté řadě nad sebou; na nitkové části listu nalezl jsem několik jich též pod krajním pouzdrem (obr. 10.).

V obr. 10. leží oba laloky bliznové parallelně na sobě, as jako na normálním semenníku (obr. 38.). Levá théka, ze dvou protáhlých pouzder složená, z nichž prostřední nese řadu vajíček, jest řádně vyvinuta a od nitky výstupkem basálním oddělena. Z pravé théky jest pouze krajní pouzdro dokonalé, táhnouc se od blizny až na nitku, která na té straně zřetelně oddělena není; mezi ním a vajíčkonosným pouzdrem levé théky jest dosti úzký konnektiv; zcela na zpodu toliko leží velmi krátké střední pouzdro pravé. Pod pravým krajním pouzdrem, při kraji, však přece z hoření strany, vynikla dvě vajíčka nad sebou a pod těmito zubovitý výstupek. Nepochybíme, domýšlejíce se dle srovnání, že jest totožným se zoubkem krajním, jenž v obr. 2. taktéž pod krajním pouzdrem se nalézá. Ale tento zoubek v obr. 10. jest na hoření stranu listovou ohrnut a přišit v tomtéž smyslu, jako okraj obšívaných listů bezu černého. Že pak v stejné čáře s tímto zoubkem dvě vajíčka sedí, není divno, poněvadž zárodky semenné, jak známo a jak i zde to shledáme, z krajů plodolistů vznikají.

Obojaký list v obr. 11. má v pravo théku, jejíž pouzdra, vajíček prostá, znenáhla do nitky sbíhají; levá théka však od nitky ostrým úhlem odmezená má mediánní pouzdro jen krátké, na něm pak řadu vajíček. Velmi podobný list vidíme v obr. 12., avšak s tím pozoruhodným rozdílem, že vajíčka nenese krátké střední pouzdro samo, nýbrž vajíčka tu sedí na vyvýšené, pylového pouzdra nemající lištně, která se pod pouzdrem tím na lícní straně nitky dolů táhne. Podotýkám ještě, že střední pruh nitky mezi žlutavou vajíčkonosnou lištnou a mezi žlutým krajem protější strany bylinnou, totiž zelenou podstatou se lišil, na znamení, že tato část již karpelloidně byla vyvinuta, jelikož na plodolistech a plodolistu blíže stojících přechodních formách střední část vedle vajíčkonosné semenice tím způsobem vyvinuta bývá.

B. **Listy obojaké pouze po jedné straně antheroidní i karpelloidní zároveň, v druhé polovině plátkovité.**

1. Pylorodý kraj bez vajíček, toliko bliznou opatřený.

(Obr. 13.)

Obr. 13., sem náležející, nepotřebuje dlouhého výkladu. Na levé straně jest dvoupouzdrá théka dobře vyvinuta, jsouc jako v předešlých případech věnčena lasturovitě točitým lalokem bliznovým, jehož kraj zřetelně do krajního pouzdra pylového přechází. Pravá polovina jest vytvořena na způsob okvětního listu neboli plátku, červená, na nehtu čili nitce a podél levé théky žlutě zbarvena, nahoře však ještě začátkem blizny opatřena.

2. Na straně prašníkovité kromě blizny také s vajíčky.

(Obr. 14.—16.)

Obr. 14. a 15. shodují se nejvíce s obr. 11., pokud se týče obojpohlavné strany listu této kategorie. Střední pouzdro jest totiž zde též jen krátké a na vnitřním svém kraji, v obr. 15., kde jest velmi široké a uprostřed rýhované, také na hořením okraji vajíčky posázeno. Bliznový lalok jest toliko nad prašníkovitou polovicí řádně vyvinut; plátkovitá polovice v obr. 15. hluboce rozeklána.

Odchylnější jest obojaký list obr. 16. On má na levo svou prašníkovitou stranu, na zdání toliko jedno krajní pouzdro, na vnitřním kraji jako vroubkované, čímž snad naznačen začátek tvoření se vajíček; čemu-li tak, musila by vroubkovaná část pouzdra za vnitřní (střední) však od krajního nezřetelně oddělené pouzdro býti považováno. Tento vroubkovaný vnitřní kraj pytlíčka přechází jak v obr. 12. v podélnou lištnu, která nese uvnitř zoubkovitý výrostek a nad ním, jak v obr. 10., dvě vajíčka, z nichž pouze jedno viděti, poněvadž vajíčko druhé oním zoubkem zakryto jest. Tento zoubek rovná se polohou svou patrně zubovitému výstupku obr. 10., nad nímž též dvě vajíčka umístěna, má však ještě více tvar krajních zoubků v obr. 1., 2., 17. Jestliže se, jakož pochybovati nelze, těmto zoubkům rovná, tedy z toho následuje, že jest okraj, zoubek ten nesoucí, v obr. 16. i 10. na lícní stranu pošinut a »přišit« na způsob obšívaných listů bezových. Plátkovitá pravá strana toho listu byla, jinak červená jsouc, na pokraji ztlustlá a bělavá, na způsob pylového pouzdra, ačkoli uvnitř, jak průřez ukázal, bez skutečného pouzdra pylového. Jest to však patrně přechod do antheroidního vytvoření partie krajní a list činí tudíž přechod do skupiny A a sice nejblíže do tvaru obr. 10.

C. **Obojetné listy po jedné straně prašníkovité (s pouzdry pylovými), na druhé karpelloidní s placentou vajíčkorodnou.**

Tvary v tomto oddílu se objevující jsou nad míru rozmanity, pokud se týče vytvoření poloviny karpelloidní. Pokud druhé, prašníkovité poloviny se týče, opakují se tvary obou předešlých kategorií, ovšem i s některými zvlášt-

ními odchylkami. Placenta na jedné a pouzdra prašná na druhé straně činívají často největší díl těchto obojakých listů; mezi nimi nalézá se pak dosti úzká žlábkovitá část střední (obr. 19.—22.). Někdy však jest tento prostředek porozšířen, třebas nikoliv plátkovité, nýbrž nažloutle zelenavé, přitlouštlé podstaty; tu pak semenice a pouzdra prašná pouze menší krajní části celého listu představují (obr. 18.). Také částečné plátkovité vyvinutí se jest možné, a sice ponejvíce na straně karpellové, ve kterémž případě hořejší podbliznový díl té strany bývá semenonosný, dolejší díl však plátkovitý a dosti velkým postranním lalokem pod placentou opatřený (obr. 17., 23.).

Jedinkráte namanul se mi list, jehož pylorodná polovina byla zcela plátkovitá; rozumí se, že tehdy scházelo pouzdro krajní a prašníkový tvar obmezoval se toliko na střední pouzdro pylové (obr. 24.).

Dle uvedených znaků roztřídím sexuální listy této kategorie ve tři skupiny.

1. Listy sexuální nikoliv plátkovité.

(Obr. 18.—22.)

Listy v obr. 19.—22. vyobrazené mají jednu stranu zcela po způsobu plodolistů (jako v obr. 33. a 34.) vyvinutu, nesouce řadu vajíček na lištně semeničné, která od tupého tlustého kraje vzdálena táhne se poblíže žlabovitě prohlubené části mediánní. Druhá antheroidní polovina se dvěma pouzdry prašnými, z nichž mediánní pouzdro často jen krátké jest, totiž jen na zpodu prašníkové části vyvinuto (obr. 20., 21., 22.), obmezuje mediánní úžlabinu vnitřním krajem těchto pouzder s druhé strany.

Co nejvíce na těchto listech překvapuje, jest ta okolnost, že v polovině karpelloidní semenice vajíčkonosná leží na hoření ploše listu, vzdálena od kraje jeho a s tímto nijak nesouvislá, což platí rovněž tak o obou semenicích pouhých plodolistů (jako v obr. 33. a 34.). Kdybychom neznali jiných poučných forem abnormálních, musili bychom z toho soudit, že vajíčka u tulipánu z hoření strany, ne však z kraje plodolistu vyrůstající jsou exkrescence z líce plodolistového, ne však úkrojky z kraje pocházející, což by odporovalo zkušenosti jinak nabyté. Kdekoli totiž na placentě buď nástěnné neb na centrálním úhlu jednotlivých pouzder se nacházející dvě řady vajíček vznikají, rovnají se dle všeobecného pravidla úkrojkům kraje plodolistového, placenty pak srostlým pokrajním částem plodolistů. To dokazují nade vši pochybnost ve mnohých případech pozorované zlupenatělé proměny takových plodolistů, na nichž vajíčka ve všech možných přechodech do skutečných úkrojků rozeklaného listu přecházejí. Dle téhož pravidla, ač-li i zde platnost má, měly by též u tulipánu a vůbec u všech Liliovitých vajíčka býti tvořena úkrojky plodolistovými, kteréž by tudíž na samém kraji plodolistu v abnormitách volně vyvinutého nacházeti se měly. Zatím však ve tvarech obr. 19.—22., 33. a 34. skutečnost tomuto předpokládání neodpovídá. Nicméně bude možno ukázati, že jest odpor ten jen zdánlivý, poněvadž pravý, skutečný kraj plodolistu přece v placentě se nalézá.

Prašníková strana řečených listů jest dílem beze stopy vajíček (obr. 19. a 20.); dílem sedí vajíčka mimo placentu též na vnitřním kraji krátkého

mediánního pouzdra a níže též na výstupku lištnovitém, jenž pod tímto pouzdrem jako další obruba mediánní rýhy až na nitkovou část listu se vztahuje, kdež pak s lištnou semenicovou ostrým úhlem se spojuje (obr. 21., 22.). V obr. 22. bylo pouzdro mediánní ostatně jako volně vyrostlý lalůček napříč přes úžlabinu střední přehnuto, však vajíček prosto; toliko pod ním na lištně sedí tam několik vajíček. Vůbec v obr. 20.—22. basis prašníkové části, v níž obě pouzdra se sbíhají, cípem více méně vystálým od nitkové části se odchyluje, kdežto v obr. 19. prašníková část nerozdílně do široké nitkové části přechází, do níž mediánní žlábek pak dále nesestupuje.

Odchylnější od právě popsaných forem obojpohlavních listů jest list obr. 18. (*A* z hoření, *B* z dolení strany čili rubu viditelný); jednak tím, že střední partie mezi placentou a prašníkovitým krajem druhé strany není tak úzká, žlábkovitá jako tamo, nýbrž značněji listovitě do plochy rozšířena a mnohem tenčí; jednak ale a to hlavně tím, že pravá povaha placenty zde jasně na jevo vychází. Kraj poloviny karpellární totiž tam, kde přestává býti bliznovitě papillosním, ve dva kraje se rozchází: v jeden více na líc obrácený, blánovitý a štěrbatý kraj, jenž zrovna k řadě vajíček vede a do ní přechází, a v druhý více na rubu položený, rovný, hraně podobný (v 18. *B* viditelný).

Připomeneme-li si, co jsem ve své rozpravě o listech šitých (bezu černého) vyložil, porozumíme snadno oběma krajům. Plodolist jest v obr. 18. krajem svým na líc ohrnut a »přišit«, a z tohoto kraje vynikají vajíčka; zadní kraj pak, jenž ohnutím a zlomením okraje povstává, jest hrana lomná. Tato hrana napodobí kraj listový tím klamněji, čím více ohrnutý a šitý pravý okraj k mediáně listu pošinutým a takto méně znatelným se stává. V obr. 18. není nikterak pochybno, že placenta vajíčkonosná tvořena jest ohrnutým krajem listovým, poněvadž kraj tento hořeji zcela zřetelně do kraje bliznového přechází a s hranou lomnou se pojí. Avšak v obr. 19.—20. placenta s hranou lomnou hořeji nijak nesouvisí, poněvadž tam hoření ohrnutý kraj, v obr. 18. tak patrný, dočista vymizel čili ablastoval, a tím kontinuita mezi ním a krajem bliznovým i hranou lomnou přerušena jest. Kraj bliznový tu sbíhá toliko do hrany lomné, která následovně se zdá býti sama krajem plodolistovým, ač jím není, poněvadž se nerovná kraji listu vegetativního. Poněvadž pak není placenta nic jiného, nežli ohrnutý a šitý pravý kraj plodolistový, vidíme na př. v obr. 20., jak tu dlouhá řada vajíček k lomné hraně konverguje, končíc posléze jemnou vyniklou čárkou, která dříve, než by lomné hrany dosáhla, se ztrácí, naznačujíc jistě poslední stopu pravého šitého kraje plodolistového.

Vajíčka na listu obr. 18., pod ohrnutým krajem sedící, byla neobyčejně zveličelá, již více zpotvořená, co do počtu nehojná; jedno z nich mělo nucellus z integumentů vyčnívající, jiné, nejdoleji stojící bylo v dlouhý nitkovitý přívěsek neb úkrojek přeměněno, patrně na pouhý nucellus neb vaječný hrboulek bez integumentů redukováno, což ostatně také nejdolejšímu vajíčku na placentě v obr. 19. podobně se přihodilo. Zoubek ohrnutého kraje nad vajíčky a též zoubek krajní doleji pod nimi v obr. 18. se nalézající jest nepochybně rovněž vegetativní obdobou nedotvořeného vajíčka. Na témž plodolistu pozorujeme ještě zcela na zpodu příčnou řadu malých vajíček, totiž v úhlu příčném, až

kam plodolist ten k jinému více vnitřnímu plodolistu přirostlý byl. Porovnáme-li tuto zpodní část listu se zpodem listu v obr. 21., vidíme týž mediánní žlábek, po jehož jedné straně lištna od kratičkého středního pouzdra prašného, a po jehož druhé straně placenta dolů sbíhá. Záhyb, v němž řada malých vajíček sedí, rovná se tudíž placentě a jak tato ohrnutému kraji plodolistovému.

Celkem má tedy karpelloidní polovina listu obr. 18. toto upravení. Hořeji pod bliznou jest kraj její na líc ohrnut a přišit, nese zde vajíčka, níže ono ohrnutí přestává, kraj jest plochý, až teprva na zpodu má místo nové ohrnutí placentální, zároveň ale přirostnutí až po tento kraj vajíčkorodný.

2. Listy sexuální na straně karpelloidní pod placentou plátkovité, totiž plátkovitým lalokem opatřené.

(Obr. 17., 23.)

Tyto listy potvrzují velmi očividně význam placenty karpellu tulipánového, jak z obr. 18. již seznán býti mohl. Že placenta tvoří ohrnutý a šitý kraj plodolistu, viděti zde zřejmě z toho, že ona dolejším svým koncem přímo přechází do vniterního kraje plátkovitého laloku, kterýžto kraj zvláště v obr. 17. rovněž na lícní stranu ohrnut (ale nikoliv šit) jest, takže lalok jest mušlovitě povydutý a na špičce kápovitý. Na obr. 17. jest veliká blizna karpellární strany helmicovitá, jejížto vnitřní kraj též očividně až k řadě vajíček se táhne. Antheroidní polovice toho listu tvořena jest dvěma dlouhotáhlými pouzdry; doleji pod středním pouzdrem má po kraji, jenž tu i zubem opatřen jest, podélnou lištnu, čemuž tak rozuměti třeba, že okraj listu zde na líc ohrnut a obšit jest, jako na listech bezu, kdež obšitý kraj též leckde zubovité výstupky z rubu svého tvoří (l. c. obr. 9., 11.). Druhý (levý) kraj hoření bliznové části má opět význam hrany lomné, tudíž také s lomnou stranou plátkovitého laloku na zadní straně listu v úhlu se spojuje.

List v obr. 23. má podstatně totéž morfologické ustrojení, jako list obr. 17., ale tvar poněkud jiný, jelikož ohrnutý lalok bliznový má podobu půlměsíce a s ohrnutým krajem placentálním v rohu se stýká. Vajíčka na placentě jsou značněji znetvořena; nejdelší vajíčko jest přeměněno v sterilní větší, ohrnutý lalůček (as jako v obr. 19.). Prašníková théka na levé straně jest zde mohutně vyvinuta a od nitkové části ostrým úhlem (jako v obr. 20. a p.) oddělena; její vnitřní, střední pouzdro jest velmi široké, ryhou podélnou opatřené, a nese na vnitřním okraji ještě řadu vajíček.

3. Listy sexuální v polovině antheroidní plátkovitě vyvinuté.

(Obr. 24.)

Jen jedinkrát mezi stem prohlédnutých obojpohlavných listů tulipánových naskytnul se mi list, jako v obr. 24., jehožto plátkovitá polovice nesla poblíže mediány úplně osamocené, široké pouzdro pylové, kteréž ostatně na vnitřní své straně tak jako protější placenta řadu vajíček nese.

24 *B* představuje poloschematický průřez tímto listem, v pravo plátkovitou částí a pouzdrem mediánním, s příslušným jedním vajíčkem, v levo karpelloidní částí s její jedním vajíčkem.

Že mediánní pouzdro zde isolované se zachovalo, kdežto na místě krajního pouzdra vyvinula se široká plochá část plátkovitá, není nic neobyčejného, viděli jsme to též na listu obr. 8., také jiné zplátkovatělé tyčinky (na příklad u *Camelie,* Pringhs. Jahrh. XI. Tab. VI a VII) to ukazují; aniž vytvořování se vajíček z mediánního pouzdra není nic nového, ježto i mnohé jiné androgynické listy květu tulipánového (obr. 10., 11., 15. atd.) stejně se chovají. Avšak právě ten úkaz, že mediánní pouzdro prašné, i když, jako v obr. 23., úplně jest isolováno a s krajem listu nijak nesouvislé, může v četných prostředních tvarech abnormálních tvořiti vajíčka, jest velmi nápadným a zdá se odporovati tomu, že vajíčka na placentě normální, jak bylo dokázáno, z ohrnutého a šitého okraje listového vznikají. K objasnění této zdánlivé nesrovnalosti na konec této rozpravy s hlediště všeobecnějšího a souhrnného se navrátím.

III. Listy sexuální jsou čistě samičí (karpelly).

Ježto jsem podstatnou zvláštnost úpravy karpelloidní a původ semenice vajíčkorodné již při některých listech obojakých dostatečně objasnil a ježto na čistě samičích plodolistech totéž ustrojení se opakuje, mohu se ohledně těchto stručnějším popisem spokojiti. Některé z nich vyznačují se více méně plátkovitou metamorfosou, jiné jsou zcela též povahy, jako plodolisty v semenníku, tedy přitlouštlé, nazelenalé. Blizny jsou na nich vždy více méně dokonale vyvinuty; vajíčka jsou aspoň na jedné straně, velmi zřídka scházejí úplně.

1. Plodolisty více méně plátkovitě přeměněné.

(Obr. 25.—32.)

Listy této kategorie jsou dosti rozmanitého tvaru a složení, tak že můžeme je rozděliti na 4 podřízené skupiny.

a) Obě poloviny plodolistu plátkovité, úplně bez vajíček.

(Obr. 25.)

Toho druhu plodolist vyobrazen jest v obr. 25. (ze strany dolení neb rubové). On jest na konci ve dvě velké, na sobě ležící blizny rozeklán, má uprostřed přitlustlý, zelený, ryhou ve dvé rozdělený střední pruh povahy tudíž karpelloidní, leč obě postranní poloviny jsou plátkovitě vyvinuté a taktéž červeně zbarvené. Tento úplně plátkovitý vývoj obou polovin nepřipouští možnost, že by vajíčka, byť i jen rudimentární, na listu tom vypučeti mohla, poněvadž okraj plodolistu, má-li vytvořiti vajíčka, u tulipánu musí býti ohrnut a obšit; mediánní exkrescence však, ze které by též vajíčka vyrůsti mohla (jaké jest mediánní pouzdro pylové v obr. 24. atd.), toliko prašníku, ne však plodolistu jest vlastní.

b) Jedna polovina plodolistu zcela plátkovitá, druhá karpidiální a vajíčkonosná.
(Obr. 26. a 27.)

V obr. 26. *A* jest vyobrazena vnitřní strana (líc) plodolistu, kterouž uprostřed v mediáně prorývá hluboká, úzká, chloupky posázená rýha. Po pravé straně rýhy hraničí s ní placenta s řadou vajíček, náležející straně karpelloidní, užší, stlustlé a zelenavé, jejíž ledvinkovitý bliznový lalok sbíhá v ostrou, dolejí se ztrácející hranu lomnou, jižto viděti v obr. 26. *B* se strany vnější (rubové). Následkem dokonale karpelloidního vytvoření této poloviny jsou kraj blizny a hrana lomná (tak jako na př. již v obr. 19. a 20.) od semenice úplně odloučeny bez nejmenší stopy nějakého inversního, do semenice přecházejícího kraje. Druhá polovice listu jest jen podle střední rýhy stlustlá a nazelenalá, ostatně tence plátkovitá, červeně a doleji žlutě zbarvená, končíc se lalokem, jehož podoba není zřejmě bliznovitá.

Jestliže v obr. 26. původ a význam placenty dle výše řečeného není naprosto patrný, ukazuje nám jej list v obr. 27. opět velmi pěkně. Viděti tu, jak listový kraj z bliznového laloku karpelloidní strany sestupující, tak jako v obr. 18., se dělí v zadní, ostrou, lomnou hranu a v opravdový okraj listu, jejž až do samé řady vajíček, částečně znetvářených, sledovati možná, takže i zde velmi krásně se potvrzuje, že semenice od ohrnutého a šitého pravého kraje listového pochází. Ostatně se list ten shoduje ve všem s listem formy předcházející.

c) Jedna polovina plodolistu zcela karpelloidní, druhá jen dole karpelloidní vajíčkonosná, ve větším hořením díle plátkovitá.
(Obr. 28. a 29.)

Levá strana tohoto plodolistu jest z největší části plátkovitě vyvinuta, toliko nejdoleji má povahu plodolistu a tam se i kraj listu směrem dolů dělí opět v lomnou hranu, na rubu ležící, a v pravý ohrnutý okraj listový, jenž představuje placentu, na níž nemnohá vajíčka vypučela. Karpellární polovina listu (na obrazci pravá) má dobře vyvinutou papillosní bliznu, níže pak inversní, s hranou lomnou této strany nesouvisící placentu, která na spodu téměř pod pravým úhlem jsouc zlomena, pořád ještě vajíčka nesouc napříč horizontálně obloukovitě přes lícní stranu se táhne, poněvadž tam plodolist nejdolejší spodinou svou ku vnitřním plodolistům byl přirostlý. Opakuje se tudíž zde, ale srozumitelněji, totéž úhlovité zlomení placentového ohrnutého kraje doleního, se kterým jsme se již na obr. 18. seznámili.

V obr. 29. představena toliko jedna polovina podobného plodolistu, mediánním řezem oddělená, a sice ta, která na dolejšku karpelloidní, hořeji plátkovité vyvinutí jeví. Zvláštního vyobrazení zdála se proto hodnou býti, že ukazuje, kterak pravý ohrnutý okraj listový nad placentou vskutku mizí (ablastuje), a že tedy pravé střední postavení mezi polovinou dvoukrajní (jak v obr. 27.) a mezi polovinou, jejíž placenta zcela isolována (na př. v obr. 26., 28. v pravo), zaujímá.

Petaloidní okraj totiž v obr. 29. od hrany lomné se dělí a na stranu lícní se odvrací, jako v obr. 27., avšak místo aby sbíhal až dolů k vajíčkům, záhy

a v značnější vzdálenosti od řady vajíček, ale zrovna nad ní přestává, tak že mezi oběma vnitř od strany lomné leží prázdná mezera, lišící se poněkud od ostatního líce plodolistu tím, že velmi drobnými papilkami jest poseta. Souvislost placenty s ohrnutým krajem listovým jest zde již přerušena, leč ohrnutý a obšitý ten okraj aspoň z části ještě se vyvinul. Jinde již ani tento rudiment ohrnutého kraje nedojde vyvinutí a tím placenta od hrany lomné, která nyní kraj takového listu zastupuje, úplně oddělenou se stává.

d) Polovina listu částečně petaloidní (aneb někdy obě poloviny) jest v hoření části karpelloidní, v dolení části v plátkovitý lalok vyrostlá.

(Obr. 30.—32.)

Obr. 30. a 31. představují takovéto poloviny plodolistů, jichž druhá polovina byla zcela karpelloidní. V obr. 30. jest plátkovitý lalok velmi veliký a dvouklaný. Hóření jeho kraj dělí se zase zřejmě v zadní lomnou hranu, která do kraje blizny přechází, a v přední (lícní) obloukovitou placentu, jejíž oblouk hořením koncem sice ku hraně lomné konverguje, však jí úplně nedosahuje. Mezi bliznou a lalokem plátkovitým jest tedy okraj listu patrně zas invertován, totiž okraj vajíčkonosný na lícní stranu ohrnutý a obšitý. Také tento plodolist byl na spodu k jinému vnitřněji ve květu stojícímu karpelu přirostlý, jako v obr. 18. a 28., a tudíž se vyvinula v úhlu srostnutí druhá dolejší řada vajíček, o níž platí totéž, co ohledně této basální příčné části placentové při obr. 18. a 28. povědíno.

V polovině plodolistu obr. 31. leží však obloukovitá placenta blíže k lomné hraně, která tvoří chobot mezi hoření částí plodolistu a malým lalokem. Placenta nesoucí více méně znetvořená vajíčka jest zde ještě zřejměji inversním okrajem způsobena, spojuje se též s krajem lalůčku a hranou lomnou, kdežto směrem vzhůru bez spojitosti s krajem se tratí.

Konečně vidíme v obr. 32. třílaločný plodolist s plátkovými dvěma postranními laloky, jenž jest i dole vůbec plátkovitý, nahoře pak veskrze karpelloidní. Hořejšek tento má na konci dva bliznové laloky (v pravo viděti papillosní plochu bliznovou). Obě placenty jsou opět obloukovité, poněvadž se dole spojují s ohrnutým okrajem hořením obou laloků, nahoře pak zase ku kraji blizen a k lomným hranám vystupují, též s těmito se spojujíce. Uprostřed mezi placentami, kde střední nerv probíhá, jest prohlubená úžlabina jako i jinde chloupky porostlá. Tudíž i tento list poskytuje velmi pěkný doklad k mé theorii inversních krajů listových vajíčkorodných čili semenicetvorných.

2. Plodolisty naskrze karpelloidní.

(Obr. 33.—35.)

Obr. 33. představuje takovýto plodolist zcela volný, který se od plodolistů v semenníku (obr. 38.) srostlých toliko tím liší, že jest více do plochy rozprostřen. Oba laloky bliznové mají inversní kraje, které dolem obloukovitě do obou postranních lomných hran přecházejí. Placenty leží na hoření straně podle mediány, žlábkovitě prohlubené a chloupky vystlané, těsně vedle sebe,

tak že obě řady vajíček se téměř dotýkají a jsou od postranních lomných hran tudíž valně oddáleny, nemajíce s nimi žádné spojitosti. Poněvadž však placenty dle předchozího mého výkladu jsou tvořeny pravými, leč inversními kraji listovými, tedy jest celý líc takového karpelu obmezen na chloupkatý úzký žlábek mezi placentami.

Plodolist obr. 34. liší se jedině tím, že byl na spodu svém po obou stranách (zde řezem oddělených) přirostlý ku plodolistům vnitřněji postaveným a vespolek na způsob obr. 36. srostlým; prostředek však byl méně vysoko přirostlý, tak že dělal tašticovitou prohlubeninu, do níž i placenty dolů zasahovaly.

Abych ničeho nepominul mlčením, co ve květech abnormálních tulipánů bylo mnou pozorováno, vyobrazil jsem ještě v obr. 35., a sice ze hřbetní strany, zcela neobyčejný malý plodolist (zde zvětšený), který jsem jen jedenkráte nejvnitřněji ve květu shledal. Ačkoli zcela karpelloidní, neměl na vnitřní straně ani semenic ani vajíček založených, tvaru byl kuželovitého; zvláště však odchylně vyvinuta byla blizna, kterážto nebyla jako jindy ve dva laloky rozdělena, nýbrž byla celá, jednoduchá, trojhranně štítkovitá, toliko vně na spodu ve dvě ramena rozdělena.

Jak již praveno, nebyly plodolisty v abnormálních květech tulipánových vesměs volně vyvinuty, než častěji bylo jich několik po stranách mezi sebou srostlých, ovšem ne tak úplně, že by byly dělaly uzavřený semenník, nýbrž jen tak, že dělaly otevřené, na plocho rozložené skupiny, jaké jsem na příklad v obr. 36. a 37. představil. Způsob srostnutí na nich vidíme velmi dobře. V obr. 36. jsou dva plodolisty as do polovice spolu srostlé vyobrazeny ze strany vnější, v obr. 37. tři do nestejných výšek sousedními kraji srostlé plodolisty ze strany vnitřní. Zvláště tyto poslední ukazují zřejmě, že se srůst udál pouze hranami lomnými, tak že vnitřní plochy mezi těmito hranami a mezi semenicemi zůstaly volnými. V obr. tom jest na pravo stojící plodolist s prostředním srostlý až ke bliznám, prostřední s levým ale pouze do polou hrany lomné. Levý volný kraj levého plodolistu měl ostatně vyvinuta dvě pylová pouzdra (jedné théky), plodolist ten byl tudíž obojpohlavný.

Poněvadž v abnormálních květech našich plodolisty, i když po krajích částečně srostly, uzavřeného semenníka netvoří: tudíž se tyto květy staly v podstatě nahosemennými; od gymnospermických plodolistů liší se otevřené karpely těchto květů útvarem blizen, kteréž tu jsou ovšem, jako zvláště v obr. 37., všelijak nepravidelně a nestvůrně vyvinuty.

Tím by byla řada forem sexuálních listů abnormálních tulipánů, zajisté velmi dlouhá a velmi rozmanitá, úplně vyčerpána.

O vzájemném postavení sexuálních a okvětních listů jsem již hned z předu, čeho potřebí bylo, podotknul, zejména že tyto listy často velmi četné a ve mnohých trojčetných kruzích sestavené se spatřují. Ale i normálně pětikruhé květy s abnormální metamorfosou se vyskytují, které možná s normálním květem přímo porovnati, pročež takový květ pro postup metamorfosy abnormální zvláště zajímavým býti může. Též nescházejí květy mající méně listů a

méně kruhů, než kolik je jich ve květu normálním, který má 15 listů v 5 kruzích, jest tudíž pentacyklický. — Někdy jest postup metamorfosy nepravidelný, někdy ku podivu pravidelný, čehož příklad vidíme ve květu tetracyklickém, jehož diagram podán v obr. 39. V diagramu tom viděti v kruhu prvním pouze dva nezměněné listy perigonové *pp*, třetí list *sp* jest jen z půle ve dvoupouzdrovou théku přeměněn; v druhém kruhu jest jeden list sp_1 na jedné straně plátkovitý, na druhé straně prašníkovitý o třech pouzdrech pylových, dva ostatní *ss* jsou tyčinky málo pozměněné, čtyrpouzdré; třetí kruh sestává ze dvou tyčinek $s_1 s_1$ a ze třetího listu obojakého *sc*; poslední, čtvrtý kruh skládá se ze tří otevřených plodolistů na způsob obr. 33. V tomto květu jest tedy pochod metamorfosy urychlen proti květu normálnímu, a vytvořením přechodních středních tvarů v pravidelném postupu vyznačen. Okvětí jest redukováno na jeden kruh a i z toho již jeden člen napolo v prašník se přeměnil.

Taková redukce kruhů květních má též pro fylogenii svůj význam. Redukce okvětí na jeden kruh, která se zde děje abnormálně, mohla se někdy ve vývoji fylogenetickém dostaviti zcela normálně. Skutečně máme mezi jednoděložnými rostlinami jeden řád, Graminey, jehožto okvětí záleží v jediném trojčetném kruhu (lodikule, u *Streptochaete* plévovité lístky), s vnějším kruhem tyčinek se střídajícím. Bylo z toho uzavíráno, že u trav vnější kruh okvětní jest potlačen (ablastován), však bez nutné příčiny. Zajisté ve květu tulipánu obr. 39. nějaký vnější kruh není potlačen, nýbrž metamorfosa vnitřní kruh okvětní jaksi přeskočila tím, že hned druhý kruh z většího dílu prašníkovou metamorfosu podstoupil, čímž celý květ o jeden kruh se zkrátil. Totéž platí o normálním květu trav; hypothesa nějakého abortování vnějšího kruhu nemá při něm žádné oprávněnosti.

Jest nyní otázka, zdali a jak vylíčené abnormity o normální morfologii semenníka a prašníků nás poučiti mohou. Příležitě a částečně již v průběhu tohoto pojednání k vůli porozumění samým abnormitám musil jsem poukázati na některé vývody, ku kterým ony abnormity oprávňují. Nyní však musím dekukce z nich v souvislosti a podrobněji učiniti.

Co se týče plodolistů a jejich placent, seznali jsme již tolik, že placenty tvořeny jsou do vnitř vehrnutými a šitými (invertovanými) kraji plodolistů; že při této inversi povstati musí hrany lomné, které, poněvadž po stranách leží a ostré jsou, představují nové kraje plodolistů karpelloidně vytvořených, a že spojitost mezi placentami a hranami lomnými ablastováním spojovacích částí invertovaného kraje na nich jest přerušena a neznatelna.

Poněvadž pak vajíčka na těchto invertovaných krajích, jakožto placentách, vznikají, jest to i zde u tulipánu nepochybno, že pocházejí přeměnou úkrojků plodolistových, ačkoli žádné řady přeměn z vajíčka do úkrojku nemohly býti pozorovány, nanejvýš přeměna v jednoduché nitkovité přívěsky, které se zajisté zakrnělým úkrojkům listovým rovnají. U jednoděložných rostlin taková přeměna v úkrojky vegetativní vůbec jest velmi nesnadna; kdežto u rostlin dvou-

děložných zhusta a v nejpěknějších přechodních tvarech bývá pozorována. Také inverse krajů listových u Dvouděložných v abnormitách se spatřuje;[1]) lístky z vajíček povstalé obracejí pak lícní stranu svou proti líci plodolistu, což z ohrnutí a »přišití« okraje samo sebou následuje. V pokročilejší vegetativní přeměně není kraj plodolistu více invertován, úkrojky vajíčkové tu vycházejí od kraje normálního, postranního, jako na obyčejném listu rozeklaném. U tulipánu však vajíčka a jich přeměny jen potud na placentě se nacházejí, pokud jest invertována; jakmile v metamorfose plátkovité normální postranní kraje zas se objeví, zmizela vajíčka úplně, t. j. nedošlo ani k jich založení a pozdějšímu přetvoření na krajích těchto.

V morfologii normální jedná se však netoliko o karpelly abnormálně volné a isolované, nýbrž o způsob jich vyvinutí a srostnutí v celém semenníku. Tu třeba porovnati celý semenník normální (obr. 38. *A*) a jeho plodolisty s formou plodolistů volných (obr. 33.). Semenník tulipánu jest zevnitř trojboký a trojhranný, nese na konci tři přisedlé, ze dvou ploských, k sobě přiléhajících laloků se skládající blizny. Třem hranám odpovídají uvnitř tři pouzdra (obr. 38. *B* na průřezu); v každém pouzdře dvě řady vajíček na úhlu vnitřním. Příhrádky tři mezi pouzdry jsou tlusté, nejsou však, aspoň v mladém semenníku, ve středu dokonale srostlé; jsouť mezi nimi tři jemné skuliny, od středu ke třem pouzdrům paprskovitě se rozbíhající. Tečkované čáry prostředkem každé příhrádky naznačují místa, kde tři plodolisty, z nichž každý jedno pouzdro v sobě chová, vespolek jsou srostlé. Porovnejme nyní průřez jednoho takovéhoto plodolistu semenníkového v obr. 38. *B* s průřezem plodolistu volného v obr. 38. *C*. Rozdíl obou průřezů plodolistových záleží jedině v tom, že plodolist v semenníku jest na průřezu ještě užší, za to tlustší, hlouběji vydutý, a že hrana placentální *y* jest ostřejší. Srostnutí dvou sousedních plodolistů děje se celou širší plochou, ležící mezi hranou lomnou *x* a placentou *y*. Srostnutí plodolistů otevřených a ploštějších v abnormálních květech (obr. 36., 37.) není tudíž tak dokonalé, poněvadž tam toliko na lomných hranách *x* se děje.

Poznání morfologické skladby semenníka umožňuje se toliko poznáním abnormálních volných forem plodolistů a jich srovnáním mezi sebou i s normálním stavem semenníkovým. Ohledání vývoje málo tu spomáhá. Již to, že semenník složen jest ze tří listů, vespolek srostlých, ukazují nejjistěji abnormity; při vývoji objeví se sice tři počátky listů, avšak pod těmito zdvíhá se potom celistvý uzavřený vak a na vnitřní jeho stěně tři lištny neb žebra, jakožto počátky příhrádek. Že v tomto vaku jsou srostlé části těchže plodolistů obsaženy, jichž počátky nejprve se objevily, že ve příhrádkách srostlé jsou inversní okraje těch plodolistů, jejichž pravý kraj jest tam, kde vajíčka vznikají, a že tyto jsou úkrojky plodolistu: to všecko pouze abnormity učí, vývojezpyt o tom všem nic nepraví. Vývojezpyt spíše všelijaké bludné názory vykojil, jako když tvrdil Payer, že jsou příhrádky osní části lůžkové, anebo Schleiden dokonce, že celý semenník Liliovitých rostlin jest částí stonkovou (»Stengelpistill«). Teprva abnormity rozptýlily a vyvrátily podobné »fantasie«.

[1]) Na př. u *Trifolium repens*, *Aquilegia vulgaris*.

Že jsou placenty tvořeny inversními kraji plodolistu, to dokázáno ze samých abnormit tulipánových; kdyby však se někdo nad novou theorií inversních krajů pozastavoval a se tázal, kde že jest ještě nějaký příklad podobného vytváření listu, možno poukázati ještě k analogii obšitých listů bezu černého, které nepopíratelně dle téhož principu ustrojeny jsou jako karpelly a obojaké listy abnormálních květů tulipánových. Nechci porovnání jich dále prováděti, poněvadž jest příliš patrné, a každý snadno sám si je učiní, kdo tvary lístků bezových na tab. I. výše citovaného pojednání v úvahu vezme. Jedině k tomu poukazuji, že tak silná inverse krajů jako na plodolistech tulipánu obr. 33. a 34. nalézá se též na lístkách bezových obr. 10. *b c*, kde líc listní též na úzký pruh mezi obšitými kraji se obmezuje.

Úkazy, které na přeměnách prašníku tulipánového a na obojpohlavných listech jsme pozorovali, jsou rovněž pro morfologii květu velice závažné. O plátkovitých přeměnách prašníku tulipánového již svrchu na patřičném místě jsem jednal, zbývá mi toliko poukázati na shodu mezi těmi přeměnami a mezi listy exkrescenčními na tab. II. mé rozpravy o listech šitých a výrostky opatřených. Jako tam listy obr. 14., 15., 21., 22. zřejmě ze dvou polovin se skládají, které každá se svou požeberní exkrescenční lamellou zvláštní tašku tvoří, tak i prašník tulipánu v obr. 1., jehož poloviny dvoukřídlé, dvoupouzdré slovou pytlíčky neb théky prašníkové. Když pak u tulipánu jedna polovice v plátkovitou neb karpellovou podobu se proměnila, zachovává mnohdy ještě druhá prašníkovitá polovice morfologický tvar tašky, jelikož krajní a mediánní pouzdro té polovice na zpodu se pojí, jako v obr. 8., 15., 20., 21., 23. a j. V druhé modifikaci čtyrkřídlého listu od *Phloxe* a *Dictamnu* (l. c. obr. 19., 20.) nesouvisí exkrescence na zpodu s krajem své poloviny, nýbrž pojí se vespolek na středním nervu, tvoříce sekundární čepel výrostkovou. Totéž spatřujeme na mnohých prašníkových přeměnách tulipánu, na př. v obr. 2., 3., 4., 6. Konečně jsou i takové formy abnormálního prašníku tulipánového, na nichž mediánní pouzdra, tedy požeberní exkrescence dole ani mezi sebou na nervu, ani s kraji hlavní čepele nesouvisí, na př. v obr. 8., 9., 14., zvláště 24., při tom jsou ta pouzdra často jen krátká a jen na zpodu čepele vyvinuta. Ty se chovají tedy rovněž tak jako isolované požeberní výrostky zelného listu (l. c. obr. 25.).

Obojpohlavné listy tulipánu pak jsou způsobilé k tomu, objasniti poměr prašníka k plodolistu vajíčkorodému. Zvláště pozoruhodný úkaz jest ten, že se při těchto listech velmi zhusta objevují vajíčka na mediánním pouzdře prašném, a sice na jeho vnitřním, ku střednímu nervu obráceném kraji, tak na př. v obr. 10., 11., 14., 15., 23., 24. Tatáž exkrescenční lamella tudíž produkuje pylové pouzdro i úkrojky vajíčkotvorné zároveň.

Že krajní pouzdra prašná nikdy vajíčka netvoří, není nikterak s podivením, jelikož vajíčka vždy toliko na ohrnutém kraji vznikají; okraj listu, jenž pouzdro marginální v sobě vyvinul, však jest přesně postranní, nikoliv inversní. Namítá se však otázka, proč právě exkrescence prašníková má schopnost vytvořovati vajíčka? Kdo by neznal vyložený mnou původ placent z inversních krajů (v obr. 33.) a ty abnormity, které jej dokazují, mohl by ze vznikání vajíček

na mediánním pouzdře souditi, že také placenty normální jsou požeberní exkrescence, s krajem nesouvislé. Závěrek ten by byl zajisté mylný, byl by však nezbytný, kdyby z ojedinělé abnormity směly se činiti dalekosáhlejší vývody. Před takovýmto používáním abnormit nelze dost důtklivě varovati. Mnozí morfologové od abnormit proto právě se odvrátili, že viděli z ojedinělých fakt abnormálních činiti překvapené a chybné vývody. Vždy jest zapotřebí co možná hojných a souvislých řad abnormálních tvarů téže kategorie, jejichž mezi sebou a s normálním tvarem srovnáním teprve možná dojíti pravé představy morfologického složení.

Jak se to tedy srovnává, že vajíčka jednak normálně i v abnormitách na inversním kraji plodolistu, jednak zase na kraji požeberní exkrescence prašníkové abnormálně vznikají? Na to nalezneme postačitelnou odpověď v takových tvarech obojakých listů tulipánových, ve kterých vnitřní kraj mediánního pouzdra prašního do inversního kraje nejdolejší části listu přechází (obr. 17., 18. *A*, 20., 21.). Tento inversní kraj jest normálně schopen tvořiti vajíčka, neboť jest totožný s placentou; vnitřní kraj exkrescence prašníkové jest ale jeho pokračováním vzhůru jdoucím, pročež jest pochopitelno, že i na tomto, jako v obr. 21., a potom též na isolovaném pouzdře mediánním, jako v obr. 14. a 24., vajíčka vypučeti mohou.

Znázornění morfologické úpravy takového obojpohlavního listu podal jsem v obr. 40. V polovině pravé ohrnutý, vlastně inversní okraj tvoří pouze placentu vajíčkorodnou; v levé polovině exkrescence mediánního pouzdra pylového má proti střednímu nervu vyvinutý kraj, který doleji přichází v inversní kraj čepele hlavní. Mysleme si v první polovině hoření část invertovaného kraje vzhůru prodlouženu a »přišitu« a máme tutéž exkrescenci zároveň placentální, jakou v levé polovině vidíme.

Na obyčejném prašníku ovšem mediánní exkrescence nemá vyvinutý nějaký kraj, na němž by vajíčka vyrůstati mohla; ona se chová tak jako exkrescence na listu *Phloxe* v obr. 15. citovaného mého pojednání. Výrostkové střední pouzdro vajíčkorodné chová se naproti tomu tak jako exkrescence na listu obr. 14. *Phloxe* (v levé polovině), které na straně žebra středního vyvinuly dolů jdoucí okraj, právě jako exkrescence v obr. 39.

Poněvadž tedy exkrescence požeberní mohou vyvinovati inversní, k žebru střednímu hledící okraj, který se situací svou s inversním krajem čepele hlavní shoduje, po případě do ní přechází, mohou i na mediánním pouzdře prašném v abnormitě, a sice jen na vnitřním požeberním jeho kraji, vypučeti vajíčka, jako na normální placentě, ačkoli tato ze žádné exkrescence požeberní nepochází.

Vůbec bylo možno dokázati, že rozmanité formy a přeměny abnormální, které jsou možné pro prašník tulipánový, mají své dokonalé analogie na rozličných formách vegetativních listů exkrescencemi opatřených, čímž tím jistěji stvrzeno, že vytváření prašníku řídí se v normálním i abnormálním stavu týmiž zákony, kterým podléhá vytváření se oněch listů vegetativních.

Nejvšeobecnější výsledky ze studia abnormálních květů tulipánových čerpané, ale netoliko pro rod Tulipa a Liliacey, nýbrž pro veškeré Angiospermy platné a tudíž pro všeobecnou morfologii důležité, jsou tyto dva:

1. Prašník jest list dvěma lícními exkrescencemi opatřený, tudíž 4křídlý, v obou polovinách čepele hlavní i v obou exkrescencích po pylovém pouzdru vyvinující; patří tudíž mezi listy exkrescenční.

2. Plodolist neb karpell, jakožto součástka semenníka, jest list s okraji na lícní stranu ohrnutými a »obšitými« čili invertovanými a na krajích těch vajíčka jakožto úkrojky přeměněné nesoucí, patří tudíž mezi listy obšité. Srůst plodolistů děje se plochami mezi invertovanými kraji (semenicemi) a hranami lomnými.

Budiž mi na konec ještě dovoleno, učiniti k výsledkům právě formulovaným theoretickou poznámku. Výsledky takové, vyzískané netoliko empirickým ohledáním hotové formy některého ústroje a jeho vývoje, nýbrž srovnávacím sledováním všech variačních přeměn, které se s ním při změně vnitřních disposicí, do jisté míry snad nějakými vlivy vnějšími způsobené, to jest tedy v tak zvaných abnormitách díti mohou, byly z několika stran označeny jakožto výsledky »spekulativní morfologie«. Spekulativní může slouti potud, pokud béře rozmyslný ohled na všecky badání přístupné zjevy, které v souvislý celek spojuje pomocí názoru duševního a logické abstrakce, tedy spekulací vědeckou; a takováto morfologie jest vrcholem racionální morfologie. Avšak tato oprávněná, za subjektivními vidinami se nijak nehonící spekulace opírá se veskrze o bezpečná, správně poznaná fakta, a jest tudíž vždy přístupna objektivní kritice, které nejen se nevyhýbá, nýbrž kterou sama si přeje a vybízí. Výsledky její mohou býti po případě zamítnuty neb opraveny, ale nikoli autoritářským a doktrinářským odpíráním, nýbrž jen tehdy, když by se ukázalo, že některá fakta, na něž se odvolání stalo, nebyla správně vyzkoumána neb pojata, aneb že v dedukci učiněn logický poklések.

Tohoto měřítka nekladou však všickni botanikové na morfologii »spekulativní«. Stůj zde příklad, týkající se právě jedné z mých thés výše vyslovených, totiž o prašníku Angiospermů. Jeden z novějších autorů, který jinak o abnormálních metamorfosách dosti správně soudí, praví totiž, že De Candolle-ův výklad prašníka vývojem nedochází podpory nižádné, rovněž tak jako Braun-ova a moje theorie exkrescenční; připustí-li se však tato poslednější jako důmyslný příspěvek k spekulativní morfologii, což na př. Engler ve svých »Natürliche Pflanzenfamilien« činí, tož prý snad i De Candolle-ův náhled nezasluhuje úplného zavržení.[1])

Jak jest možná, přiznávati skoro stejnou hodnotu a platnost dvěma obsažně i věcně úplně různým, ano sobě odporujícím theoriím? Uznává-li někdo theorii

---

[1]) M. Kronfeld: Über vergrünte Blüthen von *Viola alba* Bess. (Sitzungsber. d. kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, math. naturw. Cl. Bd. XCVII. Abth. I. 1888. Separatabdr. S. 7.)

exkrescenční, nemůže nijak přisvědčovati theorii De Candolle-ově. Neboť tato kdys učila, že ustrojení prašníka pochází od kornoutovitého stočení obou polovic čepele tyčinkové až po střední žebro, s nímž oba kraje srostly, takže povstávají dvě dutiny, pouzdra pylová, a v těch že z přirostlých krajů vznikají zrnka pylová, zrovna tak jako ze srostlých krajů plodolistu, rovněž kornoutovitě stočeného, v dutině semenníkové vznikají vajíčka. Theorie tato jest spekulace lichá, žádným faktem teratologickým ani vývojem nepotvrzená, spočívající na chybném porovnání prašníka se semenníkem a k tomu ještě na mylném starém mínění, že má prašník toliko 2 pouzdra, anto jich má 4, a že dutiny pouzder jsou původní, any teprv isolováním mateřských buněk pylových později povstávají. Analogie pylových zrnek a vajíček jest též pochybena, protože se pylová zrnka s vajíčky naprosto srovnati nedají. Naproti tomu theorie exkrescenční má pevný základ v četných a veskrze srovnalých faktech teratologických; vývoj sice jí nemůže sloužiti k podpoře, t. j. on ji nedokazuje, poněvadž k řešení podobných otázek morfologických vůbec často nepostačuje, ale vývojezpytná fakta jí také v ničem neodporují a mohou s ní zcela dobře býti uvedeny v soulad.

Jest tedy rozdíl veliký mezi spekulací lichou a spekulací přesnou, vědeckou.

Vysvětlení obrazců.

Tab. I.

Obr. 1. a 2. Tyčinky tulipánu zlehka přeměněné, ze strany vnitřní, lícní (jako ve všech následujících obrazcích, kde není opak toho udán).

Obr. 3.—8. Prašní listy čili tyčinky v pravé polovici své plátkovitě přeměněné.

Obr. 9.—21. Listy sexuální obojpohlavné.

Obr. 9.—12. Sexuální listy po obou stranách s pylovými pouzdry, na konci s bliznami.

9. Pylová pouzdra bez vajíček.
10. Mediánní pouzdro levé s vajíčky; pod pravým krajním pouzdrem dvě vajíčka, pod nimiž zubovitá exkrescence.
11. Na krátkém mediánním pouzdře prašném řada vajíček.
12. Pod mediánním krátkým pouzdrem na vehrnuté hraně placentální několik vajíček.

Obr. 13.—16. Pohlavní listy po jedné straně prašníkovité (s pouzdry prašnými) a s bliznou neb i s vajíčky, v druhé polovici plátkovité a sterilní.

13. Pylová pouzdra bez vajíček.
14. a 15. Mediánní pouzdro na vnitřním kraji s vajíčky.
16. Pylové pouzdro na vnitřním kraji trochu vroubkované, pod ním zoubkovitý výrostek, na jehož hořením okraji dvě vajíčka, z nichž jen jedno viditelno, druhé nižší do vnitř zatlačeno a ukryto.

Obr. 17.—21. Pohlavní listy na jedné straně prašníkovité, na protější s placentální lištnou vajíčka nesoucí.

17. Obojpohlavní list na placentální straně s plátkovitým lalokem; v úhlu mezi nimi přechází lištna vajíčkorodná do vehrnutého kraje laloku.

18. A z hoření, B z dolení strany. List na straně semeničné nad vajíčky plátkovitě vyvinutý a tam s krajem vehnutým a přesně k řadě vajíček se táhnoucí. Hrana lomná na zadní straně (v B) předstírá druhý (ovšem nepravý) kraj plodolistový.
19. a 20. Listy podoby více karpidní, tlusté, nikoli plátkovité, na straně antheroidní (na pouzdrech pylových) bez vajíček, pouze na straně protější četná vajíčka nesoucí.
21. List podobný obr. 20., avšak také na vnitřním kraji krátkého středního pouzdra pylového a na kraji doleji pod ním mediánní rýhu obmezujícím vajíčky posázený.

Tab. II.

Obr. 22.—24. Listy obojpohlavní, po jedné straně s pouzdry pylovými, na druhé se semenicí vajíčkonosnou.
22. List karpidiální, nikoli plátkovitý, podobný onomu v obr. 20., leč střední pouzdro pylové vychází v příčný, kolínkovitě lomený lalůček, pod nímž na placentálním okraji střední rýhy ještě dvě vajíčka sedí.
24. List pod placentou plátkovitým lalokem opatřený, jehož vnitřní kraj na hořejšek listu ohrnutý do vajíčkorodné placenty přechází. Théka prašná na levé straně listu velmi veliká nese na vnitřním okraji též ještě řadu vajíček.
24. *A.* Listy na levo karpidiální, tam pod bliznou na placentě řadu vajíček nesoucí; pravá polovice plátkovitě vyvinuta, avšak uvnitř na kraji mediánní rýhy nesoucí široké střední pouzdro pylové, na jehož vnitřním kraji druhá řada vajíček vypučela. *B.* Průřez tímto listem.

Obr. 25.—35. Plodolisty pouze samičí, beze stopy pouzder pylových.
Obr. 25. Plodolist s dvěma bliznovými laloky, po obou stranách plátkovitě vyvinutý, bez zárodku semen.
Obr. 26. a 27. Plodolisty v jedné polovici docela plátkovité a sterilní, v druhé karpidiální.
26. Plodolist ze strany a z vnitřku. Kraj od blizny sestupující dělí se ve vlastní kraj plodolistový k semenici dolů jdoucí a ve hranu lomnou, lichokrajnou.
27. *A* plodolist z vnitřní, *B* z vnější strany. Placenta s vajíčky od strany lomné, do které lalok bliznový přechází, úplně oddělená a oddálená.
Obr. 28. a 29. Plodolisty v jedné polovici zcela karpidiální, v druhé dole karpidiální a nahoře plátkovité.
28. Celý plodolist, v polovici levé dělí se hrana lomná od kraje semeničného.
29. Polovice plodolistu nahoře plátkovitá, kraj její nad semenicí dovnitř vehnutý.

Obr. 30. a 31. Plodolisty v jedné polovici (řezem odstraněné) zcela karpidiální, ve druhé, zde vyobrazené, dole s lalokem plátkovitým, jehož kraj do semenice přechází.

30. Zpodina té polovice, k plodolistu vnitřnímu byvší přirostlá, vytvořila v úhlu srůstu řadu vajíček.

31. Plodolist zcela volný; semenice obloukovitá poblíž chobotu.

Obr. 32. Plodolist se dvěma obloukovitýma semenicema, pod nimi s dvěma laloky plátkovitými, jejichž vnitřní kraj do každé semenice přechází.

Obr. 33. a 34. Plodolisty otevřené, však plátkovitě nepřeměněné, po obou stranách mediánní rýhy s řadou vajíček.

Obr. 35. Plodolist malý, ve květu nejvnitřnější, s bliznami, však bez semenic a bez vajíček.

Obr. 36. a 37. Skupiny plodolistů hranami lomnými po straně srostlých.

36. Dva srostlé plodolisty ze strany vnější.

37. Tři plodolisty ze strany vnitřní; levý krajní plodolist na volném kraji s pouzdry pylovými.

Obr. 38. *A* Semenník normální; *B* průřez jeho příčný; *C* průřez plodolistem otevřeným, se dvěma vajíčky a dvěma hranami lomnými.

Obr. 39. Diagram květu abnormálního o 4 trojčetných kruzích.

Obr. 40. Schematický výkres listu po jedné straně obojakého, s prašnými pouzdry a s řadou vajíček, po druhé samičího, pouze se semenicí vajíčkorodnou.

RÉSUMÉ.

Über abnormale Metamorphosen der Gartentulpe (Tulipa Gesneriana L.).

Ein Beitrag zur vergleichenden Morphologie.

Vor längerer Zeit und durch mehrere Jahre habe ich gefüllte Tulpenblüthen in grosser Anzahl untersucht und von den sehr interessanten Sexualblättern derselben Zeichnungen angefertigt, die ich nunmehr nebst knapper Beschreibung und Nutzanwendung für die allgemeine Blüthenmorphologie zur öffentlichen Kenntniss bringe.

Über Abnormitäten derselben Art besteht bereits eine ältere Abhandlung von Schlechtendal,[1]) in welcher manche der nachstehend besprochenen Geschlechtsblätter erwähnt werden, doch ohne ein genaueres vergleichendes Eingehen in deren Eigenthümlichkeiten und ohne die hier so nothwendigen Abbildungen. Auch sonst werden einzelne Anomalien dieser Art z. B. in Masters Teratologie, doch nur abrupte und oberflächlich erwähnt.

Im Allgemeinen bestanden die Abweichungen in Polyphyllie und Pleiotaxie (Masters), doch gab es auch Blüthen mit minderzähligen Kreisen (z. B. etracyklische Blüthen, wie Fig. 39). Die Reihenfolge in der Metamorphose war oft unregelmässig, die 2 äussersten Perigonblätter oft mehr abgerückt und schief inserirt, einseitig oder beiderseits herablaufend, auch theilweise oder ganz vergrünt. Die Perigonblätter waren oft mehr oder minder tief 2—3lappig bis -theilig. Zwischen Perigonblättern und Staubgefässen oder Carpellen gab es vielfach Übergänge und Combinationen; am interessantesten waren androgyne Geschlechtsblätter verschiedener Art (z. Th. schon von Schlechtendal beobachtet). Die Carpelle im Centrum der Blüthe waren entweder ganz frei und offen oder zu verschiedener Höhe seitlich verwachsen (Fig. 36, 37), doch ohne einen Fruchtknoten zu bilden; die Blüthen also quasi gymnosperm.

Ich wende mich gleich zu den Sexualblättern, welche entweder Pollenfächer oder Eichen und Narben, bisweilen nur die letzteren, öfter beiderlei

[1]) D. F. L. von Schlechtendal: Über eine Monstrosität der gemeinen Gartentulpe. Linnaea I. 1826.

Sexualorgane trugen, nicht selten auch theilweise petaloid ausgebildet waren. Ich theile sie in 3 Gruppen: rein männliche, rein weibliche und androgyne Geschlechtsblätter.

I. Rein männliche Geschlechtsblätter.

1. Dieselben ziemlich normal, nicht petaloid.

(Fig. 1, 2.)

Fig. 1 noch wenig vom Normalen abweichend, doch, wie auch Fig. 2 am Staubfaden beiderseits (sonst auch nur einerseits) mit einem Zahne, also 3—2spaltig, ebenso wie auch oft die Perigonblätter. In Fig. 2 der Staubfaden verbreitert, die Anthere weniger abgesetzt, das rechte Pollenfach in das Filament herablaufend.

2. Staubblätter mehr oder weniger petaloid.

(Fig. 3—8.)

In Fig. 3 und 4 ist die Anthere noch vollständig, 4fächerig; einer der Zähne der Fig. 1 und 2 aber nebst dem Filament petaloid. Daraus ist zu ersehen, dass die zahn- oder fadenförmigen Anhängsel der Filamente bei manchen *Allium*-Arten etc. keine »Stipularanhängsel« sind, wofür Eichler sie hielt, sondern Abschnitte der Lamina (ohnehin kommen bei Liliaceen keine Stipularbildungen vor). In Fig. 5 und 6 ist nun auch das Marginalfach in die perigonblattartige Umbildung mit einbezogen, es fehlt also auf der petaloiden Seite dieses Fach, weil der Marginaltheil, der sonst Pollengewebe im Inneren bildet und so zum Pollenfach wird, vegetativ werdend in die Fläche auswächst und nur vegetatives Gewebe bildet. Das Loculament schwindet also nicht ganz, wie manche Pflanzenphysiologen und Genetiker behaupten, sondern wird nur vegetativ und zwar petaloid ausgebildet. In Fig. 7 ist aber auch noch das zugehörige mediane Loculament geschwunden, und zwar ist es absolut nicht gebildet worden, da es eine Excrescenz der Staubblattspreite ist, welche bei Verlaubung oder Petaloidie des Staubblatts früher oder später gänzlich unterbleibt. Eine vegetative Umbildung wie bei *Dictamnus* in eine vegetative Excrescenz findet hier nicht statt. In Fig. 8 ist noch ein Rudiment des mittleren Pollenfaches vorhanden.

II. Rein weibliche Geschlechtsblätter.

1. Fruchtblätter durchaus karpellär ausgebildet.

(Fig. 33—35.)

Die freien Carpelle sind den im Fruchtknoten verschmolzenen ähnlich gebildet, doch mehr verbreitert und flacher. In Fig. 35 ist ein sonderbares kleines (hier vergrössertes) innerstes Carpell von aussen dargestellt, ohne Placenten und Ovula, mit ungetheilter, dreieckiger, nur aussen am Grunde zweischenkliger Narbe. Das Carpell Fig. 33 ist normaler Weise an der Spitze zweispaltig, die Lappen als Narben ausgebildet; deren Rand verlauft quer über

die Oberseite des Carpells in den Rand; zu beiden Seiten der mit Härchen ausgekleideten Medianfurche verlaufen die je eine Eichenreihe tragenden Placentallinien. Ähnlich ist Fig. 34, nur war dies Carpell am Grunde und seitlich den nachfolgenden inneren Carpellen angewachsen. Hiernach sollte man glauben, dass die Ovula nicht vom Blattrande als umgebildete Blattzipfel, sondern aus der Innenfläche des Carpells als Excrescenzen der Blattspreite entspringen. Doch wäre eine solche Ansicht falsch, wie das Folgende zeigen wird. Darum muss davor gewarnt werden, einzelne Abnormitäten zur morphologischen Deutung verwerthen zu wollen; nur ganze Serien zusammenhängender und auf einander hin und zurückdeutender, vergleichbarer Formen gestatten und verbürgen eine richtige Auffassung.

2. Fruchtblätter mehr oder weniger petaloid ausgebildet.

(Fig. 25—32.)

Die theilweise petaloiden Carpelle sind für das Verständniss der typischen Carpellbildung wichtig und unerlässlich, weil sie das Verhältniss der typischen Carpelle zum vegetativen Blatt (wozu im weiteren Sinne auch die Blätter der Blüthenhülle gehören) aufklärt. Wer mit Sachs und Goebel das Sexualblatt als Metamorphose des Laubblattes (von dem das Perigonblatt nur in der Textur verschieden ist) betrachtet, muss die Frage als berechtigt zugeben, wie es daraus metamorphosirt ist, und darüber können nur Übergänge in das Laub- oder Perigonblatt Aufschluss geben.

Fig. 25 (von aussen gezeichnet) ist ein Carpell mit zwei grossen Narbenlappen und einem carpelloiden, gefurchten Mittelstreif, sonst in beiden Seitentheilen perigonblattartig. In Fig. 26 und 27 ist die eine Blatthälfte durchaus carpellär, die andere blumenblattartig. Das Carpell in Fig. 26 ist im carpellären Theile wesentlich so wie Fig. 33 gebildet, der Rand des halbmondförmigen Narbenlappens verlauft in eine an der gewölbten Seite des Carpells herablaufende Linie (26 *B*). Die Placenta mit der Eichenreihe zieht sich wieder entlang der Medianrinne, entfernt und gesondert von dieser Seitenkante.

Wichtig ist Fig. 27. Der vom Narbenrande auf der carpellären Seite sich heraberstreckende Blattrand theilt sich in eine rückwärts verlaufende scharfe Randkante und in einen vorderen mehr membranösen Rand, der zu der Eichenreihe hinabreicht. Der letztere ist der eigentliche Blattrand, der in die Placenta sich fortsetzt und hier die Ovula erzeugt; die scharfe Randkante möge als Brechungskante bezeichnet werden, da das Fruchtblatt in derselben gebrochen und sein Rand hiemit nach der Oberseite umgebogen oder invertirt ist.

Es ist also auch in Fig. 26 *B* die von der Narbe herabstreichende Seitenlinie eine solche Brechungskante; allein der Blattrand, der zwischen dieser Kante und der Placenta die Verbindung herstellen sollte, wie dies in Fig. 27 geschieht, ist ablastirt und damit die Verbindung zwischen Placenta und Brechungskante, welche in ihrer seitlichen Lage einen zweiten Blattrand darstellt, unterbrochen. So ist es auch auf den Carpellen 33 und 34 der Fall.

Weitere Belege für die Richtigkeit dieser Auffassung bieten die folgenden Figuren. In Fig. 28 ist die eine Hälfte carpellär, die Placenta dort oberwärts

ohne Verbindung mit der Brechungskante; die andere Hälfte ist oberwärts ganz blumenblattartig, am Grunde carpellär. Der petaloide Blattrand theilt sich nach unten wieder in die Brechungskante und in die eigentliche ovulatragende Fortsetzung des Blattrandes. Die oben petaloide, unterwärts carpelläre Blatthälfte Fig. 29 zeigt das beginnende Schwinden oder Ablastiren des invertirten Blattrandes über der von demselben umgeschlagenen und »gehefteten« Blattrande gebildeten Placenta, die hier von der Brechungskante nicht sehr entfernt ist. Fig. 30 und 31 sind Blatthälften, die wiederum im oberen Theile carpellär, im unteren petaloid ausgebildet und mit einem Seitenlappen versehen sind. Der obere Rand des Seitenlappens verlauft nach der Blattoberseite zu in die Placentallinie, welche sich nach aufwärts wieder verlauft, ohne die Brechungskante zu erreichen. Die basale Ovularreihe im Winkel, den die einem inneren Fruchtblatt angewachsen gewesene Basis des Carpells Fig. 30 gebildet hatte, entspricht dem horizontal umgebrochenen kurzen Basaltheil der rechtsseitigen Placenta in Fig. 28. Fig. 32 ist ein 3lappiges Fruchtblatt mit 2 petaloiden Seitenlappen und carpellärem Mittellappen. Die bogenförmigen Placenten werden sehr deutlich von den invertirten Blatträndern gebildet; sie verlaufen abwärts in die wirklich umgerollten oberen Blatträndern der Seitenlappen, oberwärts gehen sie zu den Narbenrändern und rückseitigen Brechungskanten.

III. Sexualblätter androgyn.

1. Staubblattartig, beiderseits mit Pollenfächern, daher nicht petaloid, mit zwei Narbenlappen.

(Fig. 9—12.)

Die Marginalfächer ziehen sich entlang des ganzen Antherentheils; oberwärts geht der Narbenrand in sie über, abermals deutlich zeigend, dass die Blatträndern an den Seiten der Marginalfächer liegen; die Medianfächer bald noch ebenso wohl der Länge nach entwickelt (Fig. 10 und 12 links), bald verkürzt, epibasal (Fig. 9, Fig. 11 links, Fig. 10 und 12 rechts). Die Medianfächer können auf ihrem Innenrande Ovula erzeugen (wie in Fig. 10 u. 11). Die Randfächer thun es niemals. In Fig. 12 zieht sich unter dem kurzen Medianfach oberseits eine Ovula tragende Leiste, ein invertirter Blattrand herab. In Fig. 10, wo das rechte Marginalfach am Grunde keinen Vorsprung bildet, liegt unter ihr eine kurze derartige Randleiste, doch in der Lücke zwischen beiden zwei Ovula.

2. Sexualblätter einerseits androgyn, anderseits steril, ganz petaloid.

(Fig. 13—16.)

Die androgyne Hälfte wird von einem entwickelten Narbenlappen gekrönt; in der petaloiden Hälfte ist ein solcher nur schwach oder kaum angedeutet.

Jene narbentragende Hälfte besteht bisweilen sonst nur aus einer einfachen 2fächerigen Theka ohne Ovula (Fig. 13); andermal waren aus dem meist verkürzten Medianfach Ovula gesprosst (Fig. 14, 15). In Fig. 16 sieht man unter der nur schwach ausgebildeten, innen gekerbten (mit Ansätzen zu Ovulis versehenen?) Theka wieder einen inversen, oberwärts in einem Zahne endigenden Blattrand, und über diesem ein Ovulum (ein zweites war dahinter versteckt).

3. Sexualblätter einerseits antheroidal, anderseits carpellär ausgebildet.

(Fig. 17—24.)

Diese androgynen Sexualblätter sind bald gar nicht petaloid (Fig. 18—22), bald ist die carpelläre Hälfte unterhalb der ovulatragenden Placenta in einen petaloiden Lappen ausgezogen (Fig. 17, 23); im seltensten Falle ist die antheroidale Hälfte, die nur das Medianfach entwickelt hat, im Übrigen petaloid ausgebildet (Fig. 24). Auch in dieser Gruppe beweisen einzelne Formen, dass die Placenta vom inversen Blattrande gebildet wird, indem entweder oberhalb der Placenta der eingeschlagene Blattrand sich deutlich entwickelt zeigt (Fig. 18 *A* und *B* von hinten, wo auch die Brechungskante zu sehen ist), oder indem sich die Placenta mit ihrem unteren Theile in den umgeschlagenen Blattrand des Blattzipfels darunter fortsetzt (Fig. 17 und 23). Sonst ist noch bemerkenswerth, dass das verkürzte Medianfach der antheroiden Seite nach abwärts oftmals wieder in eine basale Randleiste, d. h. einen inversen Blattrand übergeht, der auch manchmal Eichen trägt (Fig. 12, 22) und mit der Placenta der Gegenseite die mediane Rinne begränzt (auch Fig. 18, 20).

Allgemeine Ergebnisse. 1. Die Carpelle von *Tulipa* sind Blätter mit inversen Blatträndern, zwischen denen nur eine schmale physiologische Oberseite in der Medianrinne bleibt, und welche je eine Reihe Ovula, als Randabschnitte tragen. Blätter mit inversen Blatträndern sind nach Art jener abnormen Holunderblätter gebildet, die ich in einer vorausgegangenen Abhandlung in der Akademie publicirt habe und die auf Taf. I dort zu vergleichen sind.

Es ist eine Eigenheit der Sexualblätter der Tulpe in den Abnormitäten, dass sie nur auf inversen Rändern Ovula oder deren Rudimente produciren können, sobald aber in petaloider Umbildung der normale seitliche Rand sich ausgebildet hat, weder Ovula noch auch Ovularblättchen, die bei Dicotylen so häufig auftreten, mehr gefunden werden.

Die Art der Verwachsung der Carpelle im normalen Fruchtknoten ergibt sich ohneweiters durch Vergleich eines Durchschnitts des freien Carpells (Fig. 38 *C*, etwa zum Carpell Fig. 33 gehörig) mit einem Carpell im Durchschnitt des Fruchtknotens (Fig. 33 *B*). Man sieht, die Carpelle verwachsen (verschmelzen) mit der ganzen Fläche des invertirten Theils zwischen der Brechungskante x und dem Bug y nächst dem eichenproducirenden inversen

Blattrande. Wenn aber in der gefüllten Tulpenblüthe die offenen Carpelle seitlich und theilweise nicht bis zu den Narben verwachsen, so geschieht dies nur mit den Brechungskanten, wie aus Fig. 37 zu ersehen ist.

Dass auch sonst bei den Angiospermen die Carpelle mit invertirten Randpartien verwachsen, zeigen sowohl aufgelöste Fruchtknoten (bei *Aquilegia*, *Trifolium repens* z. B.), als auch schon, genau erwogen, die Entwickelungsgeschichte (s. z. B. PAYER's Organogénie de la fleur).

2. Das Staubblatt der Tulpe (und im Allgemeinen der Angiospermen) ist ein Blatt mit zwei ventralen, medianen Excrescenzen, also 4flügelig; beide Hälften der Hauptspreite und beide Excrescenzen pollenfachbildend.

Seinem morphologischen Baue nach ist es mit den Excrescenzblättern der Tafel II meiner Abhandlung »Teratologische Beiträge zur Morphologie des Blattes« zu identificiren. Das Staubblatt zeigt darum auch dieselben Modificationen, wie die vegetativen oder aus Staubblättern vegetativ umgebildeten Laubblätter. Die erste Modification, worin jede Excrescenz am Grunde mit dem Rande der zugehörigen Hauptspreitenhälfte sich verbindend, eine Tasche bildet, zeigt Staubblatt Fig. 1, dann bei halbseitiger Antherenbildung Fig. 8, 15, 20, 21, 23, ebenso wie l. c. die *Phlox*blätter Fig. 14, 15 und die verlaubten Staubblätter von *Dictamnus* Fig. 21, 22. In der zweiten Modification vereinigen sich die Excrescenzen mit ihren Basen unter sich am Mittelnerven des Blattes, so bei den Laubblättern von *Phlox* und den verlaubten Staubblättern von *Dictamnus* l. c. Fig. 19, 20 und ebenso an den Staubblättern der Tulpe z. B. Fig. 2, 3, 4, 6. In der dritten Modification sind die mittelnervständigen Excrescenzen isolirt, weder unter sich noch mit dem Rande der Hauptspreite verbuden; so verhalten sich einzelne Medianfächer des Staubblatts Fig. 8, 9, 14, 24, ganz wie die Excrescenzen am Krautblatt l. c. Fig. 25.

Aufzuklären ist noch die Erscheinung, dass die Medianfächer öfter gleich dem inversen placentalen Blattrande Ovula produciren. Dass die Marginalfächer es nie thun, ist begreiflich, da sie im normalen, nicht invertirten Blattrande liegen. Aber die mediane Excrescenz kann gegen den Mittelnerven hin einen Blattrand bilden, d. h. sie kann, wie das *Phlox*blatt Fig. 14 zeigt, am oberen Ende umwenden und längs des Mittelnerven ebenso herablaufen, wie der inverse Blattrand selbst, sie kann daher, wie beim Staubblatt Fig. 17, 18 *A*, 20, 21, mit dem inneren Rande in den inversen placentalen Blattrand nach abwärts sich fortsetzen. Fig. 40 stellt hiernach schematisch ein androgynes Blatt dar, rechts mit der inversen Placenta, links mit der in eine ebensolche Placenta übergehenden medianen Pollenfachexcrescenz, deren Innenrand also als gleichsituirte Fortsetzung der Placenta ebenfalls Ovula produciren kann. Diese Fähigkeit besteht auch dann, wenn das Medianfach, wie in Fig. 14 und besonders Fig. 24 isolirt auftritt.

Man hat meine Methode, aus den in Abnormitäten auftretenden Variationen in streng vergleichender Weise Resultate für die allgemeine Morphologie abzuleiten, und daraus den normalen Bau in genauerer Weise als sonst

kennen zu lernen, »speculative Morphologie« genannt und z. B. von »meiner Überspreitungstheorie«, die aber schon von Braun herrührt, als von einem »scharfsinnigen Beitrag zur speculativen Morphologie« gesprochen.[1]) Diese Methode ist aber ganz wesentlich comparativ, speculativ nur insofern, als sie in der Anschauung und im logischen Denken die zerstreuten Thatschen, und zwar alle Thatsachen, also auch die der abnormen Variationen, einheitlich verknüpft und verarbeitet, was doch wohl Aufgabe einer rationellen Wissenschaft ist. Diese nur an die Thatsachen sich haltende Speculation ist aber von jener subjectiven, mit den Thatsachen höchstens oberflächlich spielenden und daher auch durch exactere Auffassung der Thatsachen zu widerlegenden Speculation weit verschieden. Es heisst die echte wissenschaftliche Speculation mit jener falschen subjectiven zusammenwerfen, wenn z. B. die alte De Candolle'sche Theorie des Staubblatts (Bildung der Pollenfächer durch Einrollung der Blatthälften u. s. w.) mit der Excrescenztheorie in Parallele gestellt und ihr so für ziemlich gleichwerthig erklärt worden ist.[1]) Denn jene ist rein subjectiv, wird durch die Entwicklungsgeschichte gänzlich widerlegt, und natürlich auch durch keine Thatsache abnormer Variation gestützt, während die letztere durch Reihen zahlreicher Thatsachen, wie hier wieder geschehen, exact bewiesen wird und mit der Entwicklungsgeschichte ganz gut sich verträgt, obwohl sie aus der Entwicklung allein, welche verschiedene Erklärungen zulässt, allerdings nicht erkannt werden kann.

---

[1]) M. Kronfeld, Über vergrünte Blüthen von *Viola alba* Bess. (Sitzungsber. d. kais. Akad. in Wien, math. naturw. Cl. Bd. XCVII. 1888. Separatabdr. S. 7.)

Erklärung der Figurentafeln.

Taf. I.

Fig. 1— 2. Wenig veränderte Staubblätter der Tulpe (wie in allen Figuren, ausser in 18 *B*, 26 *B*, 25, 35, 36, wo die Rückseite gezeichnet ist) von der Innenseite.

Fig. 3— 8. Staubblätter mit einer (rechtsseitigen) petaloid entwickelten Blatthälfte.

Fig. 9—12. Androgyne Sexualblätter, beiderseits antheroidal (mit Pollenfächern), mit Narbenlappen.

Fig. 13—16. Androgyne Sexualblätter, einerseits androgyn, anderseits petaloid und steril.

Fig. 17—21. Androgyne Sexualblätter, einerseits männlich (antheroidal), anderseits weiblich (carpellär).

Taf. II.

Fig. 22—24. Androgyne Sexualblätter, einerseits antheroidal, anderseits carpellär.

Fig. 25—32. Rein weibliche Carpelle, mehr oder weniger petaloid umgebildet.

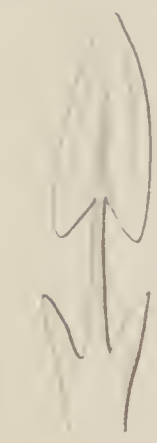
Fig. 33—35. Rein weibliche Fruchtblätter, vollkommen carpelloid ausgebildet.

Fig. 36—37. Gruppen von 2 oder 3 theilweise verwachsenen Carpellen.

Fig. 38. *A*. Normaler Fruchtknoten der Tulpe, *B*. dessen Durchschnitt, *C*. Durchschnitt eines freien Carpells nach Art der Fig. 33. — *x* Brechungskante, *y* epiplacentaler Bug.

Fig. 39. Diagramm einer abnormen tetracyklischen Tulpenblüthe, *p* Perigonblätter, *sp* petaloide Stamina, *s* Stamina, *sc* androgynes Blatt, *c* Carpelle.

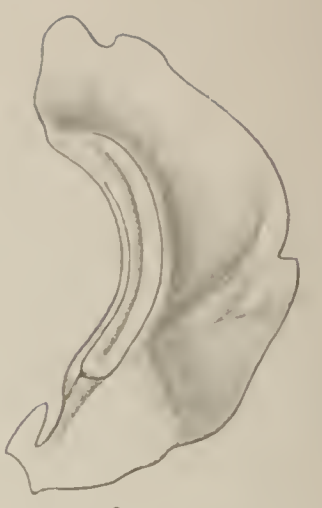
Fig. 40. Schematische Darstellung eines einerseits androgynen, anderseits weiblichen Sexualblattes, zur Versinnlichung des morphologischen Baues.


1

2

3

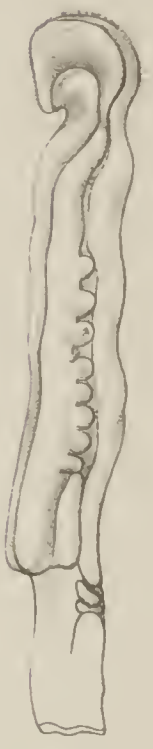
4


6

5

7

8


10

11

9

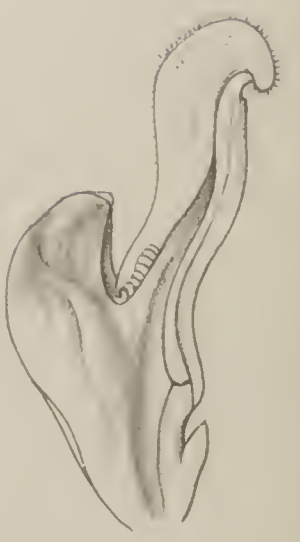
13

12

14

15

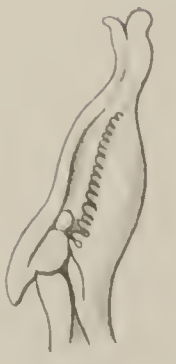
16

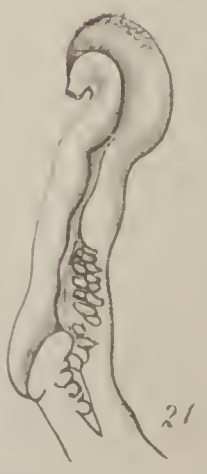

17

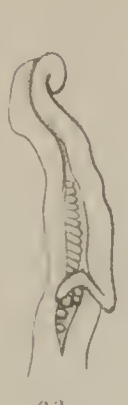
18 A

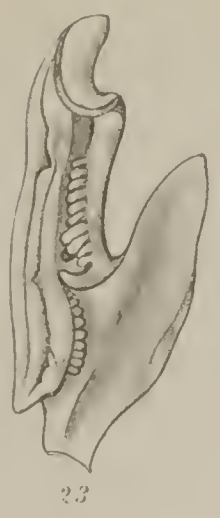
18 B

19


20


21


22


23

24 A

24 B

25

27

26 B

26 A

29

30

28

31

32

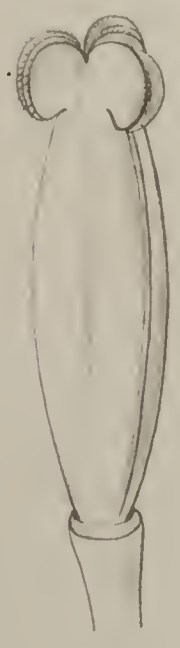
33

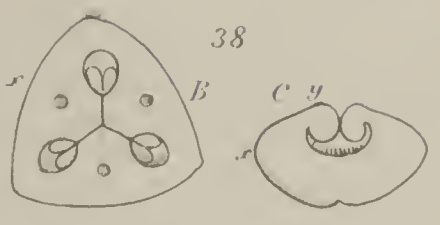
34

35

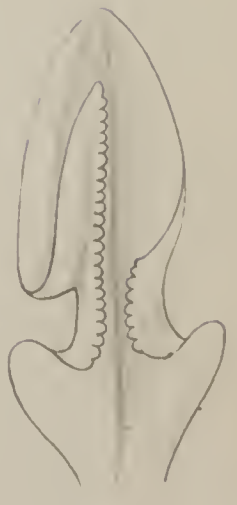
36

37


38 A


38

39


40

Prospěchy české Akademie Třída II. 1892

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA

3 0112 058879658